

Priebeh funkcie

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

`monika.molnarova@tuke.sk`

Obsah

- 1 Pribeh funkcie
 - Monotónnosť funkcie
 - Lokálne extrémny funkcie
 - Globálne (absolútne) extrémny funkcie
 - Konvexnosť a konkávnosť funkcie
 - Pribeh funkcie

Pojem lokálneho extrému

Definícia

Hovoríme, že **funkcia f má v bode $x_0 \in (a, b)$ lokálny extrém**, ak existuje také okolie prstencové okolie $O^\circ(x_0)$, že pre všetky $x \in O^\circ(x_0)$ platí jeden z prípadov

- $f(x) \leq f(x_0)$ lokálne maximum alebo
- $f(x) \geq f(x_0)$ lokálne minimum alebo
- $f(x) < f(x_0)$ ostré lokálne maximum alebo
- $f(x) > f(x_0)$ ostré lokálne minimum.

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému

Veta (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému)

Nech existuje derivácia $f'(x_0)$. Ak má funkcia f v bode x_0 lokálny extrém, tak $f'(x_0) = 0$.

Poznámka: Obrátené tvrdenie neplatí. Ak $f'(x_0) = 0$, to neznamená, že má funkcia v bode x_0 lokálny extrém.

Definícia

Bod x_0 , v ktorom má funkcia deriváciu, a platí $f'(x_0) = 0$, nazývame **stacionárnym bodom** funkcie f .

Stacionárne body funkcie - Príklad

Príklad:

Nájdime stacionárne body funkcie:

① $f(x) = x^4 - 4x^3,$

② $f(x) = x \cdot \ln x,$

③ $f(x) = x^2,$

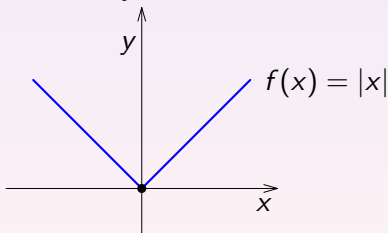
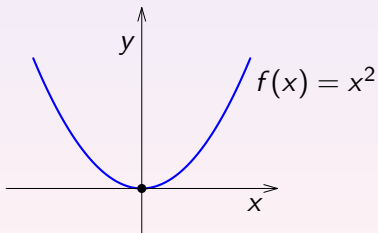
④ $f(x) = |x|.$

Kritické body funkcie

Definícia

Stacionárne body funkcie f a body, v ktorých funkcia f nemá deriváciu, nazývame **kritické body** funkcie f .

Z nutnej podmienky existencie lokálneho extrémym vyplýva, že funkcia **môže** nadobúdať extrém v svojich kritických bodoch.



Obr.: Kritické body funkcie

Lokálne extrémny funkcie pomocou monotónnosti

Ak má funkcia v okolí bodu x_0 deriváciu, tak vzhľadom na znamienko tejto derivácie pred bodom x_0 a za bodom x_0 môžu nastať tieto prípady:

- 1 ak má derivácia rovnaké znamienko, tak funkcia nemá v bode x_0 lokálny extrém,
- 2 ak derivácia mení znamienko z kladného na záporné, tak funkcia má v bode x_0 lokálne maximum,
- 3 ak derivácia mení znamienko zo záporného na kladné, tak funkcia má v bode x_0 lokálne minimum.

Lokálne extrémny funkcie pomocou monotónnosti - Príklad

Príklad:

Nájdime pomocou monotónnosti funkcie lokálne extrémny funkcie:

① $f(x) = x^4 - 4x^3,$

② $f(x) = x \cdot \ln x,$

③ $f(x) = x^2,$

④ $f(x) = |x|.$

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

Veta (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému)

Nech funkcia f má v bode $x_0 \in (a, b)$ deriváciu $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, pre $n \geq 2$. Nech $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Potom platí

- 1 Ak je n párne a
 - $f^{(n)}(x_0) > 0$, tak má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne minimum.
 - $f^{(n)}(x_0) < 0$, tak má funkcia f v bode x_0 ostré lokálne maximum.
- 2 Ak je n nepárne, tak funkcia f nemá v bode x_0 lokálny extrém (x_0 je inflexný bod).

Lokálne extrémny funkcie - Príklad

Príklad:

Nájdime lokálne extrémny funkcie:

① $f(x) = x^4 - 4x^3,$

② $f(x) = x^5 - 5x^4,$

③ $f(x) = x \cdot \ln x.$

Výpočet globálnych extrémov funkcie

Ak má funkcia f lokálne extrémny len v bodoch $x_1, x_2, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$, tak

1 globálne minimum

$$\min_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$$

2 globálne maximum

$$\max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)\}$$

Globálne extrémny funkcie - Príklad

Príklad: Vypočítajte absolútne maximum a absolútne minimum funkcie $f(x) = x^5 - 5x$ na $\langle -2, \frac{3}{2} \rangle$.

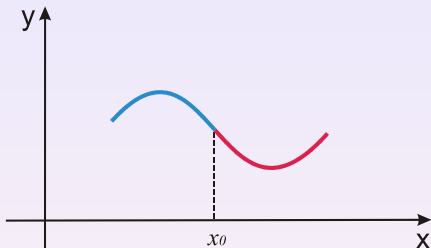
Riešenie:

- lokálne minimum $f(1) = -4$
- lokálne maximum $f(-1) = 4$
- $f(a) = f(-2) = -22$
- $f(b) = f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{32}$

$$\min_{x \in \langle -2, \frac{3}{2} \rangle} f(x) = \min\{f(1), f(-1), f(-2), f(\frac{3}{2})\} = -22$$

$$\max_{x \in \langle -2, \frac{3}{2} \rangle} f(x) = \max\{f(1), f(-1), f(-2), f(\frac{3}{2})\} = 4$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie - ilustrácia



Obr.: Inflexný bod

Pojem konvexnosti a konkávnosti

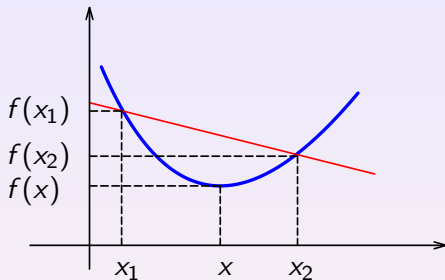
Definícia

Nech funkcia f je definovaná na intervale (a, b) . Hovoríme, že **funkcia f je konvexná (konkávna)** na (a, b) , ak pre každú trojicu bodov $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod (nad) priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]$ alebo leží na tejto priamke.

Definícia

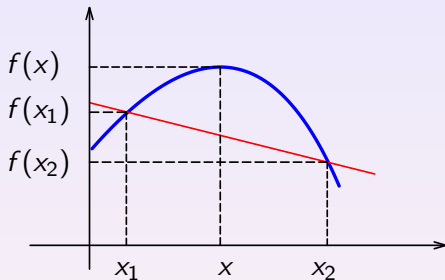
Nech funkcia f je definovaná na intervale (a, b) . Hovoríme, že **funkcia f je rýdzokonvexná (rýdzokonkávna)** na (a, b) , ak pre každú trojicu bodov $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ takú, že $x_1 < x < x_2$ je bod $[x, f(x)]$ pod (nad) priamkou, určenou bodmi $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]$.

Konvexnosť funkcie - ilustrácia



Obr.: Rýdzo konvexná funkcia

Konkávnosť funkcie - ilustrácia



Obr.: Rýdzo konkávna funkcia

Postačujúca podmienka konvexnosti/konkávnosti

Veta (Postačujúca podmienka konvexnosti/konkávnosti)

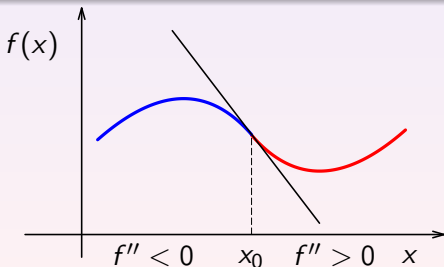
Nech je funkcia f spojitá na intervale $I \subset \langle a, b \rangle$ a má druhú deriváciu rovnakého znamienka na intervale (a, b) . Potom platí

- ak $f''(x) > 0$, tak f je rýdzo konvexná na I ,
- ak $f''(x) < 0$, tak f je rýdzo konkávna na I ,
- ak $f''(x) \geq 0$, tak f je konvexná na I ,
- ak $f''(x) \leq 0$, tak f je konkávna na I .

Pojem inflexného bodu

Definícia

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode $x_0 \in I \subset \langle a, b \rangle$ **inflexiu**, ak je funkcia v nejakom ľavom okolí bodu x_0 rýdzo konkávna (rýdzo konvexná) a v nejakom pravom okolí bodu x_0 rýdzo konvexná (rýdzo konkávna). Bod $[x_0, f(x_0)]$ nazývame **inflexným bodom funkcie $f(x)$** .



Nutná podmienka existencie inflexného bodu

Veta (Nutná podmienka existencie inflexného bodu)

Nech existuje derivácia $f''(x_0)$. Ak má funkcia $f(x)$ v bode x_0 inflexiu, tak $f''(x_0) = 0$.

Poznámka: Obrátené tvrdenie neplatí. Ak $f''(x_0) = 0$, to neznamená, že x_0 je inflexný bod funkcie.

Príklad:

$$f(x) = x^5 - 5x^4$$

Konvexnosť a konkávnosť funkcie - Príklad

Príklad:

Vyšetrite konvexnosť/konkávnosť funkcie a nájdite inflexné body funkcie:

① $f(x) = x^4 - 4x^3,$

② $f(x) = x \cdot \ln x.$

Výšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie

Algoritmus:

- 1 $D(f)$ (príp. $H(f)$).
- 2 Prieisky grafu funkcie so súradnicovými osami.
- 3 Párnosť - nepárnosť.
- 4 Periodičnosť funkcie.
- 5 Body nespojitosti.
- 6 Asymptoty grafu funkcie.
- 7 Stacionárne body a intervaly, na ktorých je funkcia rýdzomonotónna.
- 8 Lokálne a globálne extrémny funkcie.
- 9 Intervaly, na ktorých je funkcia konvexná/konkávna.
- 10 Inflexné body.
- 11 Graf funkcie.

Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie - Príklad

Príklad:

Vyšetrimo priebeh a nakreslime graf funkcie:

① $f(x) = x^4 - 4x^3,$

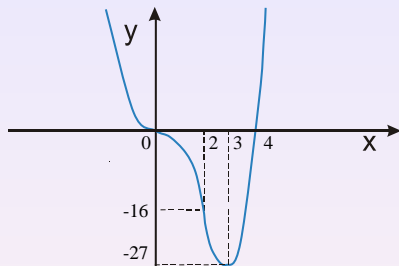
② $f(x) = x^5 - 5x^4,$

③ $f(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2},$

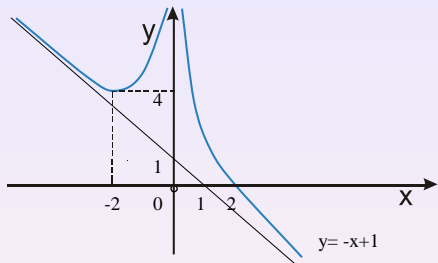
④ $f(x) = x \cdot \ln x,$

⑤ $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}.$

Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie - Príklad 1

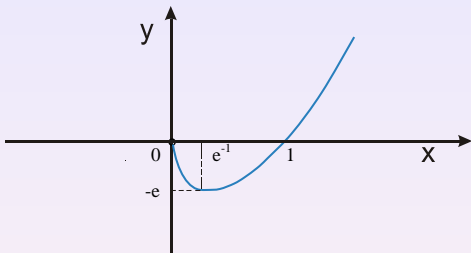
Obr.: Pribeh funkcie $y = x^4 - 4x^3$

Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie - Príklad 3

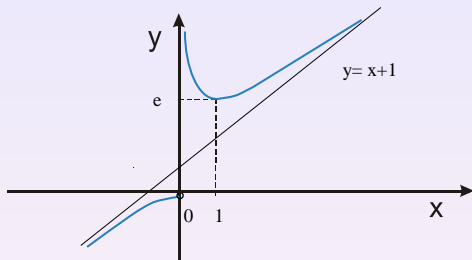


Obr.: Pribeh funkcie $y = \frac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$

Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie - Príklad 4

Obr.: Pribeh funkcie $y = x \ln x$

Vyšetrenie priebehu a nakreslenie grafu funkcie - Príklad 5

Obr.: Pribeh funkcie $y = x e^{\frac{1}{x}}$

Ďakujem za pozornosť.