Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky

KATEDRA MATEMATIKY A
TEORETICKEJ INFORMATIKY

MATEMATIKA III v príkladoch FEI

Anna Grinčová – Jana Petrillová

Košice 2022

Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky

KATEDRA MATEMATIKY A TEORETICKEJ INFORMATIKY

MATEMATIKA III v príkladoch FEI

Anna Grinčová – Jana Petrillová

Košice 2022

Recenzovali: RNDr. Miriam Andrejiová, PhD.
doc. RNDr. Viktor Pirč, CSc.

1. vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN

Obsah

Úvod

Táto učebná pomôcka je určená pre študentov druhého ročníka bakalárskej formy štúdia na Fakulte elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach (FEI TU), ale môže poslúžiť aj študentom iných fakúlt.

Učebnica je rozdelená do piatich kapitol, ktoré obsahujú základné teoretické poznatky potrebné k riešeniu príkladov, vzorové riešené aj neriešené úlohy k učivu, ktoré je preberané v predmete Matematika III.

Cieľom tejto učebnej pomôcky nebolo podať ucelený teoretický prehľad riešenej problematiky, preto je vhodné kombinovať používanie tejto učebnice s vysokoškolskou učebnicou Matematická analýza II autorov Jozef Džurina, Anna Grinčová a Viktor Pirč aj s voľne dostupnými e-learningovými materiálmi Katedry matematiky a teoretickej informatiky FEI TU v Košiciach.

Na záver ďakujeme RNDr. Miriam Andrejiovej, PhD. a doc. RNDr. Viktorovi Pirčovi CSc. za starostlivé prečítanie rukopisu a za cenné pripomienky, ktorými prispeli k zlepšeniu textu tejto učebnice. Zároveň sa chceme vopred ospravedlniť za možné jazykovo-štylistické chyby, pretože daný text neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

1 Nekonečné číselné rady

1.1 Pojem nekonečného číselného radu a jeho súčet

Definícia 1.1. *Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Potom výraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

*nazývame **nekonečný číselný rad**, kde číslo a_n nazývame n–tým členom nekonečného číselného radu.*

Definícia 1.2. *Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanú $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ nazývame **postupnosť čiastočných súčtov**.*

Definícia 1.3. *Ak existuje konečná limita $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, tak číslo s nazývame **súčtom radu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je **konvergentný**. Označujeme $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Definícia 1.4. *Ak neexistuje konečná limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, tak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **divergentný**.*

Definícia 1.5. *Ak je nekonečný číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$ konvergentný, tak hovoríme, že nekonečný číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolútne konvergentný**.*

Definícia 1.6. *Ak je nekonečný číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je divergentný, tak hovoríme, že nekonečný číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je **relatívne konvergentný**.*

Veta 1.1. *Ak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolútne konvergentný, tak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný.*

Veta 1.2. ***Nutná podmienka konvergencie nekonečného číselného radu***
Ak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Príklad 1.1. *Nájdime súčet radu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$.

Riešenie: n–tý člen radu $a_n=\frac{1}{n^2+3n+2}$ je v tvare rýdzoracionálneho výrazu a preto je vhodné rozložiť ho na súčet elementárnych zlomkov. Daný rad je potom možné upraviť na tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Na základe Definície 1.2 vytvoríme n–tý čiastočný súčet $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ a v ňom vyčíslime niekoľko prvých a niekoľko posledných členov.

$$\begin{aligned} s_n = & \left(\mathbf{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\\ & +\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\\ & +\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\\ & \qquad\vdots\\ & +\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right)+\\ & +\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)+\\ & +\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\mathbf{\frac{1}{n+2}}\right). \end{aligned}$$

Všímame si rovnaké menovatele a vidíme, že niektoré členy sa odčítajú (označené farebne). Druhý člen zátvorky sa odčíta s prvým členom nasledujúcej zátvorky. K tomu, aby sme členy odčítali, potrebujeme dve po sebe idúce zátvorky. Ďalšie škrtnuté členy sa odčítajú s členmi v nasledujúcich, resp. predchádzajúcich zátvorkách. Preto po úprave n–tého čiastočného súčtu (ostávajú iba tučné členy) dostaneme

$$s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}.$$

Na základe Definície 1.3 je súčet radu

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\cancelto{0}{\frac{1}{n+2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Príklad 1.2. *Nájdime súčet radu* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3}$.

Riešenie: n–tý člen radu $a_n = \frac{4}{4n^2+4n-3}$ je v tvare rýdzoracionálneho výrazu a preto je vhodné rozložiť ho na súčet elementárnych zlomkov. Daný rad je potom možné upraviť na tvar

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right).$$

Na základe Definície 1.2 vytvoríme n–tý čiastočný súčet $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a v ňom vyčíslime niekoľko prvých a niekoľko posledných členov.

$$\begin{aligned} s_n = &\left(\mathbf{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{7}} \right) + \\ &+ \left(\mathbf{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{9}} \right) + \\ &+ \left(\cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{11}} \right) + \\ &+ \left(\cancel{\frac{1}{9}} - \cancel{\frac{1}{13}} \right) + \\ &\vdots \\ &+ \left(\cancel{\frac{1}{2n-7}} - \cancel{\frac{1}{2n-3}} \right) + \\ &+ \left(\cancel{\frac{1}{2n-5}} - \cancel{\frac{1}{2n-1}} \right) + \\ &+ \left(\cancel{\frac{1}{2n-3}} - \mathbf{\frac{1}{2n+1}} \right) + \\ &+ \left(\cancel{\frac{1}{2n-1}} - \mathbf{\frac{1}{2n+3}} \right). \end{aligned}$$

Všímame si rovnaké menovatele a vidíme, že niektoré členy sa odčítajú (označené farebne). Druhý člen prvej zátvorky sa odčíta s prvým členom tretej zátvorky atď. K tomu, aby sme členy odčítali, potrebujeme tri po sebe idúce zátvorky. Ďalšie škrtnuté členy sa odčítajú s členmi v nasledujúcich, resp. predchádzajúcich zátvorkách. Preto po úprave n–tého čiastočného súčtu (ostávajú iba tučné členy) dostaneme

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}.$$

Na základe Definície 1.3 je súčet radu

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cancel{\frac{1}{2n+1}}^{\,0} - \cancel{\frac{1}{2n+3}}^{\,0} \right) = \frac{8}{15}.$$

Príklad 1.3. *Nájdime súčet radu* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{-2}{n^3-n}$.

Riešenie: n–tý člen radu $a_n = \frac{-2}{n^3-n}$ je v tvare rýdzoracionálneho výrazu a preto je vhodné rozložiť ho na súčet elementárnych zlomkov. Daný rad je potom možné upraviť na tvar

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{-2}{n^3-n} = \sum_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{1}{n-1}+\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Na základe Definície 1.2 vytvoríme n–tý čiastočný súčet $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a v ňom vyčíslime niekoľko prvých a niekoľko posledných členov.

$$\begin{aligned}
s_n = {} & \left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\\
&+\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\cancel{\frac{2}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\\
&+\left(-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{2}{5}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right)+\\
&+\left(-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{2}{6}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\\
&\qquad\vdots\\
&+\left(-\cancel{\frac{1}{n-4}}+\cancel{\frac{2}{n-3}}-\cancel{\frac{1}{n-2}}\right)+\\
&+\left(-\cancel{\frac{1}{n-3}}+\cancel{\frac{2}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right)+\\
&+\left(-\cancel{\frac{1}{n-2}}+\cancel{\frac{2}{n-1}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)+\\
&+\left(-\cancel{\frac{1}{n-1}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{n}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Všímame si rovnaké menovatele a vidíme, že niektoré členy sa odčítajú (označené farebne). Tretí člen prvej zátvorky sa odčíta s druhým členom druhej zátvorky a s prvým členom tretej zátvorky, atď. K tomu, aby sme členy odčítali, potrebujeme tri po sebe idúce zátvorky. Ďalšie škrtnuté členy sa odčítajú s členmi v nasledujúcich, resp. predchádzajúcich zátvorkách. Preto po úprave n–tého čiastočného súčtu (ostávajú iba tučné členy) dostaneme

$$s_n = -\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{n}+\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Na základe Definície 1.3 je súčet radu

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}-\cancelto{0}{\frac{1}{n+1}}\right) = -\frac{1}{6}.$$

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách nájdite súčet radu:

1.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$	$\frac{1}{2}$
2.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$	$\frac{1}{5}$
3.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$	$\frac{1}{2}$
4.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$	$\frac{1}{3}$
5.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}$	$\frac{1}{4}$
6.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9n+20}$	$\frac{1}{5}$
7.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$	$\frac{5}{12}$
8.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+8}$	$\frac{7}{24}$
9.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+8n+15}$	$\frac{9}{40}$
10.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+10n+24}$	$\frac{11}{60}$
11.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+3n}$	$\frac{11}{6}$
12.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+5n+4}$	$\frac{13}{12}$
13.	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$	1
14.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2}$	$\frac{1}{2}$
15.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2-3n-2}$	1
16.	$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2-7n-12}$	$\frac{1}{3}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2 - 21n - 10}$ $\qquad \dfrac{1}{2}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2 + 21n - 10}$ $\qquad \dfrac{1}{5}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{9n^2 + 12n - 5}$ $\qquad \dfrac{7}{20}$

20. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{24}{9n^2 - 12n - 5}$ $\qquad 5$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{9n^2 + 6n - 8}$ $\qquad \dfrac{5}{4}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{12}{36n^2 - 12n - 35}$ $\qquad -\dfrac{4}{5}$

23. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - 1}$ $\qquad \dfrac{3}{4}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6}{4n^2 - 9}$ $\qquad \dfrac{1}{3}$

25. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{-1}{(n-3)(n-4)}$ $\qquad -1$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$ $\qquad \dfrac{1}{4}$

27. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n+2}{n(n-1)(n-2)}$ $\qquad \dfrac{3}{2}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(n^2+3n+2)(n+3)}$ $\qquad \dfrac{1}{6}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$ $\qquad \dfrac{1}{4}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^3 + 3n^2 + 2n}$ $\qquad \dfrac{1}{2}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{n^3 + 3n^2 + 2n}$ $\qquad 1$

32. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n+2}{n^3 - 3n^2 + 2n}$ $\qquad \dfrac{3}{2}$

1.2 Harmonický a geometrický rad

Zovšeobecnený harmonický rad má tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ pre $\alpha > 0$. Tento rad je divergentný pre $\alpha \leqq 1$ a konvergentný pre $\alpha > 1$. Špeciálnym prípadom zovšeobecneného harmonického radu pre $\alpha = 1$ je ***harmonický rad*** a má tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Tento rad je divergentný.

Geometrický rad má tvar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n + \cdots$, kde $a_1 \neq 0$. Tento rad je konvergentný pre $|q| < 1$ a divergentný pre $|q| \geqq 1$. ***Súčet nekonečného geometrického radu*** je $s = \frac{a_1}{1-q}$, kde $|q| < 1$.

Príklad 1.4. *Nájdime súčet radu* $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{5}{4^{n-3}}$.

Riešenie: Pre daný rad určíme prvý člen a_1 a kvocient q. Prvý člen a_1 získame dosadením $n = 5$ do n-tého člena radu

$$a_1 = \frac{5}{4^{5-3}} = \frac{5}{16}.$$

Kvocient q určíme takto

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{5}{4^{n-2}}}{\frac{5}{4^{n-3}}} = \frac{\frac{5}{4^n 4^{-2}}}{\frac{5}{4^n 4^{-3}}} = \frac{4^{-3}}{4^{-2}} = \frac{1}{4}.$$

Pretože platí $|q| = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$, súčet tohto geometrického radu je

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{16}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{12}.$$

Príklad 1.5. *Nájdime súčet radu* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Riešenie: Pre daný rad určíme prvý člen a_1 a kvocient q. Prvý člen a_1 získame dosadením $n = 2$ do n-tého člena radu

$$a_1 = (-1)^{2+1} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}.$$

Kvocient q určíme takto

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{(-1)^n (-1)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^1}{(-1)^n (-1)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^n} = -\frac{2}{3}.$$

Pretože platí $|q| = \left|-\frac{2}{3}\right| < 1$, súčet tohto geometrického radu je

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\frac{4}{9}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{4}{15}.$$

Príklad 1.6. *Nájdime súčet radu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 10^n}{16^n}$.

Riešenie: n–tý člen radu je vhodné rozdeliť na dve časti a takto vytvoriť dva nové jednoduchšie geometrické rady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 10^n}{16^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{16^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{16^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n$$

V každom novom rade určíme prvý člen a_1 a kvocient q.

Pre rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ prvý člen a_1 získame dosadením $n = 1$ do n-tého člena radu

$$a_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4}.$$

Kvocient q určíme takto

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right)^1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{4}.$$

Pretože platí $|q| = \left|\frac{1}{4}\right| < 1$, súčet tohto geometrického radu je

$$s_1 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Pre rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n$ prvý člen a_1 získame dosadením $n = 1$ do n-tého člena radu

$$a_1 = \left(\frac{5}{8}\right)^1 = \frac{5}{8}.$$

Kvocient q určíme takto

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{8}\right)^n} = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^n \left(\frac{5}{8}\right)^1}{\left(\frac{5}{8}\right)^n} = \frac{5}{8}.$$

Pretože platí $|q| = \left|\frac{5}{8}\right| < 1$, súčet tohto geometrického radu je

$$s_2 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{8}}{1 - \left(\frac{5}{8}\right)} = \frac{5}{3}.$$

Súčet pôvodného radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 10^n}{16^n}$ určíme ako rozdiel $s_1 - s_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$.

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách nájdite súčet radu:

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ $\qquad \frac{1}{2}$
34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ $\qquad \frac{5}{2}$
35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ $\qquad -\frac{1}{4}$
36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$ $\qquad -\frac{2}{5}$
37. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10}{4^{n+2}}$ $\qquad \frac{5}{6}$
38. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ $\qquad 1$
39. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}$ $\qquad 27$
40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{7}\right)^n$ $\qquad -\frac{5}{12}$
41. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ $\qquad \frac{8}{5}$
42. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-2)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ $\qquad -\frac{2}{45}$
43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ $\qquad \frac{1}{2}$
44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$ $\qquad \frac{1}{3}$
45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$ $\qquad \frac{5}{6}$
46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$ $\qquad \frac{1}{6}$
47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}$ $\qquad \frac{1}{2}$
48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 3^n}{15^n}$ $\qquad \frac{3}{4}$
49. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{9^n}$ $\qquad \frac{39}{14}$

1.3 Kritériá konvergencie číselných radov

Veta 1.3. ***D'Alembertovo podielové kritérium***

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečný číselný rad a nech* $\forall n \in N$ *platí, že* $a_n \neq 0$.

(a) *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, *tak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konvergentný.*

(b) *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, *tak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentný.*

Príklad 1.7. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Riešenie: n–tý člen radu je rovný $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ a $(n+1)$ člen radu je rovný $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Na základe D'Alembertovho kritéria dostávame

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{2}}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\cancelto{1}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Z toho vyplýva, že daný číselný rad konverguje.

Príklad 1.8. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3(n+2)!}{5^n}$.

Riešenie: n–tý člen radu je rovný $a_n = \frac{3(n+2)!}{5^n}$ a $(n+1)$ člen radu je rovný $a_{n+1} = \frac{3(n+3)!}{5^{n+1}}$. Na základe D'Alembertovho kritéria dostávame

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3(n+3)(n+2)!}{5^n 5}}{\frac{3(n+2)!}{5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{5} = \infty > 1.$$

Z toho vyplýva, že daný číselný rad diverguje.

Príklad 1.9. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{2n^n}{(n-1)!}$.

Riešenie: n–tý člen radu je rovný $a_n = \frac{2n^n}{(n-1)!}$ a $(n+1)$ člen radu je rovný $a_{n+1} = \frac{2(n+1)^{n+1}}{n!}$. Na základe D'Alembertovho kritéria dostávame

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2(n+1)^n(n+1)}{n(n-1)!}}{\frac{2n^n}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\cancelto{1}{\frac{n+1}{n}}\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1e > 1.$$

Z toho vyplýva, že daný číselný rad diverguje.

Poznámka: Vzťah $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ poznáme z predmetu Matematika I.

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách vyšetrite pomocou D'Alembertovho kritéria konvergenciu radu:

50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{3}{8}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{3}{8}$, konverguje
51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{2}{3}$, konverguje
52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}\left(\frac{5}{7}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{5}{7}$, konverguje
53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}\left(\frac{6}{5}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{6}{5}$, diverguje
54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje
55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n-1}\left(\frac{7}{5}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{7}{5}$, diverguje
56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4n+2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{3}{5}$, konverguje
57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,.\,3^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{3}$, konverguje
58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{2}$, konverguje
59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2\,.\,3^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{3}$, konverguje
60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\,.\,3^n}{n+4}$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 3$, diverguje
61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(2n-1)\,2^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{2}$, konverguje
62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(n^2+1)\,2^n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{2}$, konverguje
63. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n+4)\,2^n}{n^2-1}$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 2$, diverguje
64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

65. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

66. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \,.\, 10^n.\, n!}{(n+1)!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 10$, diverguje

67. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n-1)!}{5^n\, n!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{3}{5}$, konverguje

68. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n\,(n+1)}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$, diverguje

69. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

70. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(n+1)!}{n^2-2}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$, diverguje

71. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

72. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \frac{(n-1)!}{n!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{2}{7}$, konverguje

73. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \frac{n}{(n+1)!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

74. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{4}$, konverguje

75. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

76. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

77. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$, diverguje

78. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{e}$, konverguje

79. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

80. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

81. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{2}{e}$, konverguje

82. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{3}{e}$, diverguje

83. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n\, n^2}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$, diverguje

84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,.\,10^n\,.\,n!}{(2n)!}$ $\quad \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2\,e^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{e}$, konverguje

86. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,3^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{e}{3}$, konverguje

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\,(n+1)!}{\left(\frac{1}{2}\right)^n (n+2)!}$ $\quad \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 6$, diverguje

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,n}{(n+1)!}$ $\quad \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,n^2}{2\,e^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{e}$, konverguje

90. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n\,(n-1)!}$ $\quad \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, konverguje

91. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{10^{n+1}}$ $\quad \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$, diverguje

92. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)!}{3\,.\,10^{n+2}}$ $\quad \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$, diverguje

Poznámka: Ak jednotlivé limity pri D'Alembertovom podielovom kritériu sú rovné 1, potom pomocou tohto kritéria nevieme rozhodnúť, či daný rad je konvergentný alebo divergentný. Musíme teda použiť iné kritérium.

Veta 1.4. ***Cauchyho odmocninové kritérium***
Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečný číselný rad.*

(a) *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *tak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konvergentný.*

(b) *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *tak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentný.*

Príklad 1.10. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3n+2}$.

Riešenie: n–tý člen radu je rovný $a_n = \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3n+2} > 0$. Na základe Cauchyho odmocninového kritéria dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{\frac{3n+2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3+\frac{2}{n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^3 . \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^3 . \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{\frac{2}{n}} =$$
$$= \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{8}{125} < 1.$$

Z toho vyplýva, že daný číselný rad konverguje.

Príklad 1.11. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n^2}$.

Riešenie: n–tý člen radu je rovný $a_n = \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n^2}$. Na základe Cauchyho odmocninového kritéria dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(1+\frac{4}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{4}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{e^4}{e^1} = e^3 > 1.$$

Z toho vyplýva, že daný číselný rad diverguje.

Poznámka: Vzťah $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$, $k \in R$ poznáme z predmetu Matematika I.

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách vyšetrite pomocou Cauchyho odmocninového kritéria konvergenciu radu:

93. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}$ — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{4}$, konverguje

94. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}}\right)$ — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{13}{36}$, konverguje

95. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n$ — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$, konverguje

96. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{2n-5}\right)^n$ — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$, diverguje

97. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{4n-2}\right)^n$ — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{4}$, konverguje

98. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{2n+1}\right)^{n}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{5}{2}$, diverguje

99. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^{n}\frac{1}{n}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, konverguje

100. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{2n-1}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{4}{9}$, konverguje

101. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n+2}{2n-1}\right)^{\frac{n}{2}+3}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=2$, diverguje

102. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{2n+1}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{9}$, konverguje

103. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{2n-1}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{4}{9}$, konverguje

104. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{3n-1}\right)^{n+3}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{4}{3}$, diverguje

105. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10n+3}{n-2}\right)^{3n+1}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=10^3$, diverguje

106. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{3n^2+2}\right)^{2n+2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{9}$, konverguje

107. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-2}\right)^{n+1}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{2}{3}$, konverguje

108. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^3+n}{2n^3-1}\right)^{\frac{n}{2}}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt{\frac{5}{2}}$, diverguje

109. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{e}$, konverguje

110. $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n-2}\right)^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=e^7$, diverguje

111. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{e^4}$, konverguje

112. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{2n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=e^{10}$, diverguje

113. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$, diverguje

114. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{e}{3}$, konverguje

115. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{6e^2}{5}$, diverguje

116. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{2}{7}\,e$, konverguje

117. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^{n^2}}{3^n\ n^{n^2}}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3e^2}$, konverguje

118. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{3^n\ n^{n^2}}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{e}{3}$, konverguje

119. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\ (n+2)^{n^2}}{3^n\ (n+1)^{n^2}}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3}\, e$, diverguje

Poznámka: Ak jednotlivé limity pri Cauchyho odmocninovom kritériu sú rovné 1, potom pomocou tohto kritéria nevieme rozhodnúť, či daný rad je konvergentný alebo divergentný. Musíme teda použiť iné kritérium.

Veta 1.5. ***Cauchyho integrálne kritérium***

Nech pre rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *existuje spojitá funkcia* $f(x)$ *nerastúca na* $\langle K, \infty)$ *a nech* $\forall n > K$: $f(n) = |a_n|$.

(a) Ak $\int\limits_K^{\infty} f(x)dx < \infty$, *tak je rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *absolútne konvergentný.*

(b) Ak $\int\limits_K^{\infty} f(x)dx = \infty$, *tak rad je* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *divergentný.*

Príklad 1.12. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-9}$.

Riešenie: Položme $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$. Definičný obor tejto funkcie je $D(f) = R - \{\pm 3\}$. Funkcia je teda spojitá na intervale $\langle 4, \infty)$. Je zrejmé, že pre každé $n \geqq 4$ je $f(n) = \frac{1}{n^2-9} = |a_n|$. Pretože $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-9)^2} < 0$, je funkcia $f(x)$ klesajúca na intervale $\langle 4, \infty)$ a možno teda použiť Cauchyho integrálne kritérium. Platí

$$\int\limits_4^{\infty} \frac{1}{x^2-9}\, dx = -\int\limits_4^{\infty} \frac{1}{9-x^2}\, dx = -\lim_{a\to\infty} \int\limits_4^{a} \frac{1}{9-x^2}\, dx = -\frac{1}{6} \lim_{a\to\infty} \left[\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|\right]_4^a =$$

$$= -\frac{1}{6} \lim_{a\to\infty} \left(\ln \left| \cancelto{-1}{\frac{3+a}{3-a}} \right| - \ln\left|\frac{3+4}{3-4}\right| \right) = -\frac{1}{6}\left(\ln|-1| - \ln|-7|\right) = -\frac{1}{6}(\ln 1 - \ln 7) = \frac{1}{6} \ln 7 \neq \infty.$$

Integrál je konvergentný. Z toho vyplýva, že daný číselný rad takisto konverguje.

Príklad 1.13. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n \ln n}$.

Riešenie: Položme $f(x) = \frac{3}{x \ln x}$. Definičný obor tejto funkcie je $D(f) = (0, \infty) - \{1\}$. Funkcia je teda spojitá na intervale $\langle 2, \infty)$. Je zrejmé, že pre každé $n \geqq 2$ je $f(n) = \frac{3}{n \ln n} = |a_n|$. Pretože $f'(x) = -\frac{3(1+\ln x)}{(x \ln x)^2} < 0$, je funkcia $f(x)$ klesajúca na intervale $\langle 2, \infty)$ a možno teda použiť Cauchyho integrálne kritérium. Platí

$$\int_2^\infty \frac{3}{x \ln x}\, dx = 3 \lim_{a \to \infty} \int_2^a \frac{1}{x \ln x}\, dx = 3 \lim_{a \to \infty} [\ln |\ln x|]_2^a =$$

$$= 3 \lim_{a \to \infty} (\ln |\ln a| - \ln |\ln 2|) = 3 \lim_{a \to \infty} \ln \left| \frac{\ln a}{\ln 2} \right| = 3 \,.\, \infty = \infty.$$

Integrál je divergentný. Z toho vyplýva, že daný číselný rad takisto diverguje.

Poznámka: Z Matematiky II vieme, že ak výsledok nevlastného integrálu je vlastné číslo, tak je integrál konvergentný a ak výsledok nevlastného integrálu je nevlastné číslo, tak je integrál divergentný.

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách vyšetrite pomocou Cauchyho integrálneho kritéria konvergenciu radu:

120. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+3}$ — diverguje
121. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3n-5}$ — diverguje
122. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+1}$ — diverguje
123. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n+7}$ — diverguje
124. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{1+n^2}$ — diverguje
125. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$ — diverguje
126. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{n^2-1}$ — diverguje
127. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$ — konverguje
128. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3}$ — konverguje
129. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$ — konverguje

130. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}}$ diverguje

131. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n^2-2}}$ diverguje

132. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ diverguje

133. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+9}{n^4}$ konverguje

134. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4-7n^2+2}{n^6}$ konverguje

135. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{2n\,\ln n}$ diverguje

136. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\,\ln^2 n}$ konverguje

137. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ diverguje

138. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$ konverguje

139. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$ diverguje

140. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ konverguje

Definícia 1.7. *Rad* $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, *kde* $a_n > 0$ *pre* $\forall n \in N$, *nazývame* ***radom so striedavými znamienkami (alternujúcim radom)***.

Veta 1.6. ***Leibnizovo kritérium***

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *je rad so striedavými znamienkami. Nech postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerastúca. Potom rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *je konvergentný práve vtedy, ak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Príklad 1.14. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

Riešenie: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2n}}$ je rad so striedavými znamienkami, kde $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Naviac platí

$\forall n \in N$: $n < n+1 \Rightarrow 2n < 2(n+1) \Rightarrow \sqrt{2n} < \sqrt{2(n+1)} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2n}} > \dfrac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \Rightarrow a_n > a_{n+1}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pre $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ je klesajúca, z čoho vyplýva, že je aj nerastúca. Na základe toho je možné použiť Leibnizovo kritérium. Keďže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0$, podľa Leibnizovho kritéria je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2n}}$ konvergentný.

Príklad 1.15. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n-3}$.

Riešenie: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n-3}$ je rad so striedavými znamienkami, kde $a_n = \frac{n}{2n-3}$. Člen a_n vieme upraviť na tvar $a_n = \frac{n}{2n-3} = \frac{n}{n(2-\frac{3}{n})} = \frac{1}{2-\frac{3}{n}}$. Naviac platí

$$\forall n \in N, n > 1\colon n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow -\frac{3}{n} < -\frac{3}{n+1} \Rightarrow 2 - \frac{3}{n} < 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2-\frac{3}{n}} > \frac{1}{2-\frac{3}{n+1}} \Rightarrow a_n > a_{n+1}.$$

Postupnosť $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ pre $a_n = \frac{n}{2n-3}$ je klesajúca, z čoho vyplýva, že je aj nerastúca. Na základe toho je možné použiť Leibnizovo kritérium. Keďže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2} \neq 0$, podľa Leibnizovho kritéria je rad $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n-3}$ divergentný.

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách vyšetrite pomocou Leibnizovho kritéria konvergenciu radu:

141. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, konverguje

142. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{\ln(2n+1)}$ — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, konverguje

143. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n+1}$ — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, diverguje

144. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, konverguje

145. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, konverguje

146. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n}$ — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, diverguje

147. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}(2n)}{3n-1}$ — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$, diverguje

148. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ — $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, konverguje

149. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} n^3}{3^n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, konverguje

150. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \dfrac{\pi}{2^n}$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, konverguje

Definícia 1.8. *Majme rady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *pričom* $b_n \geqq 0$ *pre všetky* $n \in N$. *Rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *nazývame* ***majorantný rad k radu*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazývame* ***minorantný rad k radu*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *ak pre každé* $n \in N$ $|a_n| \leqq b_n$.

Veta 1.7. ***Majorantné porovnávacie kritérium***

Majme rady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *kde* $0 \leqq a_n \leqq b_n$ *pre* $n = 1, 2, \ldots$.

Ak majorantný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, tak konverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak minorantný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje, tak diverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Veta 1.8. ***Limitné porovnávacie kritérium***

Nech pre každé $n \in N$ *je* $a_n \geqq 0$ *a* $b_n > 0$.

(a) *Ak existuje vlastná limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *a rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, tak konverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) *Ak existuje vlastná limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *rôzna od nuly alebo je táto limita nevlastná a rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguje, tak diverguje aj rad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Poznámka: Použitie porovnávacieho kritéria vyžaduje skúsenosti na skonštruovanie majorantného resp. minorantného radu na základe hypotézy o konvergencii, resp. divergencii vyšetrovaného radu. Často sa používa na toto porovnávanie zovšeobecnený harmonický rad.

Príklad 1.16. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2+4n}$.

Riešenie: n–tý člen radu je rovný $a_n = \frac{n+1}{n^2+4n}$. Skúsime porovnať daný rad s harmonickým radom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, o ktorom vieme, že je divergentný. Teda položíme $b_n = \frac{1}{n}$. Keďže platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2+4n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+4n} = 1 \neq 0.$$

Podľa limitného porovnávacieho kritéria je aj rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+4n}$ divergentný.

Príklad 1.17. *Vyšetrime konvergenciu radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+4n}{2n^5-3n+2}$.

Riešenie: n–tý člen radu je rovný $a_n = \frac{n^2+4n}{2n^5-3n+2}$. Skúsime porovnať daný rad s radom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, o ktorom vieme, že je konvergentný. Teda položíme $b_n = \frac{1}{n^3}$. Keďže platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+4n}{2n^5-3n+2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n^2+4n)}{2n^5-3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+4n^4}{2n^5-3n+2} = \frac{1}{2}.$$

Táto limita je vlastná a podľa limitného porovnávacieho kritéria je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n}{2n^5-3n+2}$ konvergentný.

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách vyšetrite pomocou porovnávacieho kritéria konvergenciu radu:

151. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n+3}$ diverguje
152. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2}{3n-5}$ diverguje
153. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{2n+1}$ diverguje
154. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{4n+7}$ diverguje
155. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{1+n^2}$ diverguje
156. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+3}$ diverguje
157. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3n}{n^2-1}$ diverguje
158. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2+3}$ konverguje
159. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3}{n^2-4}$ konverguje
160. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+9}{n^4}$ konverguje
161. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4-7n^2+2}{n^6}$ konverguje
162. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n^{3,6}}$ konverguje

163. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n^3}}$ konverguje

164. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ diverguje

165. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n^3}}$ diverguje

166. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{5}{7}\right)^n$ konverguje

167. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{7}{5}\right)^n$ diverguje

168. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ konverguje

169. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6}\,\frac{2^{n+1}}{4^n}$ konverguje

170. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}\,\frac{3^n}{2^{n-1}}$ diverguje

2 Funkcionálne a mocninové rady

Definícia 2.1. *Nech* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť funkcií definovaných na intervale* $\langle a, b\rangle$*, potom výraz* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *nazývame* ***nekonečný funkcionálny rad****.*

Poznámka: Pre vyšetrenie konvergencie funkcionálnych radov môžeme použiť D'Alembertovo podielové alebo Cauchyho odmocninové kritérium v upravenom tvare.
Teda ak $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}| < 1$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1$, tak funkcionálny rad konverguje v x.

Definícia 2.2. *Ak* $f_n(x) = a_n(x-a)^n$*, rad* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *nazývame* ***mocninový rad so stredom v bode a****.*

Pre každý mocninový rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nastáva jeden z prípadov:

- rad konverguje len v bode $x = a \Rightarrow \rho = 0$,
- rad konverguje pre $\forall x \in R \Rightarrow \rho = \infty$,
- $\exists \rho > 0$, že na intervale $(a-\rho, a+\rho)$ daný rad konverguje a na množine $R/\langle a-\rho, a+\rho\rangle$ daný rad diverguje.

Číslo ρ sa nazýva ***polomer konvergencie*** a interval $(a-\rho, a+\rho)$ označuje ***interval konvergencie (IK)***.
Ak existuje $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lambda$ resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, tak pre polomer konvergencie mocninového radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ platí

- $\rho = \frac{1}{\lambda}$ pre $0 < \lambda < \infty$,
- $\rho = \infty$ pre $\lambda = 0$,
- $\rho = 0$ pre $\lambda = \infty$.

Poznámka: Interval konvergencie $(a-\rho, a+\rho)$ je otvorený. Ak vyšetríme konvergenciu aj v krajných bodoch, môže tento interval ostať otvorený, môže sa zmeniť na polouzavretý, resp. uzavretý. V takom prípade novovzniknutý interval budeme označovať ako **obor konvergencie (OK)**.

Príklad 2.1. *Nájdime polomer konvergencie mocninového radu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)}$.

Riešenie:
Na určenie polomeru konvergencie mocninového radu použijeme D'Alembertovo kritérium. Vidíme, že $a_n = \frac{1}{3^n(n+1)(n+2)}$ a $a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}$. Potom

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{3^n(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{3(n+3)} = \frac{1}{3}.$$

Podľa Definície 2.2 je polomer konvergencie $\rho = \frac{1}{\lambda} = 3$.

Príklad 2.2. *Nájdime polomer konvergencie mocninového radu* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n 4^n}{n}$.

Riešenie: Na určenie polomeru konvergencie mocninového radu použijeme Cauchyho odmocninové kritérium a využijeme vzťah $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Platí

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{4^n}{n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{n}} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 4.$$

Podľa Definície 2.2 je polomer konvergencie $\rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}$.

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách určte polomer konvergencie mocninového radu:

171. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ — 1
172. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} (x-1)^n$ — 1
173. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ — ∞
174. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ — 0
175. $\sum_{n=1}^{\infty} n\, 5^n\, x^n$ — $\frac{1}{5}$
176. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ — $\frac{1}{2}$
177. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} x^n$ — $\frac{1}{5}$

178. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{x^n}{n}$ $\qquad \frac{3}{2}$

179. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n}{(n+1)\, 3^n}\, x^n$ $\qquad \frac{3}{2}$

180. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\, 3^n}\, (x+1)^n$ $\qquad 3$

181. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}\, x^n$ $\qquad \infty$

182. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{(2n-1)!}$ $\qquad \infty$

183. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n}}\, x^n$ $\qquad \frac{1}{10}$

184. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{\sqrt{n+1}}\, x^n$ $\qquad \frac{1}{100}$

185. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n}}\, x^n$ $\qquad \frac{\sqrt{2}}{3}$

186. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n\, (x+3)^n$ $\qquad 0$

187. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n}\, x^n$ $\qquad e$

188. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, x^n$ $\qquad \frac{1}{e}$

189. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, (x-2)^n$ $\qquad e$

190. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!\, n^n}\, x^n$ $\qquad \frac{4e}{27}$

191. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2\, x^n}{(2n)!}$ $\qquad 4$

Príklad 2.3. *Nájdime obor konvergencie mocninového radu* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)}$.

Riešenie: Riešenie tejto úlohy urobíme dvoma spôsobmi.

Riešenie spôsobom A: Použijeme D'Alembertovo kritérium pre konvergenciu funkcionálnych radov. Vidíme, že $f_n(x) = \frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)}$ a $f_{n+1}(x) = \frac{(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}}{\frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)}{3(n+3)}(x+2) \right| = \frac{1}{3}|x+2|.$$

Podľa D'Alembertovho kritéria je rad konvergentný vtedy, ak platí $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| < 1$. Pre daný rad teda musí platiť podmienka $\frac{1}{3}|x+2| < 1$, z čoho dostávame

$$\frac{1}{3}|x+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{3}(x+2) < 1 \Leftrightarrow -3 < x+2 < 3 \Leftrightarrow -5 < x < 1.$$

Pre všetky $x \in (-5,1)$ rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)}$ konverguje.

Z toho vyplýva, že interval konvergencie je $IK = (-5,1)$. Ešte musíme vyšetriť konvergenciu radu v krajných bodoch intervalu konvergencie. K tomu použijeme kritériá konvergencie číselných radov.

1. Pre $x = -5$ dostaneme číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}.$$

   Dostávame rad so striedavými znamienkami, kde $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ a podľa Leibnizovho kritéria zistíme, či daný rad konverguje. O postupnosti $\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ vieme, že je nerastúca a pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ je konvergentný.

2. Pre $x = 1$ dostaneme číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

   Daný číselný rad má súčet $s = \frac{1}{2}$ (pozri Príklad 1.1) a teda je konvergentný.

Obor konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)}$ je interval $\langle -5, 1\rangle$.

Riešenie spôsobom B: Vyšetrovaný rad je mocninový. Vidíme, že stred radu je $a = -2$. Na určenie polomeru konvergencie mocninového radu použijeme D'Alembertovo kritérium. Vidíme, že $a_n = \frac{1}{3^n(n+1)(n+2)}$ a $a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}$. Potom

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{3^n(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{3(n+3)} = \frac{1}{3}.$$

Polomer konvergencie je $\rho = \frac{1}{\lambda} = 3$.

Interval konvergencie je $(a-\rho, a+\rho) = (-2-3, -2+3) = (-5, 1)$. Konvergenciu radu v krajných bodoch intervalu konvergencie určíme rovnako ako v Riešení spôsobom A.

Obor konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)}$ je interval $\langle -5, 1\rangle$.

Príklad 2.4. *Nájdime obor konvergencie mocninového radu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n\, 4^n}{n}$.

Riešenie: Daný mocninový rad má stred v bode $a = 0$ a $a_n = \frac{4^n}{n}$. Cauchyho odmocninové kritérium použijeme na určenie polomeru konvergencie mocninového radu a využijeme vzťah $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Platí

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{4^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{n}} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 4.$$

Polomer konvergencie $\rho = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}$.

Interval konvergencie je $(a-\rho, a+\rho) = (0 - \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4}) = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Ešte musíme vyšetriť konvergenciu radu v krajných hodnotách a k tomu použijeme kritériá konvergencie číselných radov.

1. Pre $x = -\frac{1}{4}$ dostaneme číselný rad

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

   Dostávame rad so striedavými znamienkami, kde $a_n = \frac{1}{n}$ a podľa Leibnizovho kritéria zistíme, či daný rad konverguje. O postupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ vieme, že je nerastúca a keďže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je konvergentný.

2. Pre $x = \frac{1}{4}$ dostaneme číselný rad

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

   Tento rad je harmonický rad, preto je divergentný.

Obor konvergencie radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n\, 4^n}{n}$ je interval $\left\langle -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$.

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách nájdite obor konvergencie funkcionálneho radu:

192. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n-1)!}$ $\qquad (-\infty, \infty)$

193. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n+2}$ $\qquad \{-2\}$

194. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\, 3^n}$ $\qquad \langle -3, 3)$

195. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{2n}}{9^n}$ $(-3, 3)$

196. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{2n}}{4^n}$ $(-2, 2)$

197. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ $(-1, 1)$

198. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$ $\langle -1, 1\rangle$

199. $\sum_{n=1}^{\infty} n\, 2^n\, (x-1)^n$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

200. $\sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n$ $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$

201. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$ $(-1, 1)$

202. $\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-nx}$ $(0, \infty)$

203. $\sum_{n=1}^{\infty} nx\, e^{-nx}$ $\langle 0, \infty)$

204. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$ $\left(\frac{1}{e}, e\right)$

V nasledujúcich úlohách nájdite obor konvergencie mocninového radu:

205. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, x^n$ $\langle -1, 1\rangle$

206. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)}\, (x-1)^n$ $\langle 0, 2)$

207. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(-\infty, \infty)$

208. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$ $\{0\}$

209. $\sum_{n=1}^{\infty} n\, 5^n\, x^n$ $\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$

210. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\, x^n$ $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

211. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}\, x^n$ $\left\langle -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$

212. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{x^n}{n}$ $\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

213. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n}{(n+1)\, 3^n}\, x^n$ $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

214. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\, 3^n}\, (x+1)^n$ $\langle -4, 2\rangle$

215. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}\, x^n$ $(-\infty, \infty)$

216. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{(2n-1)!}$ $(-\infty, \infty)$

217. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n}}\, x^n$ $\left\langle -\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$

218. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{\sqrt{n+1}}\, x^n$ $\left\langle -\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$

219. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n}}\, x^n$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

220. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n\, (x+3)^n$ $\{-3\}$

Veta 2.1 (Veta o derivovaní a integrovaní mocninového radu)**.** *Nech $\rho > 0$ je polomer konvergencie mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ a nech funkcia $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $x \in (a-\rho, a+\rho)$. Potom pre každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$ platí*

- $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n(x-a)^{n-1}$,
- $\int_a^x s(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

Príklad 2.5. *Derivovaním alebo integrovaním vhodného radu nájdime súčet radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$ na vhodnom intervale.*

Riešenie: Keďže platí $(x^n)' = nx^{n-1}$, môžeme napísať

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'.$$

Rad $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ je geometrický rad, kde $a_1 = x$, $q = x$, a teda tento rad je konvergentný pre $|x| < 1$. Potom súčet tohto geometrického radu je $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x}{1-x}$. Teda súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$ je rovný

$$s = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{pre } x \in (-1, 1).$$

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách derivovaním alebo integrovaním vhodného radu nájdite súčet daného radu na vhodnom intervale:

221. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ $\qquad \dfrac{1}{(1-x)^2}$

222. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n$ $\qquad \dfrac{2}{(1-x)^3}$

223. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5^n}\,x^{n-1}$ $\qquad \dfrac{5}{(5-x)^2}$

224. $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$ $\qquad \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

225. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n}\,(x-3)^{2n}$ $\qquad \ln|x-3|+\dfrac{1}{2}\ln\left|1-(x-3)^2\right|$

2.1 Taylorov rad

Definícia 2.3. *Nech funkcia $f(x)$ má v bode a derivácie všetkých rádov. Mocninový rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

*nazývame **Taylorov rad funkcie so stredom v bode a**.*

Uvedieme rozvoj niektorých funkcií do Taylorovho radu so stredom v bode $a=0$:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \text{pre} \quad x\in R,$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad \text{pre} \quad x\in(-1,1\rangle,$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pre} \quad x\in R,$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pre} \quad x\in R.$$

Príklad 2.6. *Rozviňme funkciu $f(x) = x\ln(1+x^2)$ do Taylorovho radu.*

Riešenie: Ak namiesto x dosadíme x^2 do vzťahu $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, dostaneme

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}.$$

Potom vynásobíme obe strany x a úpravou dostaneme

$$x\ln(1+x^2) = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n} \quad \text{pre} \quad x \in (-1, 1\rangle.$$

Príklad 2.7. *Nájdime prvé tri členy rozvoja funkcie $f(x) = x\,e^x$ do Taylorovho radu v bode $a = 0$.*

Riešenie: Z definície Taylorovho radu vyplýva

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3.$$

Keďže platí

$$f(x) = x\,e^x \Rightarrow f(0) = 0,$$

$$f'(x) = e^x + x\,e^x \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = e^x + e^x + x\,e^x = 2e^x + x\,e^x \Rightarrow f''(0) = 2,$$

$$f'''(x) = 2e^x + e^x + x\,e^x = 3e^x + x\,e^x \Rightarrow f'''(0) = 3,$$

rozvoj funkcie $f(x) = x\,e^x$ do Taylorovho radu v bode $a = 0$ je

$$x\,e^x \approx 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3.$$

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách pomocou základných mocninových radov určte Taylorov rad danej funkcie so stredom v bode $a = 0$:

226. $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ $\qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n\,n!}$

227. $f(x) = e^{2x}$ $\qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$

228. $f(x) = e^{-2x}$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}\, x^n$

229. $f(x) = x\, e^x$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$

230. $f(x) = 3xe^{2x}$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} 3\, \frac{2^n}{n!}\, x^{n+1}$

231. $f(x) = x^2\, e^{-2x}$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}\, x^{n+2}$

232. $f(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^{n-1}\, n!}$

233. $f(x) = x^2\, e^{-x^2}$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n+2}$

234. $f(x) = x^3\, e^x$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n!}$

235. $f(x) = x^3\, e^{-x}$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{n+3}$

236. $f(x) = x\, \ln(1+x)$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^{n+1}$

237. $f(x) = x^2\, \ln(1+x)$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^{n+2}$

238. $f(x) = \ln(1+x^3)$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^{3n}$

239. $f(x) = x\, \ln(1+x^3)$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^{3n+1}$

240. $f(x) = x\, \sin x$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+2}$

240. $f(x) = x^2\, \cos x$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n+2}$

241. $f(x) = \sin x^2$ $\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{4n+2}$

2.2 Fourierov rad

Definícia 2.4. *Nech $f(x)$, $x \in \langle -l, l\rangle$ je po častiach spojitá, periodická funkcia s periódou $T = 2l$. Trigonometrický rad*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

kde

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx,$$

$n = 1, 2, \dots,$ *nazývame* ***Fourierov rad funkcie*** $f(x)$ *a píšeme*

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right).$$

Koeficienty a_0*,* a_n *a* b_n *nazývame* ***Fourierove koeficienty****.*

Definícia 2.5. *Nech* $f(x)$*,* $x \in \langle -l, l \rangle$ *je po častiach spojitá, párna, periodická funkcia s periódou* $T = 2l$*. Trigonometrický rad*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l},$$

kde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx,$$

$n = 0, 1, \dots,$ *nazývame* ***kosínusový Fourierov rad funkcie*** $f(x)$*.*

Definícia 2.6. *Nech* $f(x)$*,* $x \in \langle -l, l \rangle$ *je po častiach spojitá, nepárna, periodická funkcia s periódou* $T = 2l$*. Trigonometrický rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

kde

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

$n = 1, 2, \dots,$ *nazývame* ***sínusový Fourierov rad funkcie*** $f(x)$*.*

V praxi sa stretávame s dejmi, ktoré sa pravidelne opakujú. Sú to tzv. periodické deje, ktoré možno popísať periodickými funkciami. Ak $f(x)$ je periodická funkcia s periódou T, tak $\forall a \in D(f)$ platí

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Fourierove rady sú funkcionálne rady, ktorými popisujeme periodicky sa opakujúce deje. Ak chceme pomocou kosínusového resp. sínusového Fourierovho radu vyjadriť po častiach spojitú funkciu $f(x)$, ktorá nie je ani párna ani nepárna, musíme ju najprv párne resp. nepárne predĺžiť:

- ***Párne predĺženie*** funkcie $f(x)$ z intervalu $\langle 0, l\rangle$ na interval $\langle -l, l\rangle$ sa nazýva funkcia

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pre } \ x \in \langle 0, l\rangle, \\ f(-x) & \text{pre } \ x \in \langle -l, 0\rangle. \end{cases}$$

- ***Nepárne predĺženie*** funkcie $f(x)$ z intervalu $\langle 0, l\rangle$ na interval $\langle -l, l\rangle$ sa nazýva funkcia

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pre } \ x \in (0, l\rangle, \\ 0 & \text{pre } \ x = 0, \\ -f(-x) & \text{pre } \ x \in \langle -l, 0). \end{cases}$$

Poznámka: Pri výpočte koeficientov Fourierovho radu často používame tieto integračné vzorce $\int \cos(kx)\,dx = \frac{\sin(kx)}{k}$, resp. $\int \sin(kx)\,dx = -\frac{\cos(kx)}{k}$, $k \in R$.

Príklad 2.8. *Nájdime Fourierov rad funkcie $f(x) = x + 1$ na intervale $x \in \langle -1, 1\rangle$.*

Riešenie: Zo zadania vyplýva, že perióda je $T = 2 \Rightarrow l = 1$. Funkcia $f(x) = x + 1$ nie je na intervale $x \in \langle -1, 1\rangle$ ani párna ani nepárna a pre $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \int_{-1}^{1} (x+1)\,\cos(\pi n x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x+1 & u' = 1 \\ v' = \cos(\pi n x) & v = \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n} \end{array} \right| =$$

$$= \left[(x+1)\,\frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n}\,dx = -\left[-\frac{\cos(\pi n x)}{\pi^2 n^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{\cos(-\pi n)}{\pi^2 n^2} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \int_{-1}^{1}(x+1)\,\sin(\pi n x)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x+1 & u' = 1 \\ v' = \sin(\pi n x) & v = -\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n} \end{array} \right| =$$

$$= \left[-(x+1)\,\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\,dx = -\frac{2\,(-1)^n}{\pi n} + \left[\frac{\sin(\pi n x)}{\pi^2 n^2}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{2\,(-1)^n}{\pi n} = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

Dosadením do predpisu Fourierovho radu dostávame

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\,(-1)^{n+1}}{\pi n}\right]\sin(\pi n x).$$

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách nájdite Fourierov rad funkcie na danom intervale:

242. $f(x) = x,\ x \in \langle -1, 1\rangle$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x)$

243. $f(x) = x,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ $\qquad \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$

244. $f(x) = 2x,\ x \in \langle -\pi, \pi\rangle$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)$

245. $f(x) = \frac{x}{2},\ x \in \langle -\pi, \pi\rangle$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$

246. $f(x) = \frac{x}{2},\ x \in \langle 0, \pi\rangle$ $\qquad \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\sin(2nx)$

247. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x \in \langle -\pi, 0) \\ 1, & \text{pre } x \in (0, \pi\rangle \end{cases}$ $\qquad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right]\sin(nx)$

248. $f(x) = \begin{cases} \pi - x, & \text{pre } x \in \langle -\pi, 0) \\ 0, & \text{pre } x \in (0, \pi\rangle \end{cases}$

$$\frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{2(-1)^n - 1}{n}\sin(nx)\right]$$

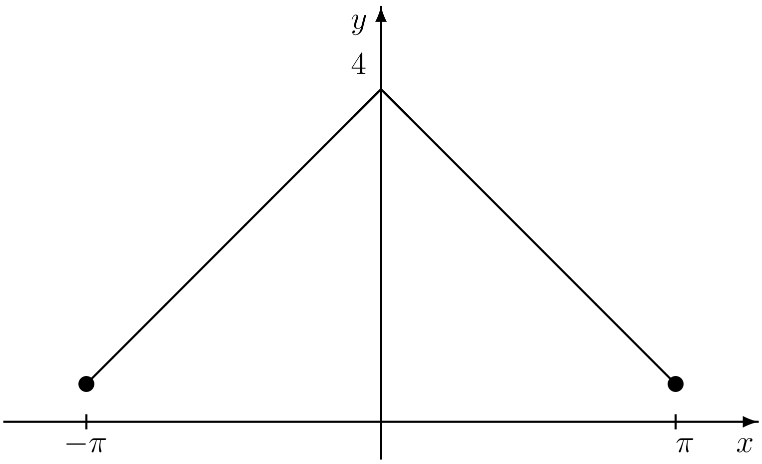
249. $f(x) = |x|,\ x \in \langle -\pi, \pi\rangle$ $\qquad \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos(nx)$

250. $f(x) = x^2,\ x \in \langle -\pi, \pi\rangle$ $\qquad \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx)$

Príklad 2.9. *Rozviňme funkciu $f(x) = 4 - x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ do kosínusového Fourierovho radu.*

Riešenie: Pretože hľadáme kosínusový Fourierov rad, musíme funkciu $f(x)$ najprv dodefinovať tak, aby bola na rozšírenom intervale párna. Dostávame párnu funkciu

$$f_p(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{pre } \ x \in \langle 0, \pi \rangle, \\ 4 + x & \text{pre } \ x \in \langle -\pi, 0 \rangle. \end{cases}$$



Obr. 1: Graf funkcie $f_p(x)$

Takto dodefinovaná funkcia má periódu $T = 2\pi \ \Rightarrow \ l = \pi$ a pre $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (4 - x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(4\pi - \frac{\pi^2}{2}\right) = 8 - \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (4 - x)\,\cos\frac{\pi n x}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (4 - x)\,\cos(nx)\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 4 - x & u' = -1 \\ v' = \cos(nx) & v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\left[(4 - x)\,\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(\pi n)}{n^2} + \frac{\cos 0}{n^2}\right) = \frac{2}{\pi n^2}[1 - (-1)^n],$$

$$b_n = 0.$$

Dosadením do predpisu kosínusového Fourierovho radu dostávame

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} = \frac{8 - \pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}[1 - (-1)^n]\cos(nx).$$

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách rozviňte funkciu $f(x)$ do kosínusového radu:

251. $f(x) = x,\ x \in \langle 0, 1\rangle$ $\qquad \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{(\pi\, n)^2}[(-1)^n - 1]\cos(n\pi x)$

252. $f(x) = \dfrac{x}{2},\ x \in \langle 0, \pi\rangle$ $\qquad \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\pi\, n^2}[(-1)^n - 1]\cos(nx)$

253. $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2},\ x \in \langle 0, \pi\rangle$ $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\pi\, n^2}[(-1)^{(n+1)} + 1]\cos(nx)$

254. $f(x) = x^2,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$ $\qquad \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nx)$

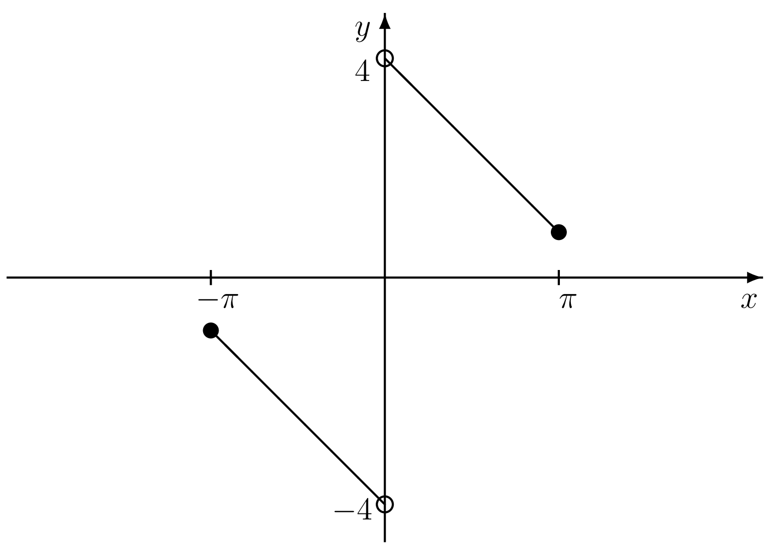
255. $f(x) = x(\pi - x),\ x \in \langle 0, \pi\rangle$ $\qquad \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}[(-1)^{n+1} - 1]\cos(nx)$

256. $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2},\ x \in \langle 0, 2\rangle$ $\qquad \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{(\pi\, n)^2}[(-1)^{n+1} - 1]\cos\dfrac{n\pi x}{2}$

Príklad 2.10. *Rozviňme funkciu $f(x) = 4 - x$, $x \in \langle 0, \pi\rangle$ do sínusového Fourierovho radu.*

Riešenie: Pretože hľadáme sínusový Fourierov rad, musíme funkciu $f(x)$ najprv dodefinovať tak, aby bola na rozšírenom intervale nepárna. Dostávame nepárnu funkciu

$$f_n(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{pre } \ x \in (0, \pi\rangle, \\ 0 & \text{pre } \ x = 0, \\ -4 - x & \text{pre } \ x \in \langle -\pi, 0). \end{cases}$$



Obr. 2: Graf funkcie $f_n(x)$

Takto dodefinovaná funkcia má periódu $T = 2\pi \;\Rightarrow\; l = \pi$ a pre $n = 1, 2, \dots$ platí

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (4-x)\,\sin\frac{\pi n x}{\pi}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (4-x)\,\sin(nx)\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u = 4-x & u' = -1 \\ v' = \sin(nx) & v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{array}\right| = \frac{2}{\pi}\left[-(4-x)\,\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(\pi-4)\,\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{4}{n}\right] - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi n}\left[(\pi-4)\,(-1)^n + 4\right].$$

Dosadením do predpisu sínusového Fourierovho radu dostávame

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left[(\pi-4)\,(-1)^n + 4\right]\sin(nx).$$

V nasledujúcich úlohách rozviňte funkciu $f(x)$ do sínusového radu:

257. $f(x) = x,\; x \in \langle 0, 1\rangle$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x)$

258. $f(x) = \frac{x}{2},\; x \in \langle 0, \pi\rangle$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$

259. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2},\; x \in \langle 0, \pi\rangle$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}[(-1)^n + 1]\sin(nx)$

260. $f(x) = x^2,\; x \in \langle 0, \pi\rangle$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left[\frac{2(-1)^n - 2}{n^3} - \frac{\pi^2(-1)^n}{n}\right]\sin(nx)$

261. $f(x) = x(\pi - x),\; x \in \langle 0, \pi\rangle$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}[1 - (-1)^n]\sin(nx)$

262. $f(x) = x - \frac{x^2}{2},\; x \in \langle 0, 2\rangle$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(\pi\, n)^3}[(-1)^{(n+1)} + 1]\sin\frac{n\pi x}{2}$

3 Diferenciálne rovnice

Definícia 3.1. ***Diferenciálnou rovnicou*** n***–tého rádu*** *nazývame rovnicu*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

pričom $y = y(x)$ *je neznáma funkcia.*

Definícia 3.2. ***Riešením diferenciálnej rovnice*** $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ *na intervale* I *nazývame každú* n*–krát diferencovateľnú funkciu* $y = \varphi(x)$*,* $x \in I$*, pre ktorú platí*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)})(x) = 0.$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice n–tého rádu *môžeme napísať v tvare* $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$*, kde* $c_1, c_2, \dots, c_n$ *sú nezávislé konštanty.*

Poznámka: Počet konštánt je rovnaký ako rád diferenciálnej rovnice. Ak za jednotlivé konštanty dosadíme konkrétne čísla, hovoríme o ***partikulárnom riešení diferenciálnej rovnice***.

3.1 Diferenciálne rovnice prvého rádu so separovateľnými premennými

Definícia 3.3. *Diferenciálna rovnica tvaru*

$$\psi(y)\, dy = \varphi(x)\, dx,$$

kde funkcie $\varphi(x)$*,* $\psi(y)$ *sú spojité na intervale* I*, sa nazýva* ***diferenciálna rovnica so separovanými premennými***.

Diferenciálnu rovnicu so separovanými premennými formálne riešime nasledovne:

$$\int \psi(y)\, dy = \int \varphi(x)\, dx$$

(za predpokladu, že tieto integrály existujú).
Po vypočítaní integrálov dostávame riešenie danej diferenciálnej rovnice, ktoré môžeme vyjadriť v explicitnom ($y(x)$ je jednoznačne vyjadrené) alebo implicitnom tvare ($y(x)$ nie je možné jednoznačne vyjadriť).

Definícia 3.4. *Diferenciálna rovnica tvaru*

$$\varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy = \varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx$$

sa nazýva ***diferenciálna rovnica so separovateľnými premennými****.*

Poznámka: Ak platí $\psi_1(y)\,\varphi_2(x) \neq 0$, tak sa predchádzajúca diferenciálna rovnica dá upraviť na separovanú diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx.$$

Príklad 3.1. *Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice* $\frac{1}{x}\,y' = \frac{1}{1+x^2}$.

Riešenie: Najprv nahradíme $y' = \frac{dy}{dx}$, teda

$$\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Danú diferenciálnu rovnicu riešime metódou separácie premenných, t. j. obyčajne na ľavú stranu diferenciálnej rovnice presunieme všetky výrazy s premennou y a na pravej strane ponecháme zvyšok

$$dy = \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Diferenciálnu rovnicu sme upravili na požadovaný tvar a obe strany môžeme integrovať, čím dostávame

$$\int dy = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx,$$
$$\int dy = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx.$$

Po vypočítaní integrálov dostávame všeobecné riešenie danej diferenciálnej rovnice v tvare $y = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c,\ \ c \in \mathbb{R}$.

Príklad 3.2. *Nájdime partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice* $\cos^2 x\, y' = y\,\ln y$*, ak* $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e$.

Riešenie: Najprv nájdeme všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice. Postupujeme rovnako ako v Príklade 3.1, t. j. nahradíme $y' = \frac{dy}{dx}$. Pomocou separácie premenných upravujeme diferenciálnu rovnicu, ktorú následne integrujeme

$$\cos^2 x\,\frac{dy}{dx} = y\,\ln y,$$
$$\frac{1}{y\,\ln y}\,dy = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx,$$
$$\int \frac{1}{y\,\ln y}\,dy = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx.$$

Výpočtom integrálov dostávame všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice v tvare

$$\ln|\ln|y|| = \operatorname{tg} x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Dosadením začiatočnej podmienky $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e$ do všeobecného riešenia diferenciálnej rovnice vypočítame konkrétnu hodnotu konštanty c

$$\ln|\ln|e|| = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + c \quad\Rightarrow\quad 0 = 1 + c \quad\Rightarrow\quad c = -1.$$

Partikulárne riešenie danej diferenciálnej rovnice je $\ln|\ln|y|| - \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

Neriešené úlohy:

Riešte nasledujúce diferenciálne rovnice metódou separácie premenných:

1.	$y' = 3x^2 + 4x$	$y = x^3 + 2x^2 + c$
2.	$y' = e^{2x}$	$y = \frac{e^{2x}}{2} + c$
3.	$y' = x\,e^x$	$y = x\,e^x - e^x + c$
4.	$xy' = \ln x$	$y = \frac{\ln^2 x}{2} + c$
5.	$y' = y - 1$	$y = 1 + c\,e^x$
6.	$y' = e^{-y}$	$y = \ln|x + c|$
7.	$y' = 3y$	$y = c\,e^{3x}$
8.	$y' = e^{x-y}$	$y = \ln|e^x + c|$
9.	$y' = \dfrac{x^2 + x}{y + 1}$	$\frac{y^2}{2} + y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$
10.	$\dfrac{x}{y+1} - \dfrac{yy'}{x+1} = 0$	$3x^2 + 2x^3 - 3y^2 - 2y^3 + c = 0$
11.	$y' = \dfrac{6x - 9x^2}{2y + 4}$	$y^2 + 4y = 3x^2 - 3x^3 + c$
12.	$y\,y' + x = 1$	$y^2 = 2x - x^2 + c$
13.	$(1 + e^x)\,y\,y' = e^x$	$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + c$
14.	$y' \sin x - y\,\cos x = 0$	$y = c \sin x$
15.	$y' \sin y\,\cos x - \cos y\,\sin x = 0$	$\cos y = c \cos x$
16.	$\dfrac{1 + y^2}{1 + x^2} - y' = 0$	$y = \operatorname{tg}(c + \operatorname{arctg} x)$
17.	$x(1 + 2y) + (x^2 + 1)y' = 0$	$y = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{x^2+1} - 1\right)$
18.	$x\sqrt{1 + y^2} + y\,y'\sqrt{1 + x^2} = 0$	$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = c$
19.	$\dfrac{y'}{x} + e^y = 0$	$y = -\ln\left|\frac{x^2}{2} + c\right|$
20.	$y' = \dfrac{y}{(y + 1)e^{2x}}$	$y + \ln|y| = -\frac{e^{-2x}}{2} + c$
21.	$y - y^2 + xy' = 0$	$y = \frac{1}{1-cx}$

22. $(x^2+x)y'-y-1=0$ $\qquad y=\frac{cx}{x+1}-1$
23. $y'=(2-y)^2e^x$ $\qquad y=2-\frac{1}{e^x+c}$
24. $x^2\,e^y\,y'=x^3+x^3e^y$ $\qquad y=\ln\left|c\,e^{\frac{x^2}{2}}-1\right|$
25. $x\,y\,y'=(1+x^2)(1+y^2)$ $\qquad \ln(1+y^2)=\ln x^2+x^2+c$
26. $y\,\ln y+xy'=0$ $\qquad y=e^{\frac{c}{x}}$
27. $y'=2\sqrt{y}\ln x$ $\qquad y=(x\,\ln x-x+c)^2$
28. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y\,y'}{\sqrt{1-y^2}}=0$ $\qquad \sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}=c$
29. $(x+1)y'+xy=0$ $\qquad y=c(x+1)e^{-x}$
30. $e^x\sin^3 y+(1+e^{2x})\cos y\,y'=0$ $\qquad \operatorname{arctg} e^x-\frac{1}{2\sin^2 y}=c$
31. $\sin x\,\cos y+y'\operatorname{tg} y\,\cos x=0$ $\qquad \frac{1}{\cos y}=\ln|\cos x|+c$

V nasledujúcich úlohách nájdite metódou separácie premenných partikulárne riešenie rovnice, ktoré spĺňa danú začiatočnú podmienku, :

32. $y'=3x^2+4x,\ y(1)=3$ $\qquad y=x^3+2x^2$
33. $y'=e^{2x},\ y(0)=1$ $\qquad y=\frac{e^{2x}}{2}+\frac{1}{2}$
34. $y'=x\,e^x,\ y(1)=2$ $\qquad y=x\,e^x-e^x+2$
35. $xy'=\ln x,\ y(e)=\frac{7}{2}$ $\qquad y=\frac{\ln^2 x}{2}+3$
36. $y'=y-1,\ y(0)=2$ $\qquad y=1+e^x$
37. $y'=e^{-y},\ y(1)=0$ $\qquad y=\ln|x|$
38. $y'=3y,\ y(0)=2$ $\qquad y=2\,e^{3x}$
39. $y'=e^{x-y},\ y(1)=1$ $\qquad y=x$
40. $(1+e^x)\,y\,y'=e^x,\ y(0)=\sqrt{2\,\ln 2}$ $\qquad \frac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)$
41. $y'\sin y\,\cos x-\cos y\,\sin x=0,\ y(0)=\frac{\pi}{4}$ $\qquad \cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$
42. $y-y^2+xy'=0,\ y(2)=\frac{1}{5}$ $\qquad y=\frac{1}{1+2x}$
43. $y'=(2-y)^2e^x,\ y(0)=\frac{3}{2}$ $\qquad y=2-\frac{1}{e^x+1}$
44. $y\,\ln y+xy'=0,\ y(3)=e$ $\qquad y=e^{\frac{3}{x}}$
45. $(x+1)y'+xy=0,\ y(0)=1$ $\qquad y=(x+1)e^{-x}$
46. $y'\sin x-y\,\cos x=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ $\qquad y=\sin x$
47. $\dfrac{1+y^2}{1+x^2}-y'=0,\ y(0)=1$ $\qquad y=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg} x\right)$
48. $\dfrac{x}{1+y}-\dfrac{y\,y'}{1+x}=0,\ y(0)=1$ $\qquad 3x^2+2x^3-3y^2-2y^3+5=0$

3.2 Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu

Definícia 3.5. ***Lineárnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu s pravou stranou*** *nazývame rovnicu*

$$y' + p(x)\,y = q(x),$$

kde $p(x)$, $q(x)$ sú funkcie spojité na intervale I.

Poznámka: Ak $q(x) = 0$, tak diferenciálnu rovnicu $y' + p(x)\,y = 0$ nazývame ***lineárnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu bez pravej strany***. Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu bez pravej strany sa rieši separáciou premenných.

Riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou pozostáva z riešenia rovnice bez pravej strany a nejakého partikulárneho riešenia rovnice s pravou stranou. Ukážeme dva spôsoby riešenia uvedenej diferenciálnej rovnice.

Spôsob A: Riešenie hľadáme nasledujúcim spôsobom:

1. Vyriešime lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu bez pravej strany (t. j. položíme pravú stranu rovnú nule). Jej riešenie vyjadríme v tvare $y = c\,f(x)$, kde c je integračná konštanta, $c \in \mathbb{R}$.

2. Použijeme metódu variácie konštanty, t. j. konštantu c nahradíme funkciou $c(x)$, a hľadáme riešenie v tvare $y = c(x)\,f(x)$.

3. Zderivujeme y, čím dostávame $y' = c'(x)\,f(x) + c(x)\,f'(x)$.

4. Dosadíme y, y' do pôvodnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou a vypočítame jej všeobecné riešenie (potrebujeme určiť $c(x)$).

5. V prípade, že diferenciálna rovnica bola zadaná pomocou začiatočnej podmienky, určíme konštantu c (podobne ako v Príklade 3.2) a zapíšeme partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice.

Spôsob B: Diferenciálnu rovnicu

$$y' + p(x)\,y = q(x),$$

vynásobíme tzv. integračným faktorom $IF = e^{\int p(x)\,dx}$ a dostaneme

$$y' \cdot e^{\int p(x)\,dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,y = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}.$$

Všimnime si, že ľavá strana takto upravenej rovnice predstavuje deriváciu súčinu hľadaného riešenia a integračného faktora

$$[y \cdot e^{\int p(x)\,dx}]' = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}.$$

Integrovaním oboch strán vzniknutej rovnice dostaneme

$$y \cdot e^{\int p(x)\,dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Prenásobením oboch strán rovnice výrazom $e^{-\int p(x)\,dx}$ eliminujeme hľadané riešenie y

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c \cdot e^{-\int p(x)\,dx},\ c \in \mathbb{R}.$$

Príklad 3.3. *Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice* $y' - 5y = 2x$.

Riešenie spôsobom A: Najprv riešime diferenciálnu rovnicu bez pravej strany $y' - 5y = 0$ využitím separácie premenných

$$\frac{dy}{dx} = 5y \ \Rightarrow\ \frac{dy}{y} = 5dx \ \Rightarrow\ \int \frac{dy}{y} = \int 5dx.$$

Po vypočítaní integrálov dostávame

$$\ln|y| = 5x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ |y| = e^{5x+c_1} \ \Rightarrow\ |y| = e^{5x}e^{c_1} \ \Rightarrow\ y = c\,e^{5x},\ c \in \mathbb{R}.$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice bez pravej strany je $y = c\,e^{5x}$. Riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou nájdeme metódou variácie konštanty. Riešenie hľadáme v tvare $y = c(x)\,e^{5x}$, pričom takto zvolené riešenie a jeho prvá derivácia $y' = c'(x)\,e^{5x} + c(x)\,5\,e^{5x}$ musia vyhovovať zadanej diferenciálnej rovnici. Dosadením týchto výrazov do diferenciálnej rovnice a následnými úpravami dostaneme hľadanú funkciu $c(x)$

$$\begin{aligned}
c'(x)\,e^{5x} + c(x)\,5\,e^{5x} - 5\,c(x)\,e^{5x} &= 2x,\\
c'(x)\,e^{5x} &= 2x,\\
c'(x) &= 2x\,e^{-5x},\\
c(x) &= \int 2x\,e^{-5x}dx.
\end{aligned}$$

Integrál $\int 2x\,e^{-5x}dx$ vypočítame pomocou metódy per partes, pričom výsledok je

$$c(x) = -2\,e^{-5x}\left(\frac{x}{5} + \frac{1}{25}\right) + k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Všeobecné riešenie diferenciálne rovnice s pravou stranou je v tvare

$$y = c(x)\, e^{5x} = \left[-2\, e^{-5x}\left(\frac{x}{5} + \frac{1}{25}\right) + k\right] e^{5x} = -\frac{2x}{5} - \frac{2}{25} + ke^{5x},\ k \in \mathbb{R}.$$

Riešenie spôsobom B: Diferenciálnu rovnicu

$$y' - 5y = 2x$$

vynásobíme integračným faktorom $IF = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -5\,dx} = e^{-5x}$ a dostaneme

$$y' \cdot e^{-5x} - 5 \cdot e^{-5x} y = 2x \cdot e^{-5x}.$$

Všimnime si, že ľavá strana takto upravenej rovnice predstavuje deriváciu súčinu hľadaného riešenia a integračného faktora

$$[y \cdot e^{-5x}]' = 2x \cdot e^{-5x}.$$

Integrovaním oboch strán vzniknutej rovnice dostaneme

$$y \cdot e^{-5x} = \int 2x \cdot e^{-5x}\, dx.$$

Integrál $\int 2x\, e^{-5x} dx$ vzniknutý na pravej strane vypočítame pomocou metódy per partes

$$\int 2x \cdot e^{-5x}\, dx = -2\, e^{-5x}\left(\frac{x}{5} + \frac{1}{25}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Rovnica je teraz v tvare

$$y \cdot e^{-5x} = -2\, e^{-5x}\left(\frac{x}{5} + \frac{1}{25}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Prenásobením oboch strán rovnice výrazom e^{5x} eliminujeme hľadané riešenie y. Všeobecné riešenie diferenciálne rovnice je v tvare

$$y = \left[-2\, e^{-5x}\left(\frac{x}{5} + \frac{1}{25}\right) + c\right] e^{5x} = -\frac{2x}{5} - \frac{2}{25} + ce^{5x},\ c \in \mathbb{R}.$$

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:

49.	$y' - 2y = e^{2x}$	$y = ce^{2x} + xe^{2x}$
50.	$y' + 2y = e^{-x}$	$y = ce^{-2x} + e^{-x}$
51.	$y' - 2y = x$	$y = ce^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$
52.	$y' - \dfrac{3y}{x} = 2$	$y = cx^3 - x$
53.	$y' + y = e^{3x}$	$y = ce^{-x} + \frac{e^{3x}}{4}$
54.	$y' + xy = x^3$	$y = ce^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$
55.	$y' - \dfrac{2y}{x} = x + 1$	$y = cx^2 - x + x^2 \ln\|x\|$
56.	$xy' - 2y = x\, e^{-\frac{1}{x}}$	$y = cx^2 + x^2 e^{-\frac{1}{x}}$
57.	$y' - \dfrac{y}{x} = \ln x$	$y = cx + \dfrac{x}{2} \ln^2 x$
58.	$y' + \dfrac{y}{x} = x^5 + 2$	$y = \dfrac{c}{x} + x + \dfrac{x^6}{7}$
59.	$y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$	$y = \dfrac{\ln\|x\| + c}{x}$
60.	$y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^3}$	$y = \dfrac{\ln\|x\| + c}{x^2}$
61.	$y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{e^x}{x^2}$	$y = \dfrac{c}{x^3} + \dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{e^x}{x^3}$
62.	$y' + y = 2x^2 - 2x + 1$	$y = ce^{-x} + 2x^2 - 6x + 7$
63.	$y' + 4y = 16x$	$y = ce^{-4x} + 4x - 1$
64.	$xy' + y = x \sin x$	$y = -\cos x + \frac{c + \sin x}{x}$
65.	$y' - \dfrac{2y}{x+1} = \sqrt{(1+x)^5}$	$y = c(x+1)^2 + \dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^7}$
66.	$y' - \dfrac{y}{2(x+1)} = \sqrt{x+1}$	$y = c\sqrt{x+1} + x\sqrt{x+1}$
67.	$xy' + y = 1 + \ln x$	$y = \frac{c}{x} + \ln x$
68.	$xy' + y = x \ln x$	$y = \frac{c}{x} + \frac{1}{2} x \ln x - \frac{x}{4}$
69.	$xy' - y = (x-1)^2$	$y = cx + x^2 - 2x \ln\|x\| - 1$
70.	$x^2 y' + xy = -1$	$y = \frac{c}{x} - \frac{\ln\|x\|}{x}$
71.	$x^2 y' + xy = 3x^3 + 2x^2 + x$	$y = \frac{c}{x} + x^2 + x + 1$
72.	$x^2 y' - xy = x^4 e^{-x}$	$y = cx - x^2 e^{-x} - xe^{-x}$
73.	$x^2 y' + 2xy = x^2 + 2$	$y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^3}{3} + 2x + c\right)$
74.	$x^2 y' - 2xy = x^2 \ln x$	$y = cx^2 - x \ln x - x$
75.	$y' \cos x + y \sin x = 1$	$y = c\, \cos x + \sin x$
76.	$y' \cos x - y \sin x = \sin(2x)$	$y = \frac{c - \cos(2x)}{2\, \cos x}$
77.	$y' - y\, \mathrm{tg}\, x = 2\cos^2 x$	$3y = 2\, \mathrm{tg}\, x\, (3 - \sin^2 x) + \frac{c}{\cos x}$

78. $y' + \dfrac{xy}{1+x^2} = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$ $\qquad y = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}}\right| + c\right)$

79. $y' + \dfrac{4xy}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ $\qquad y = \frac{\operatorname{arctg} x + c}{(x^2+1)^2}$

80. $y' + \dfrac{2xy}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad y = \frac{x+c}{x^2+1}$

81. $y' + \dfrac{y}{x+1} = x^2 + 1$ $\qquad y = \frac{1}{x+1}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c\right)$

82. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{3}{x^4}$ $\qquad y = \frac{3\ln|x| + c}{x^3}$

V nasledujúcich úlohách nájdite partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa danú začiatočnú podmienku:

83. $y' - 2y = e^{2x},\ y(0) = \frac{1}{2}$ $\qquad y = \frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x}$

84. $y' - 2y = x,\ y(0) = 1$ $\qquad y = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

85. $y' - \dfrac{3y}{x} = 2,\ y(-1) = -1$ $\qquad y = 2x^3 - x$

86. $xy' - 2y = x\,e^{-\frac{1}{x}},\ y(1) = \frac{1}{e}$ $\qquad y = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$

87. $y' - \dfrac{2y}{x} = x + 1,\ y(1) = 0$ $\qquad y = x^2 - x + x^2 \ln|x|$

88. $xy' + y = 1 + \ln x,\ y(e) = 2$ $\qquad y = \frac{e}{x} + \ln x$

89. $y' - \dfrac{y}{x} = \ln x,\ y(1) = 3$ $\qquad y = 3x + \dfrac{x}{2}\ln^2 x$

90. $y' - \dfrac{y}{2(x+1)} = \sqrt{x+1},\ y(3) = 2$ $\qquad y = -2\sqrt{x+1} + x\sqrt{x+1}$

91. $x^2y' + xy = 3x^3 + 2x^2 + x,\ y(2) = 2$ $\qquad y = -\frac{10}{x} + x^2 + x + 1$

92. $x^2y' - xy = x^4e^{-x},\ y(1) = -\frac{2}{e}$ $\qquad y = -x^2e^{-x} - xe^{-x}$

93. $y'\cos x - y\sin x = \sin(2x),\ y(0) = 0$ $\qquad y = \frac{1-\cos(2x)}{2\cos x}$

94. $y' - y\operatorname{tg} x = 2\cos^2 x,\ y(0) = 0$ $\qquad 3y = 2\operatorname{tg} x\,(3 - \sin^2 x)$

95. $y' - y\cos x = \cos x,\ y(0) = 1$ $\qquad y = 2\,e^{\sin x} - 1$

3.3 Lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientmi

Definícia 3.6. ***Lineárnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu s konštantnými koeficientmi bez pravej strany*** *nazývame rovnicu*

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0,$$

kde $a,\ b \in R$.

Riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu budeme hľadať v tvare $y = e^{\lambda x}$, kde λ je riešením charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Charakteristickú rovnicu dostaneme z diferenciálnej rovnice tak, že príslušné derivácie y nahradíme mocninami premennej λ. Môžu nastať tri prípady:

1. Ak $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak koreňu λ_1 prislúcha riešenie diferenciálnej rovnice v tvare $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ a koreňu λ_2 prislúcha riešenie diferenciálnej rovnice v tvare $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Potom všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice zapíšeme ako lineárnu kombináciu riešení y_1 a y_2 v tvare
$$y = c_1\, e^{\lambda_1\, x} + c_2\, e^{\lambda_2\, x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Ak $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 = \lambda_2$, tak koreňu λ_1 prislúchajú dve riešenia diferenciálnej rovnice v tvare $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = x\, e^{\lambda_1 x}$. Potom všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice zapíšeme ako lineárnu kombináciu riešení y_1 a y_2 v tvare
$$y = c_1\, e^{\lambda_1\, x} + c_2\, x\, e^{\lambda_1\, x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Ak $\lambda_1, \lambda_2 \in C$, $\lambda_1 = \alpha + \beta\, i$ a $\lambda_2 = \alpha - \beta\, i$, tak $y_1 = e^{\alpha\, x}\cos(\beta\, x)$ a $y_2 = e^{\alpha\, x}\sin(\beta\, x)$. Potom všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice zapíšeme ako lineárnu kombináciu riešení y_1 a y_2 v tvare
$$y = c_1\, e^{\alpha\, x}\cos(\beta\, x) + c_2\, e^{\alpha\, x}\sin(\beta\, x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad 3.4. *Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice* $y'' - 6y' + 5y = 0$.

Riešenie: Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice
$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$
Jej koreňmi sú $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$. Teda $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ a $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a tak im odpovedajú riešenia $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{5x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{x}$. Potom riešenie diferenciálnej rovnice je v tvare
$$y = c_1\, e^{5x} + c_2\, e^{x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad 3.5. *Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice* $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Riešenie: Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice
$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Jej 2–násobným koreňom je $\lambda = 3$ a tak mu odpovedajú riešenia $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{3x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x} = x\,e^{3x}$. Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1\,e^{3x} + c_2\,x\,e^{3x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad 3.6. *Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice* $y'' - 2y' + 2y = 0.$

Riešenie: Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Jej koreňmi sú komplexné združené čísla $\lambda_1 = \alpha + \beta\,i = 1 + i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta\,i = 1 - i$, ktorým odpovedajú riešenia $y_1 = e^{\alpha\,x}\cos(\beta\,x) = e^x \cos x$, $y_2 = e^{\alpha\,x}\sin(\beta\,x) = e^x \sin x$. Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1\,e^x \cos x + c_2\,e^x \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Neriešené úlohy:

Riešte nasledujúce lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu:

96.	$y'' - y' - 2y = 0$	$y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-x}$
97.	$y'' - 2y' - 8y = 0$	$y = c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{4x}$
98.	$y'' + 3y' - 4y = 0$	$y = c_1\,e^{x} + c_2\,e^{-4x}$
99.	$y'' + y' - 6y = 0$	$y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-3x}$
100.	$y'' - 4y' + 3y = 0$	$y = c_1\,e^{x} + c_2\,e^{3x}$
101.	$y'' - 6y' + 8y = 0$	$y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{4x}$
102.	$y'' - 5y' + 6y = 0$	$y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{3x}$
103.	$y'' + 4y' + 3y = 0$	$y = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{-3x}$
104.	$y'' + 3y' + 2y = 0$	$y = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{-2x}$
105.	$y'' + 2y' = 0$	$y = c_1 e^{-2x} + c_2$
106.	$y'' - 3y' = 0$	$y = c_1 e^{3x} + c_2$
107.	$y'' - 6y' + 9y = 0$	$y = c_1\,e^{3x} + c_2\,x\,e^{3x}$
108.	$y'' - 8y' + 16y = 0$	$y = c_1\,e^{4x} + c_2\,x\,e^{4x}$
109.	$y'' + 2y' + y = 0$	$y = c_1\,e^{-x} + c_2\,x\,e^{-x}$
110.	$y'' + 4y' + 5y = 0$	$y = c_1\,e^{-2x}\cos x + c_2\,e^{-2x}\sin x$
111.	$y'' + 2y' + 2y = 0$	$y = c_1\,e^{-x}\cos x + c_2\,e^{-x}\sin x$

112.	$y'' - 2y' + 5y = 0$	$y = c_1\, e^x \cos(2x) + c_2\, e^x \sin(2x)$
113.	$y'' + y = 0$	$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$
114.	$y'' - 4y' + 5y = 0$	$y = c_1\, e^{2x} \cos x + c_2\, e^{2x} \sin x$

Definícia 3.7. ***Lineárnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu s konštantnými koeficientmi s pravou stranou*** *nazývame rovnicu*

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(x),$$

kde $a,\, b \in R$ a $f(x)$ je spojitá funkcia.

Riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou dostaneme ako súčet riešenia rovnice bez pravej strany a partikulárneho riešenia rovnice s pravou stranou. Budeme sa zaoberať dvoma typmi lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu:

1) **Lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu, kde na pravej strane rovnice sú nasledovné funkcie:**

   a) $f(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x}$, kde $P_m(x)$ je polynóm stupňa m a $\alpha \in R$ je k–násobným koreňom charakteristickej rovnice danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany,

   b) $f(x) = \left(P_{n_1}^{(1)}(x) \cos\beta x + P_{n_2}^{(2)}(x) \sin\beta x\right) e^{\alpha x}$, kde $P_{n_1}^{(1)}(x)$, $P_{n_2}^{(2)}(x)$ sú polynómy stupňa n_1, n_2, $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$ a $\alpha + \beta i$ je k–násobným koreňom charakteristickej rovnice danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany,

   c) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

   Potom partikulárne riešenia rovnice s pravou stranou sú v tvare v prípade

   a) $y^* = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m)\, e^{\alpha x}\, x^k$, kde $\alpha \in R$ je k–násobným koreňom charakteristickej rovnice danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany,

   b) $y^* = \left(Q_m^{(1)}(x) \cos\beta x + Q_m^{(2)}(x) \sin\beta x\right) e^{\alpha x}\, x^k$, kde $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$ a $\alpha + \beta i$ je k–násobným koreňom charakteristickej rovnice danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany a $Q_m^{(1)}(x)$, $Q_m^{(2)}(x)$ sú polynómy stupňa $m = \max\{n_1, n_2\}$,

   c) $y^* = y_1^* + y_2^*$, kde y_1^*, y_2^* sú riešenia diferenciálnej rovnice s pravými stranami $f_1(x)$, $f_2(x)$.

2) **Lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu, kde na pravej strane rovnice nie je žiadna z predchádzajúcich funkcií**, riešime pomocou Lagrangeovej metódy variácie konštánt:

1. Vyriešime lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu bez pravej strany (t. j. položíme pravú stranu rovnú nule). Jej riešenie dostávame ako lineárnu kombináciu dvoch lineárne nezávislých riešení y_1 a y_2 v tvare $y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
2. Použijeme metódu variácie konštánt, t. j. konštanty c_1, c_2 nahradíme funkciami $c_1(x)$, $c_2(x)$, a hľadáme riešenie v tvare $y = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2$.
3. Funkcie $c_1(x)$ a $c_2(x)$ dostaneme riešením systému rovníc
$$\begin{aligned} c_1'(x)\, y_1 + c_2'(x)\, y_2 &= 0 \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x)\, y_2' &= f(x). \end{aligned}$$
Ak tento systém riešime pomocou Cramerovho pravidla, tak
$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx \quad \text{a} \quad c_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx,$$
kde
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}; \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}; \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}.$$

Príklad 3.7. *Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice* $y'' - 8y' + 16y = x\, e^{2x}$.

Riešenie: Najprv riešime diferenciálnu rovnicu bez pravej strany
$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$
Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice
$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0.$$
Jej 2–násobným koreňom je $\lambda = 4$, ktorému odpovedajú riešenia $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = x\, e^{4x}$. Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany je v tvare
$$y = c_1\, e^{4x} + c_2\, x\, e^{4x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou je v tvare
$$y = c_1\, e^{4x} + c_2\, x\, e^{4x} + y^*,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
kde tvar y^* určíme podľa funkcie na pravej strane zadanej diferenciálnej rovnice. Keďže pravá strana rovnice je rovná $x\, e^{2x}$, máme typ $f(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x}$, kde $m = 1$ a $\alpha = 2$. Potom
$$y^* = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m)\, e^{\alpha x}\, x^k = (ax + b)\, e^{2x}\, x^0 = (ax + b)\, e^{2x},$$

lebo $\alpha = 2$ nie je koreňom (teda je 0–násobným koreňom, t. j. $k = 0$) charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice bez pravej strany. Zderivujeme y^*

$$\begin{aligned}(y^*)' &= a\,e^{2x} + 2(ax+b)\,e^{2x},\\ (y^*)'' &= 2a\,e^{2x} + 2a\,e^{2x} + 4(ax+b)\,e^{2x} = 4a\,e^{2x} + 4(ax+b)\,e^{2x}\end{aligned}$$

a následne dosadíme y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ za y, y', y'' do zadanej diferenciálnej rovnice s pravou stranou

$$4a\,e^{2x} + 4(ax+b)\,e^{2x} - 8\left[a\,e^{2x} + 2(ax+b)\,e^{2x}\right] + 16(ax+b)\,e^{2x} = x\,e^{2x}.$$

Úpravou a porovnaním koeficientov polynómov na oboch stranách rovnice dostaneme $a = b = \frac{1}{4}$ a teda $y^* = \frac{1}{4}(x+1)e^{2x}$. Riešenie danej diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1\,e^{4x} + c_2\,x\,e^{4x} + y^* = c_1\,e^{4x} + c_2\,x\,e^{4x} + \frac{1}{4}(x+1)e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad 3.8. *Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice* $y'' + y = 2\sin x - \cos x$.

Riešenie: Najprv riešime diferenciálnu rovnicu bez pravej strany

$$y'' + y = 0.$$

Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Jej koreňmi sú $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, ktorým odpovedajú riešenia $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany je v tvare

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou je v tvare

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + y^*,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kde tvar y^* určíme podľa funkcie na pravej strane zadanej diferenciálnej rovnice. Keďže pravá strana rovnice je rovná $2\sin x - \cos x$, máme typ $f(x) = \left(P^{(1)}_{n_1}(x)\cos\beta x + P^{(2)}_{n_2}(x)\sin\beta x\right)e^{\alpha x}$, kde $n_1 = n_2 = 0$, $\alpha = 0$ a $\beta = 1$. Potom

$$y^* = \left(Q^{(1)}_m(x)\cos\beta x + Q^{(2)}_m(x)\sin\beta x\right)e^{\alpha x}\,x^k = (a\cos x + b\sin x)x,$$

lebo $m = \max\{n_1, n_2\} = \max\{0, 0\} = 0$, $\alpha + \beta i = i$ je jednoduchým koreňom (teda je 1–násobným koreňom, t. j. $k = 1$) charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice bez pravej strany. Zderivujeme y^*

$$\begin{aligned}(y^*)' &= (-a\sin x + b\cos x)x + (a\cos x + b\sin x),\\ (y^*)'' &= (-a\cos x - b\sin x)x + (-a\sin x + b\cos x) - a\sin x + b\cos x,\end{aligned}$$

a následne dosadíme y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ za y, y', y'' do zadanej diferenciálnej rovnice s pravou stranou

$$(-a\cos x - b\sin x)x + (-a\sin x + b\cos x) - a\sin x + b\cos x - (a\cos x + b\sin x)x = 2\sin x - \cos x.$$

Úpravou a porovnaním koeficientov polynómov na oboch stranách rovnice dostaneme $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$ a teda $y^* = \left(-\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)x$. Riešenie diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + y^* = c_1\cos x + c_2\sin x - \left(\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)x.$$

Príklad 3.9. *Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice* $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x$.

Riešenie: Najprv riešime diferenciálnu rovnicu bez pravej strany

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Jej koreňmi sú $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, ktorým odpovedajú riešenia $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$.

Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany je v tvare

$$y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Riešenie danej diferenciálnej rovnice s pravou stranou je v tvare

$$y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x} + y^*,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kde tvar y^* určíme podľa funkcie na pravej strane zadanej diferenciálnej rovnice.

Keďže pravá strana rovnice je rovná $4x - 2e^x$, máme typ $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, kde $f_1(x) = 4x$ a $f_2(x) = -2e^x$.

Potom $y^* = y_1^* + y_2^*$, pričom y_1^* je riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - y' - 2y = 4x$ a y_2^* je riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - y' - 2y = -2e^x$.

Vypočítame najprv y_1^*. V tomto prípade máme pravú stranu $f_1(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} x = 4x$, teda $m = 1$ a $\alpha = 0$. Potom

$$y_1^* = (ax + b)\, e^{0x}\, x^0 = (ax + b),$$

lebo $\alpha = 0$ nie je koreňom (teda je 0–násobným koreňom, t. j. $k = 0$) charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice bez pravej strany. Keďže $(y_1^*)' = a$ a $(y_1^*)'' = 0$, dostávame

$$-a - 2(ax + b) = 4x.$$

Úpravou a porovnaním koeficientov polynómov na oboch stranách rovnice dostaneme $a = -2$, $b = 1$ a teda $y_1^* = -2x + 1$.

Podobne vypočítame aj y_2^*. V tomto prípade máme pravú stranu $f_2(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x} x = -2e^x$, teda $m = 0$ a $\alpha = 1$. Potom

$$y_2^* = c\, e^x\, x^0 = c\, e^x,$$

lebo $\alpha = 1$ nie je koreňom (teda je 0–násobným koreňom, t. j. $k = 0$) charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice bez pravej strany.

Keďže $(y_2^*)' = c\, e^x$ a $(y_2^*)'' = c\, e^x$, dostávame

$$c\, e^x - c\, e^x - 2c\, e^x = -2\, e^x.$$

Úpravou dostaneme $c = 1$ a teda $y_2^* = e^x$. Riešenie danej diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x} + y_1^* + y_2^* = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x} - 2x + 1 + e^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad 3.10. *Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice* $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Riešenie: Najprv riešime diferenciálnu rovnicu bez pravej strany

$$y'' + y = 0.$$

Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Jej koreňmi sú $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, ktorým odpovedajú riešenia $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany je v tvare

$$y = c_1\, \cos x + c_2\, \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Keďže na pravej strane danej diferenciálnej rovnice nie je ani jedna z funkcií typu $f(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x}$, $f(x) = \left(P^{(1)}_{n_1}(x) \cos \beta x + P^{(2)}_{n_2}(x) \sin \beta x\right) e^{\alpha x}$ a ani ich súčet, túto diferenciálnu rovnicu budeme riešiť pomocou Lagrangeovej metódy variácie konštánt. Jej riešenie budeme hľadať v tvare

$$y = c_1(x)\, \cos x + c_2(x)\, \sin x,$$

kde potrebujeme určiť funkcie $c_1(x)$ a $c_2(x)$. Pre funkcie $c_1(x)$, $c_2(x)$ platí

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx \quad \text{a} \quad c_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx,$$

kde

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1.$$

Po dosadení dostávame

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + k_1,$$

$$c_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx = \int 1\, dx = x + k_2.$$

Riešenie danej diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1(x)\, \cos x + c_2(x)\, \sin x = (\ln|\cos x| + k_1)\, \cos x + (x + k_2)\, \sin x =$$

$$= k_1\, \cos x + k_2\, \sin x + \ln|\cos x|\, \cos x + x\, \sin x,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Neriešené úlohy:

Riešte diferenciálnu rovnicu $y'' - 5y' + 6y = f(x)$, ak:

115. $f(x) = e^x(6x + 1)$ $\qquad y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x} + e^x(3x + 5)$
116. $f(x) = 12x^2 - 2x + 1$ $\qquad y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x} + 2x^2 + 3x + 2$
117. $f(x) = 5\, e^{\frac{x}{2}}$ $\qquad y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x} + \frac{4}{3}\, e^{\frac{x}{2}}$
118. $f(x) = 39 \sin(3x)$ $\qquad y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x} - \frac{\sin(3x) - 5\cos(3x)}{2}$
119. $f(x) = 3\, e^{2x}$ $\qquad y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x} - 3x\, e^{2x}$
120. $f(x) = x\, e^{3x}$ $\qquad y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{3x} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) e^{3x}$

Riešte diferenciálnu rovnicu $y'' - y' - 12y = f(x)$, ak:

121. $f(x) = 4$ $\qquad y = c_1\, e^{4x} + c_2\, e^{-3x} - \frac{1}{3}$
122. $f(x) = \cos(2x)$ $\qquad y = c_1\, e^{4x} + c_2\, e^{-3x} - \frac{8\cos(2x)+\sin(2x)}{130}$
123. $f(x) = e^{-x}(5x^2 - 1)$ $\qquad y = c_1\, e^{4x} + c_2\, e^{-3x} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{10} + \frac{9}{100}\right) e^{-x}$
124. $f(x) = 7\, e^{4x}$ $\qquad y = c_1\, e^{4x} + c_2\, e^{-3x} + x\, e^{4x}$
125. $f(x) = 7x\, e^{-3x}$ $\qquad y = c_1\, e^{4x} + c_2\, e^{-3x} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{7}\right) e^{-3x}$
126. $f(x) = \sin x - \cos x$ $\qquad y = c_1\, e^{4x} + c_2\, e^{-3x} + \frac{7\cos x - 6\sin x}{85}$

Riešte diferenciálnu rovnicu $y'' + 6y' + 5y = f(x)$, ak:

127. $f(x) = 5x + 1$ $\qquad y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-5x} - 1 + x$
128. $f(x) = 20\, e^{5x}$ $\qquad y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-5x} + \frac{e^{5x}}{3}$
129. $f(x) = e^{-5x}$ $\qquad y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-5x} - \frac{1}{4}x\, e^{-5x}$
130. $f(x) = 10\sin(5x)$ $\qquad y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-5x} - \frac{3\cos(5x)+2\sin(5x)}{13}$
131. $f(x) = 13\cos x$ $\qquad y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-5x} + \cos x + \frac{3}{2}\sin x$
132. $f(x) = 17\, e^{-x}\cos x$ $\qquad y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-5x} + e^{-x}(4\sin x - \cos x)$
133. $f(x) = e^{-x}(4x + 3)$ $\qquad y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-5x} + \frac{x(1+x)}{2}\, e^{-x}$

Riešte diferenciálnu rovnicu $y'' + 4y' = f(x)$, ak:

134. $f(x) = \sin x$ $\qquad y = c_1 + c_2\, e^{-4x} - \frac{4\cos x+\sin x}{17}$
135. $f(x) = 3x^2 + 3x + 2$ $\qquad y = c_1 + c_2\, e^{-4x} + \frac{8x^2+6x+13}{32}\, x$
136. $f(x) = e^{-4x}$ $\qquad y = c_1 + c_2\, e^{-4x} - \frac{1}{4}\, xe^{-4x}$

Riešte diferenciálnu rovnicu $y'' + 4y = f(x)$, ak:

137. $f(x) = 2$ $\qquad y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{1}{2}$
138. $f(x) = e^x\sin(2x)$ $\qquad y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{\sin(2x)-4\cos(2x)}{17}e^x$
139. $f(x) = \cos x$ $\qquad y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{\cos x}{3}$
140. $f(x) = \sin(2x)$ $\qquad y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) - \frac{x\cos(2x)}{4}$
141. $f(x) = -5x\, e^x$ $\qquad y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{2-5x}{5}e^x$
142. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ $\qquad y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{2x^2-12x+9}{8}$

Riešte diferenciálnu rovnicu $y'' - 2y' + 5y = f(x)$, ak:

143. $f(x) = 5x - 2$ $\qquad y = c_1\, e^x\cos(2x) + c_2\, e^x\sin(2x) + x$
144. $f(x) = e^x(4x + 6)$ $\qquad y = c_1\, e^x\cos(2x) + c_2\, e^x\sin(2x) + \frac{2x+3}{2}e^x$
145. $f(x) = 5x^2 + x + 15$ $\qquad y = c_1\, e^x\cos(2x) + c_2\, e^x\sin(2x) + x^2 + x + 3$

146. $f(x) = 34\sin(2x)$ $\qquad y = c_1\, e^x \cos(2x) + c_2\, e^x \sin(2x) + 8\cos(2x) + 2\sin(2x)$
147. $f(x) = -\cos x$ $\qquad y = c_1\, e^x \cos(2x) + c_2\, e^x \sin(2x) - \frac{2\cos x - \sin x}{10}$
148. $f(x) = [\sin(2x) + \cos(2x)]\, e^x$ $\qquad y = c_1\, e^x \cos(2x) + c_2\, e^x \sin(2x) + \frac{\sin(2x) - \cos(2x)}{4}\, x\, e^x$

Riešte diferenciálnu rovnicu $y'' - y' - 6y = f(x)$, ak:

149. $f(x) = 6x^2 + 8x - 7 + e^{2x}$ $\qquad y = c_1\, e^{3x} + c_2\, e^{-2x} - x^2 - x + 1 - \frac{1}{4}\, e^{2x}$
150. $f(x) = 52\sin(2x) - 5\, e^{3x}$ $\qquad y = c_1\, e^{3x} + c_2\, e^{-2x} + \cos(2x) - 5\sin(2x) - x\, e^{3x}$
151. $f(x) = 10(e^{-2x} + x\, e^{3x})$ $\qquad y = c_1\, e^{3x} + c_2\, e^{-2x} + \frac{e^{3x}(5x^2 - 2x)}{5} - 2x\, e^{-2x}$
152. $f(x) = 12 + 50\sin x - 52\cos(2x)$

$$y = c_1\, e^{3x} + c_2\, e^{-2x} + \cos x - 7\sin x + 5\cos(2x) + \sin(2x) - 2$$

Riešte nasledujúce lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu:

153. $y'' + 2y' = e^{-x}$ $\qquad y = c_1 e^{-2x} + c_2 - e^{-x}$
154. $y'' - 2y' = 3\, e^{2x}$ $\qquad y = c_1 e^{2x} + c_2 + \frac{3\, x\, e^{2x}}{2}$
155. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$ $\qquad y = c_1\, e^{-2x} \cos x + c_2\, e^{-2x} \sin x + x^2 - 8x + 7$
156. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 - 16x + 2$ $\qquad y = c_1\, e^{-x} \cos x + c_2\, e^{-x} \sin x + x^2 - 10x + 10$
157. $y'' - y' - 2y = 3\sin x + 11\cos x$ $\qquad y = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x} - 2\sin x - 3\cos x$
158. $y'' - 6y' + 9y = 2\sin x + 36\cos x$ $\qquad y = c_1\, e^{3x} + c_2\, x\, e^{3x} - 2\sin x + 3\cos x$
159. $y'' - 8y' + 16y = 3x\, e^x$ $\qquad y = c_1\, e^{4x} + c_2\, x\, e^{4x} + \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{9}\right) e^x$
160. $y'' - 2y' = 25\sin x$ $\qquad y = c_1 + c_2\, e^{2x} - 5\sin x + 10\cos x$
161. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + x - 5$ $\qquad y = c_1\, e^x \cos(2x) + c_2\, e^x \sin(2x) + x^2 + x - 1$
162. $y'' - 5y' = (x+1)e^{-x} + e^x$ $\qquad y = c_1 + c_2 e^{5x} + \frac{6x+13}{36} e^{-x} - \frac{e^x}{4}$
163. $y'' - 5y' = 5 - \dfrac{2}{5}\, e^{5x} - 2x\, e^{5x}$ $\qquad y = c_1 + c_2 e^{5x} - x - \frac{x^2 e^{5x}}{5}$
164. $y'' + y = x^3 - 1 - 2x\, e^x$ $\qquad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^3 - 6x - 1 - e^x(x - 1)$
165. $y'' + y = -x + \cos x + \sin x$ $\qquad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x + \frac{x(\sin x - \cos x)}{2}$
166. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} + 4\cos x$ $\qquad y = c_1\, e^{2x} \cos x + c_2\, e^{2x} \sin x + e^{2x} + \frac{\cos x - \sin x}{2}$

Riešte nasledujúce lineárne diferenciálne rovnice metódou variácie konštánt:

167. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ $\qquad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x\, \cos x + \sin x\, \ln|\sin x|$
168. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$ $\qquad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2\cos x} + \sin x \operatorname{tg} x$
169. $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x}$ $\qquad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2\cos x \operatorname{cotg} x - \frac{1}{\sin x}$
170. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ $\qquad y = c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x - x\, e^x + x\, e^x \ln|x|$
171. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$ $\qquad y = c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x - \frac{e^x}{2} \ln(x^2 + 1) + x\, e^x \operatorname{arctg} x$

172. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ $\qquad y = c_1 \, e^{-2x} + c_2 \, x \, e^{-2x} + \frac{x^2}{4} e^{-2x}(3 - 2 \ln x)$

173. $y'' + y = \operatorname{cotg} x$ $\qquad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{\sin x}{2} \ln \left| \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right|$

174. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$

$$y = c_1 \, e^{-x} \cos x + c_2 \, e^{-x} \sin x - x \, e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x \; \ln |\sin x|$$

4 Funkcia komplexnej premennej

Definícia 4.1. *Na množine M komplexných čísel je definovaná* ***komplexná funkcia*** *f* ***komplexnej premennej****, ak ku každému komplexnému číslu $z \in M$ je priradené práve jedno komplexné číslo $w = f(z)$. Množinu M nazývame* ***definičným oborom funkcie*** *f a množinu L všetkých čísel $f(z)$, $z \in M$ nazývame* ***oborom hodnôt funkcie*** *f. Komplexnú funkciu f komplexnej premennej s definičným oborom M môžeme zapísať aj v tvare*

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),$$

kde $z = x + i\, y$ a $u(x, y)$, $v(x, y)$ sú reálne funkcie dvoch reálnych premenných x a y.

4.1 Analytická funkcie a derivácia funkcie komplexnej premennej

Definícia 4.2. *Funkciu f komplexnej premennej nazývame* ***analytickou*** *v bode* $\boldsymbol{a}$, *$a \neq \infty$, ak existuje také okolie bodu* $\boldsymbol{a}$, *že v každom jeho bode má funkcia f spojitú deriváciu.*

Definícia 4.3. *Bod* $\boldsymbol{a}$ *sa nazýva* ***regulárny****, ak je v danom bode funkcia f analytická. Bod* $\boldsymbol{a}$, *v ktorom funkcia f nie je analytická, sa nazýva* ***singulárny****.*

Veta 4.1. *Funkcia komplexnej premennej $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, kde $z = x + i\, y$, má v komplexnom čísle a deriváciu $f'(z)$ práve vtedy, keď funkcie $u(x, y)$, $v(x, y)$ sú v čísle a diferencovateľné a platia Cauchy–Riemanove vzťahy*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ak funkcia komplexnej premennej $f(z)$ má v komplexnom čísle a deriváciu, tak

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\, \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Príklad 4.1. *Ukážme, že funkcia $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2y - y^3)$ je analytická.*

Riešenie: Aby funkcia $f(z)$ bola analytická, musia pre ňu platiť Cauchy–Riemanove vzťahy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Zo zadania funkcie vyplýva, že

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{a} \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

Vypočítame parciálne derivácie

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy.$$

Keďže platia Cauchy–Riemanove vzťahy, tak funkcia $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2 - y^3)$ je analytická.

Príklad 4.2. *Nájdime funkciu $v(x, y)$ tak, aby funkcia $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ bola analytická, ak $u(x, y) = 2xy + 3x$.*

Riešenie: Ak chceme, aby funkcia $f(z)$ bola analytická, musia pre ňu platiť Cauchy–Riemanove vzťahy. Keďže $\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + 3$, z prvého Cauchy–Riemanovho vzťahu dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y + 3 \quad\Rightarrow\quad v(x, y) = \int (2y + 3)\,dy = 2\,\frac{y^2}{2} + 3y + c(x) = y^2 + 3y + c(x).$$

Pretože

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x \qquad \text{a} \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial\,[y^2 + 3y + c(x)]}{\partial x} = -c'(x),$$

využitím druhého Cauchy–Riemanovho vzťahu dostávame

$$2x = -c'(x)$$

$$c(x) = -\int (2x)\,dx = -2\,\frac{x^2}{2} + k = -x^2 + k.$$

Teda

$$v(x, y) = y^2 + 3y - x^2 + k$$

a

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = (2xy + 3x) + i\,(y^2 + 3y - x^2 + k),\ \ k \in R.$$

Príklad 4.3. *Nájdime funkciu $u(x, y)$ tak, aby funkcia $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ bola analytická, ak $v(x, y) = 2xy + 3x$ a je daná začiatočná podmienka $f(0) = i$.*

Riešenie: Postupujeme rovnako ako v Príklade 4.2. Ak chceme, aby funkcia $f(z)$ bola analytická, musia pre ňu platiť Cauchy–Riemanove vzťahy. Keďže $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$, z prvého Cauchy–Riemanovho vzťahu dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad\Rightarrow\quad u(x, y) = \int 2x\,dx = 2\,\frac{x^2}{2} + c(y) = x^2 + c(y).$$

Pretože

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 3 \qquad \text{a} \qquad -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial\,[x^2 + c(y)]}{\partial y} = -c'(y),$$

využitím druhého Cauchy–Riemanovho vzťahu dostávame

$$2y + 3 = -c'(y),$$

$$c(y) = -\int (2y+3)\,dy = -2\,\frac{y^2}{2} - 3y + k = -y^2 - 3y + k.$$

Teda

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 3y + k$$

a

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) = (x^2 - y^2 - 3y + k) + i\,(2xy + 3x),\;\; k \in R.$$

Keďže $f(z) = f(x+yi)$, začiatočnú podmienku $f(0) = i$ môžeme prepísať do tvaru $f(0+0i) = i$. Na základe zadanej začiatočnej podmienky vypočítame presnú hodnotu k dosadením do funkcie $f(z)$

$$f(z) = (x^2 - y^2 - 3y + k) + i\,(2xy + 3x) \;\;\Rightarrow\;\; f(0+0i) = (0^2 - 0^2 - 3.0 + k) + i\,(2.0y + 3.0) = i.$$

Z toho vyplýva

$$k = i.$$

Teda

$$f(z) = (x^2 - y^2 - 3y + i) + i\,(2xy + 3x) = (x^2 - y^2 - 3y) + i\,(2xy + 3x + 1).$$

Neriešené úlohy:

Rozhodnite, či funkcia $f(z)$, kde $z = x + i\,y$, je analytická:

1.	$f(z) = x^3 - 3xy^2 - 2y + i\,(3x^2y - y^3 + 2x)$	je analytická
2.	$f(z) = x^3 - 15xy^2 + i\,(3x^2 - y^3)$	nie je analytická
3.	$f(z) = 2\,e^x \sin y - 2i\,e^x \cos y$	je analytická
4.	$f(z) = z^2 + 2z$	je analytická
5.	$f(z) = \operatorname{Re} z$	nie je analytická

Nájdite funkciu $u(x,y)$, resp. $v(x,y)$ tak, aby funkcia $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ bola analytická, ak:

6.	$u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 2xy + 2y$	$v(x,y) = x^2 - y^2 + 6xy - 2x + c$
7.	$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 2y$	$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 2x + c$

8. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ $\qquad v(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2xy + c$
9. $v(x,y) = -2x^3 - y^3 + 3x^2y + 6xy^2$ $\qquad u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + c$
10. $u(x,y) = 4\,e^x \sin y$ $\qquad v(x,y) = -4e^x \cos y + c$

Nájdite funkciu $u(x,y)$, resp. $v(x,y)$ tak, aby funkcia $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ bola analytická, ak je daná začiatočná podmienka:

11. $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 2xy + 2y,\ f(0) = i$ $\qquad v(x,y) = x^2 - y^2 + 6xy - 2x + 1$
12. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 2y,\ f(i) = -2 - i$ $\qquad v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 2x$
13. $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy,\ f(1+i) = 2i$ $\qquad v(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2xy + i$
14. $v(x,y) = -2x^3 - y^3 + 3x^2y + 6xy^2,\ f(0) = 0$ $\qquad u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$
15. $u(x,y) = 4\,e^x \sin y,\ f(\pi i) = 5i$ $\qquad v(x,y) = -4e^x \cos y + 1$

4.2 Rezíduum funkcie

Definícia 4.4. *Nech z_0 je izolovaný singulárny bod funkcie $f(z)$, ktorá je na medzikruží $M: 0 < |z - z_0| < R$ analytická. Nech Laurentov rad funkcie $f(z)$ v bode z_0 pre dané medzikružie je*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

*Koeficient a_{-1} v Laurentovom rade sa nazýva **rezíduum funkcie** $f(z)$ **v bode** z_0 a označujeme ho* $\operatorname{res} f(z_0)$.

Pre rezíduum funkcie $f(z)$ v bode z_0 platí

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi\,i} \int_C f(z)dz,$$

kde C je jednoduchá uzavretá kladne orientovaná po častiach hladká krivka, ktorá leží v medzikruží M a v jej vnútri leží bod z_0.

V ďalšom texte sa budeme zaoberať iba racionálnymi funkciami. Póly m–tého stupňa budú body, v ktorých menovateľ racionálnej funkcie má m–násobný nulový bod a súčasne čitateľ je v týchto bodoch rôzny od nuly.

Veta 4.2. *Nech funkcia f má v bode z_0 k–násobný pól, potom platí*

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right].$$

Príklad 4.4. *Vypočítajme rezíduum funkcie* $f(z) = \dfrac{1}{z(z-i)^3}$ *v jej póloch.*

Riešenie: Funkcia $f(z)$ má jeden jednoduchý pól $z_1 = 0$ a jeden trojnásobný pól $z_2 = i$. Pre rezíduum funkcie $f(z)$ v jednoduchom ($k = 1$) póle $z_1 = 0$ platí

$$\operatorname{res} f(z_1) = \lim_{z \to z_1} \left[(z - z_1) f(z)\right],$$

teda

$$\operatorname{res} f(0) = \lim_{z \to 0} \left[(z-0)\frac{1}{z(z-i)^3}\right] = \lim_{z \to 0} \frac{1}{(z-i)^3} = \frac{1}{(-i)^3} = \frac{1}{i} = -i.$$

Pre rezíduum funkcie $f(z)$ v trojnásobnom ($k = 3$) póle $z_2 = i$ platí

$$\operatorname{res} f(z_2) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to z_2} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z - z_2)^3 f(z)\right],$$

teda

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-i)^3 \frac{1}{z(z-i)^3}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \left(\frac{1}{z}\right)'' =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \left(-\frac{1}{z^2}\right)' = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{2}{z^3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i.$$

Neriešené úlohy:

Vypočítajte rezíduum funkcie $f(z)$ vo všetkých jej póloch:

16. $f(z) = \dfrac{z^2}{z+3}$ — $\operatorname{res}(-3) = 9$
17. $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z^2+1}$ — $\operatorname{res}(-i) = -\dfrac{i}{2}, \operatorname{res}(i) = \dfrac{i}{2}$
18. $f(z) = \dfrac{z^4}{(z-2)^3}$ — $\operatorname{res}(2) = 24$
19. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ — $\operatorname{res}(-i) = \dfrac{3i}{16}, \operatorname{res}(i) = -\dfrac{3i}{16}$
20. $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^3}$ — $\operatorname{res}(i) = 0$
21. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ — $\operatorname{res}(0) = 1$
22. $f(z) = \dfrac{1}{z\,(z-i)^3}$ — $\operatorname{res}(i) = i, \operatorname{res}(0) = -i$
23. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ — $\operatorname{res}(i) = -\dfrac{i}{4}, \operatorname{res}(-i) = \dfrac{i}{4}$
24. $f(z) = \dfrac{1}{z^4(z^2+1)^2}$ — $\operatorname{res}(0) = 0, \operatorname{res}(i) = -\dfrac{5i}{4}, \operatorname{res}(-i) = \dfrac{5i}{4}$
25. $f(z) = \dfrac{z^3+z^2+2}{z(1-z^2)^2}$ — $\operatorname{res}(0) = 2, \operatorname{res}(1) = -\dfrac{3}{4}, \operatorname{res}(-1) = -\dfrac{5}{4}$

4.3 Integrál funkcie komplexnej premennej

Veta 4.3. *(**Cauchyho integrálna veta**) Nech G je otvorená množina. Nech funkcia $f(z)$ je analytická na oblasti G. Nech C je uzavretá kladne orientovaná po častiach hladká krivka, ktorá leží so svojím vnútrom v oblasti G. Potom platí*

$$\oint\limits_C f(z)dz = 0.$$

Veta 4.4. *Nech $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ sú uzavreté kladne orientované krivky a nech $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ležia vnútri krivky C tak, že žiadne dve a ani ich vnútra nemajú spoločné body. Nech krivka C a jej vnútro, bez vnútra kriviek $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ležia v oblasti G. Nech $f(z)$ je analytická na oblasti G. Potom platí*

$$\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_{C_1} f(z)dz + \oint\limits_{C_2} f(z)dz + \cdots + \oint\limits_{C_n} f(z)dz.$$

Veta 4.5. *(**Cauchyho integrálna formula**) Nech na oblasti G je funkcia $f(z)$ analytická. Nech C je uzavretá kladne orientovaná krivka, ktorá leží so svojím vnútrom v oblasti G. Nech bod z_0 leží vnútri krivky C. Potom platí*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Veta 4.6. *Nech na oblasti G je funkcia $f(z)$ analytická. Nech C je uzavretá kladne orientovaná krivka, ktorá leží so svojím vnútrom A v oblasti G. Potom funkcia $f(z)$ má v každom bode $z_0 \in A$ deriváciu ľubovoľného rádu, pre ktorú platí*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, n = 1, 2, \ldots.$$

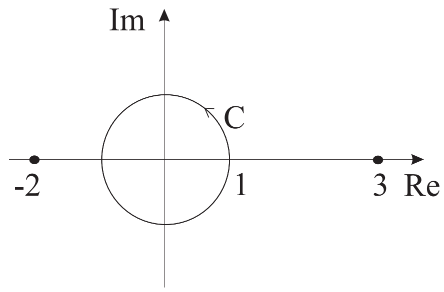
Veta 4.7. *(**Základná veta o rezíduách**) Nech C je uzavretá kladne orientovaná krivka. Ak je funkcia $f(z)$ spojitá a analytická s výnimkou konečného počtu singulárnych bodov z_k, potom platí*

$$\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res f(z_k), k = 1, 2, \ldots n.$$

Príklad 4.5. *Vypočítajme* $\oint\limits_C \frac{z^2 + 1}{(z - 3)(z + 2)} dz$ *po uzavretej krivke* $|z| = 1$.

Riešenie: Funkcia $f(z) = \frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}$ má dva singulárne body (jednoduché póly) $z_0 = -2$ a $z_0 = 3$. Ani jeden z nich však neleží vnútri krivky C, teda kružnice so stredom v bode $[0,0]$ a polomerom $r = 1$. Preto na základe Vety 4.3, je výsledný integrál rovný nule,

$$\oint_C \frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}dz = 0.$$

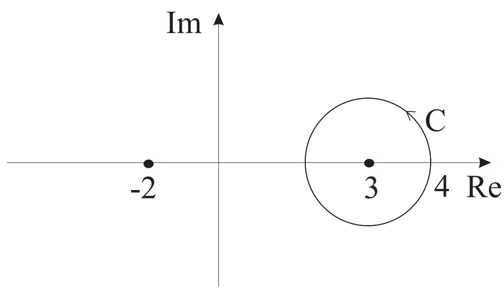


Obr. 5: Znázornenie krivky a singulárnych bodov z Príkladu 4.5

Príklad 4.6. *Vypočítajme* $\oint_C \frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}dz$ *po uzavretej krivke* $|z-3| = 1$.

Riešenie: Funkcia $f(z) = \frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}$ má dva singulárne body (jednoduché póly) $z_1 = -2$ a $z_2 = 3$. Vnútri krivky C, teda kružnice so stredom v bode $[3,0]$ a polomerom $r = 1$ leží len jeden pól, $z_2 = 3$. Preto na základe Vety 4.7, výsledný integrál vypočítame takto,

$$\oint_C \frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}dz = 2\pi\, i\text{res}[f(3)] = 2\pi\, i \lim_{z\to 3}\left[(z-3)\frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}\right] = 2\pi\, i\frac{3^2+1}{3+2} = 4\pi\, i.$$

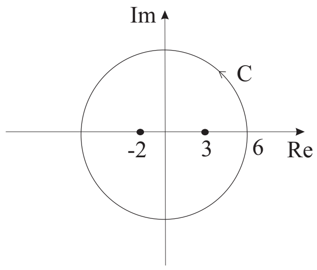


Obr. 6: Znázornenie krivky a singulárnych bodov z Príkladu 4.6

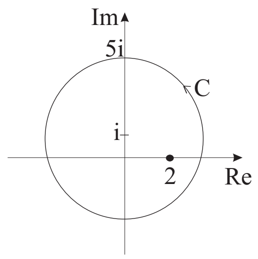
Príklad 4.7. *Vypočítajme* $\oint_C \frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}dz$ *po uzavretej krivke* $|z| = 6$.

Riešenie: Funkcia $f(z) = \frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}$ má dva singulárne body (jednoduché póly) $z_1 = -2$ a $z_2 = 3$. Vnútri krivky C, teda kružnice so stredom v bode $[0,0]$ a polomerom $r = 6$ ležia obidva póly. Preto na základe Vety 4.7, výsledný integrál vypočítame takto,

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}dz &= 2\pi\, i\text{res}[f(-2)] + 2\pi\, i\text{res}[f(3)] = \\
&= 2\pi\, i \lim_{z\to -2}\left[(z+2)\frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}\right] + 2\pi\, i \lim_{z\to 3}\left[(z-3)\frac{z^2+1}{(z-3)(z+2)}\right] = \\
&= 2\pi\, i\frac{(-2)^2+1}{-2-3} + 2\pi\, i\frac{3^2+1}{3+2} = -2\pi\, i + 4\pi\, i = 2\pi\, i.
\end{aligned}$$



Obr. 7: Znázornenie krivky a singulárnych bodov z Príkladu 4.7



Obr. 8: Znázornenie krivky a singulárnych bodov z Príkladu 4.8

Príklad 4.8. *Vypočítajme* $\oint_C \frac{z^3-4z^2-10}{(z-2)^3}dz$ *po uzavretej krivke* $|z-i| = 4$.

Riešenie: Funkcia $f(z) = \frac{z^3-4z^2-10}{(z-2)^3}$ má jeden singulárny bod (trojnásobný pól) $z_1 = 2$. Pól $z_1 = 2$ leží vnútri krivky C, teda kružnice so stredom v bode $[0,i]$ a polomerom $r = 4$. Preto na základe Vety 4.7, výsledný integrál vypočítame takto,

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{z^3-4z^2-10}{(z-2)^3}dz &= 2\pi\, i\text{res}f(2) = \frac{2\pi\, i}{2!}\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^3\frac{z^3-4z^2-10}{(z-2)^3}\right]'' = \\
&= \pi\, i \lim_{z\to 2}[z^3-4z^2-10]'' = \pi\, i \lim_{z\to 2}[3z^2-8z]' = \\
&= \pi\, i \lim_{z\to 2}[6z-8] = \pi\, i\,(6.2-8) = 4\pi\, i.
\end{aligned}$$

Neriešené úlohy:

Vypočítajte integrál funkcie po kladne orientovanej uzavretej krivke C.

26. $\oint\limits_C \frac{z^2}{z+3}dz,\ C: |z+1| = 1$ — 0

27. $\oint\limits_C \frac{z^2}{z+3}dz,\ C: |z+2| = 2$ — $18\pi\, i$

28. $\oint\limits_C \frac{z^3+2z^2-10}{z-2}dz,\ C: |z| = 1$ — 0

29. $\oint\limits_C \frac{z^3+2z^2-10}{z-2}dz,\ C: |z| = 4$ — $12\pi\, i$

30. $\oint\limits_C \frac{z}{z^2+9}dz,\ C: |z-2| = 1$ — 0

31. $\oint\limits_C \frac{z}{z^2+9}dz,\ C: |z+4i| = 2$ — $\pi\, i$

32. $\oint\limits_C \frac{z}{z^2+9}dz,\ C: |z-3i| = 1$ — $\pi\, i$

33. $\oint\limits_C \frac{z}{z^2+9}dz,\ C: |z| = 5$ — $2\pi\, i$

34. $\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^2-7z+10}dz,\ C: |z+4| = 1$ — 0

35. $\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^2-7z+10}dz,\ C: |z| = 3$ — $-\frac{2}{3}\pi\, i \sin 2$

36. $\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^2-7z+10}dz,\ C: |z-6| = 2$ — $\frac{2}{3}\pi\, i \sin 5$

37. $\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^2-7z+10}dz,\ C: |z-4| = 4$ — $\frac{2}{3}\pi\, i(\sin 5 - \sin 2)$

38. $\oint\limits_C \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z}dz,\ C: |z-2i| = 1$ — 0

39. $\oint\limits_C \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z}dz,\ C: |z| = 1$ — $\pi\, i$

40. $\oint\limits_C \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z}dz,\ C: |z+2| = 1$ — $-\frac{\pi\, i}{e^2}$

41. $\oint\limits_C \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z}dz,\ C: |z+1| = 3$ — $(1-\frac{1}{e^2})\pi\, i$

42. $\oint\limits_C \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}dz,\ C: |z-3| = 1$ — 0

43. $\oint\limits_C \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}dz,\ C: |z-i| = 1$ — $-\pi$

44.	$\oint\limits_C \frac{e^{\pi z}}{z^2+1} dz,\ C: \lvert z+i\rvert = 1$	π
45.	$\oint\limits_C \frac{e^{\pi z}}{z^2+1} dz,\ C: \lvert z\rvert = 2$	0
46.	$\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^2} dz,\ C: \lvert z-4\rvert = 2$	0
47.	$\oint\limits_C \frac{\sin z}{z^2} dz,\ C: \lvert z\rvert = 2$	$2\pi\, i$
48.	$\oint\limits_C \frac{z^4}{(z-2)^3} dz,\ C: \lvert z+2i\rvert = 1$	0
49.	$\oint\limits_C \frac{z^4}{(z-2)^3} dz,\ C: \lvert z-3\rvert = 2$	$48\pi\, i$
50.	$\oint\limits_C \frac{z^3+2z^2-10}{(z-2)^3} dz,\ C: \lvert z\rvert = 4$	$16\pi\, i$
51.	$\oint\limits_C \frac{1}{(z-i)^3} dz,\ C: \lvert z+2i\rvert = 2$	0
52.	$\oint\limits_C \frac{1}{(z-i)^3} dz,\ C: \lvert z+i\rvert = 3$	0
53.	$\oint\limits_C \frac{z^5-8z}{(z-i)^3} dz,\ C: \lvert z-2\rvert = 1$	0
54.	$\oint\limits_C \frac{z^5-8z}{(z-i)^3} dz,\ C: \lvert z-2i\rvert = 2$	20π
55.	$\oint\limits_C \frac{1}{(z^2+1)^3} dz,\ C: \lvert z-3\rvert = 1$	0
56.	$\oint\limits_C \frac{1}{(z^2+1)^3} dz,\ C: \lvert z-i\rvert = 1$	$\frac{3}{8}\pi$
57.	$\oint\limits_C \frac{1}{(z^2+1)^3} dz,\ C: \lvert z+i\rvert = 1$	$-\frac{3}{8}\pi$
58.	$\oint\limits_C \frac{1}{(z^2+1)^3} dz,\ C: \lvert z\rvert = 2$	0
59.	$\oint\limits_C \frac{1}{z\,(z-i)^3} dz,\ C: \lvert z+2\rvert = 1$	0
60.	$\oint\limits_C \frac{1}{z\,(z-i)^3} dz,\ C: \lvert z\rvert = 1/2$	2π
61.	$\oint\limits_C \frac{1}{z\,(z-i)^3} dz,\ C: \lvert z-i\rvert = 1/2$	-2π
62.	$\oint\limits_C \frac{1}{z\,(z-i)^3} dz,\ C: \lvert z\rvert = 2$	0

63. $\oint\limits_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz,\ C : |z| = 1/2$ $\qquad 0$

64. $\oint\limits_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz,\ C : |z-i| = 1$ $\qquad \frac{\pi}{2}$

65. $\oint\limits_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz,\ C : |z+i| = 1$ $\qquad -\frac{\pi}{2}$

66. $\oint\limits_C \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz,\ C : |z| = 2$ $\qquad 0$

67. $\oint\limits_C \frac{1}{z^4(z^2+1)^2} dz,\ C : |z-2| = 1$ $\qquad 0$

68. $\oint\limits_C \frac{1}{z^4(z^2+1)^2} dz,\ C : |z| = 1/2$ $\qquad 0$

69. $\oint\limits_C \frac{1}{z^4(z^2+1)^2} dz,\ C : |z-i| = 1/2$ $\qquad \frac{5}{2}\pi$

70. $\oint\limits_C \frac{1}{z^4(z^2+1)^2} dz,\ C : |z+i| = 1/2$ $\qquad -\frac{5}{2}\pi$

71. $\oint\limits_C \frac{1}{z^4(z^2+1)^2} dz,\ C : |z| = 2$ $\qquad 0$

72. $\oint\limits_C \frac{z^3+z^2+2}{z(1-z^2)^2} dz,\ C : |z+3| = 1$ $\qquad 0$

73. $\oint\limits_C \frac{z^3+z^2+2}{z(1-z^2)^2} dz,\ C : |z| = 1/4$ $\qquad 4\pi\, i$

74. $\oint\limits_C \frac{z^3+z^2+2}{z(1-z^2)^2} dz,\ C : |z-1| = 1/4$ $\qquad -\frac{3}{2}\pi\, i$

75. $\oint\limits_C \frac{z^3+z^2+2}{z(1-z^2)^2} dz,\ C : |z+1| = 1/4$ $\qquad -\frac{5}{2}\pi\, i$

76. $\oint\limits_C \frac{z^3+z^2+2}{z(1-z^2)^2} dz,\ C : |z| = 3$ $\qquad 0$

5 Laplaceova transformácia

5.1 Laplaceova transformácia

Laplaceova transformácia je transformácia, ktorá umožňuje zjednodušiť riešenie niektorých typov úloh týkajúcich sa predovšetkým diferenciálnych rovníc. Každej funkcii $f(t)$ z určitej triedy funkcií, budeme ju nazývať **predmetom** (originálom, vzorom), určíme na základe určitých pravidiel jej **obraz** $F(p)$, $p \in \mathbb{C}$, pričom zložitejším operáciám v množine predmetov $\{f(t)\}$ by mali odpovedať jednoduchšie operácie v množine obrazov $\{F(p)\}$. Uvedenú vlastnosť zapisujeme v tvare $f(t) \doteqdot F(p)$ a hovoríme, že predmet $f(t)$ korešponduje s obrazom $F(p)$. Laplaceov obraz $F(p)$ je pritom daný pomocou vzťahu

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt.$$

V ďalšom texte je uvedené zhrnutie korešpondencií základných funkcií a viet, ktoré môžeme využiť pri zložitejších funkciách. Celé znenie viet je uvedené v učebnici [3].

Tabuľka korešpondencií základných funkcií

Predmet		Obraz
1	$\doteqdot$	$\frac{1}{p}$
e^{at}	$\doteqdot$	$\frac{1}{p-a}$
t^n	$\doteqdot$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\doteqdot$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\doteqdot$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

Základné vety korešpondencií $f(t) \doteqdot F(p)$

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \doteqdot \sum\limits_{k=1}^{n} c_k F_k(p)$ (veta o lineárnosti)
2. $f(\lambda t) \doteqdot \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$, $\lambda > 0$ (veta o podobnosti)
3. $e^{at} f(t) \doteqdot F(p-a)$ (veta o tlmení)

4. Ak $f(t,\lambda) \doteqdot F(p,\lambda)$, tak $\dfrac{\partial f(t,\lambda)}{\partial\lambda} \doteqdot \dfrac{\partial F(p,\lambda)}{\partial\lambda}$ (veta o o derivovaní podľa parametra)
5. $f(t-\tau)\,\eta(t-\tau) \doteqdot e^{-\tau p}F(p),\ \tau > 0$ (veta o posunutí)
6. $f(t+\tau)\,\eta(t) \doteqdot e^{\tau p}\left[F(p) - \int\limits_0^{\tau} f(t)\,e^{-pt}dt\right]$ (veta o predstihu)
7. $f'(t) \doteqdot p\,F(p) - f(0+)$ (veta o derivovaní predmetu)
   $f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1}f(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+)$
8. $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \dfrac{F(p)}{p}$ (veta o integrovaní predmetu)
9. $-t\,f(t) \doteqdot F'(p)$ (veta o derivovaní obrazu)
10. $\dfrac{f(t)}{t} \doteqdot \int\limits_p^{\infty} F(z)dz$ (veta o integrovaní obrazu)
11. $(f*g)(t) \doteqdot F(p)\,G(p)$ (veta o násobení obrazov)
12. $p\,F(p)\,G(p) \doteqdot f(0+)\,g(t) + (f'*g)(t) = g(0+)\,f(t) + (g'*f)(t)$ (Duhamelov integrál)
13. $(f*g)(t) = h(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$ (veta o konvolučnom súčine, konvolúcia)

Poznámka: Funkcia $\eta(t)$ sa nazýva Heavisideova (jednotková) funkcia a je definovaná nasledovne

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pre } t < 0, \\ 1 & \text{pre } t \geqq 0. \end{cases}$$

Príklad 5.1. *Nájdime Laplaceov obraz $F(p)$ ku predmetu $f(t) = 4t^2 - 2 + 7e^{3t} - \dfrac{\cos(2t)}{5}$.*

Riešenie: Využitím vety o lineárnosti (1) (násobiť predmet $f(t)$ konštantou c znamená násobiť obraz $F(p)$ rovnakou konštantou c) môžeme zapísať

$$4t^2 - 2 + 7e^{3t} - \frac{\cos(2t)}{5} = 4.t^2 - 2.1 + 7.e^{3t} - \frac{1}{5}.\cos(2t).$$

Podľa tabuľky korešpondencií platí

$$t^2 \doteqdot \frac{2}{p^3}, \qquad 1 \doteqdot \frac{1}{p}, \qquad e^{3t} \doteqdot \frac{1}{p-3}, \qquad \cos(2t) \doteqdot \frac{p}{p^2+4},$$

preto po úprave dostávame

$$4t^2 - 2 + 7e^{3t} - \frac{\cos(2t)}{5} \doteqdot 4\,\frac{2}{p^3} - 2\,\frac{1}{p} + 7\,\frac{1}{p-3} - \frac{1}{5}\,\frac{p}{p^2+4} = \frac{8}{p^3} - \frac{2}{p} + \frac{7}{p-3} - \frac{p}{5(p^2+4)}.$$

Príklad 5.2. *Nájdime Laplaceov obraz $F(p)$ ku predmetu $f(t) = 8t\,e^{-t}$.*

Riešenie: K súčinu $t\,e^{-t}$ vieme podľa základných viet nájsť obraz dvoma spôsobmi a to využitím vety o tlmení (3) alebo využitím vety o derivovaní obrazu (9).

1. Podľa tabuľky korešpondencií platí

$$t \doteqdot \frac{1}{p^2}.$$

   Využitím vety o tlmení (3) (násobiť predmet $f(t)$ výrazom e^{at}, $a = -1$, znamená odčítať od argumentu p obrazu $F(p)$ konštantu a) môžeme zapísať

$$t\,e^{-t} \doteqdot \frac{1}{(p+1)^2}$$

   a nakoniec využitím vety o lineárnosti (1) (násobiť predmet $f(t)$ konštantou $c = 8$ znamená násobiť obraz $F(p)$ rovnakou konštantou $c = 8$) dostávame

$$8t\,e^{-t} \doteqdot \frac{8}{(p+1)^2}.$$

2. Podľa tabuľky korešpondencií platí

$$e^{-t} \doteqdot \frac{1}{p+1}.$$

   Využitím vety o derivovaní obrazu (9) (násobiť predmet $f(t)$ výrazom $-t$ znamená derivovať obraz $F(p)$) platí

$$-t\,e^{-t} \doteqdot \left(\frac{1}{p+1}\right)' = \frac{-1}{(p+1)^2}.$$

   Nakoniec z vety o lineárnosti (1) (násobiť predmet $f(t)$ konštantou $c = -8$ znamená násobiť obraz $F(p)$ rovnakou konštantou $c = -8$) dostávame

$$8t\,e^{-t} \doteqdot \frac{8}{(p+1)^2}.$$

Čitateľ si môže vybrať jednoduchší postup.

Príklad 5.3. *Nájdime Laplaceov obraz $F(p)$ ku predmetu $f(t) = t^2 \cos t$.*

Riešenie: Podľa tabuľky korešpondencií platí

$$\cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}.$$

Využitím vety o derivovaní obrazu (9) (násobiť predmet $f(t)$ výrazom $-t$ znamená derivovať obraz $F(p)$) môžeme zapísať

$$-t\cos t \doteqdot \left(\frac{p}{p^2+1}\right)' = \frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}.$$

Opätovným využitím vety o derivovaní obrazu (9) (násobiť predmet $f(t)$ výrazom $-t$ znamená derivovať obraz $F(p)$) dostaneme

$$t^2\cos t = -t\,(-t\cos t) \doteqdot \left(\frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}\right)' = \frac{2p(p^2-3)}{(p^2+1)^3}.$$

Príklad 5.4. *Nájdime Laplaceov obraz $F(p)$ ku predmetu $f(t) = \dfrac{\sin(2t)}{t}$.*

Riešenie: Podľa tabuľky korešpondencií platí

$$\sin(2t) \doteqdot \frac{2}{p^2+4}.$$

Využitím vety o integrovaní obrazu (10) (deliť predmet $f(t)$ výrazom t znamená integrovať obraz $F(p)$ na intervale $\langle p,\infty)$) môžeme zapísať

$$\frac{\sin(2t)}{t} \doteqdot \int_p^\infty \frac{2}{z^2+4}\,dz = 2\lim_{a\to\infty}\int_p^a \frac{1}{z^2+4}\,dz = 2\lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{2}\right]_p^a =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{2}.$$

Teda

$$\frac{\sin(2t)}{t} \doteqdot \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{2}.$$

Príklad 5.5. *Nájdime Laplaceov obraz $F(p)$ ku predmetu $f(t) = \displaystyle\int_0^t \tau^3 e^{-2\tau}\,d\tau$.*

Riešenie: Podľa tabuľky korešpondencií platí

$$\tau^3 \doteqdot \frac{6}{p^4}.$$

Využitím vety o tlmení (3) (násobiť predmet $f(t)$ výrazom e^{at}, $a=-2$, znamená odčítať od argumentu p obrazu $F(p)$ konštantu a) môžeme zapísať

$$\tau^3 e^{-2\tau} \doteqdot \frac{6}{(p+2)^4}.$$

Nakoniec použijeme vetu o integrovaní predmetu (8) (integrovať predmet $f(t)$ na intervale $\langle 0, t\rangle$ znamená predeliť obraz $F(p)$ argumentom p) a dostaneme

$$\int_0^t \tau^3 e^{-2\tau} d\tau \doteqdot \frac{6}{p(p+2)^4}.$$

Príklad 5.6. *Nájdime Laplaceov obraz $F(p)$ ku predmetu $f(t) = (t-1)\cos(t-1)\,\eta(t-1)$.*

Riešenie: Na základe Príkladu 5.3 platí

$$t\cos t \doteqdot \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}.$$

Využitím vety o posunutí (5) (odčítať od argumentu t konštantu $\tau = 1$ v predmete $f(t)$ a takto vzniknutý výraz vynásobiť jednotkovou funkciou v tvare $\eta(t-\tau)$ znamená vynásobiť obraz $F(p)$ výrazom $e^{-\tau p}$) dostaneme

$$(t-1)\cos(t-1)\,\eta(t-1) \doteqdot \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}\; e^{-p}.$$

Príklad 5.7. *Nájdime Laplaceov obraz $F(p)$ ku predmetu $f(t) = e^{3t}\, t\cos t\, \cos(2t)$.*

Riešenie: Prvým krokom bude prepis súčinu $\cos t\, \cos(2t)$ pomocou vzorca

$$\cos\alpha\, \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right],$$

teda

$$\cos t\, \cos(2t) = \cos(2t)\, \cos t = \frac{1}{2}\left[\cos t + \cos(3t)\right].$$

Preto

$$e^{3t}\, t\cos t\, \cos(2t) = \frac{1}{2}\, e^{3t}\, t\cos t + \frac{1}{2}\, e^{3t}\, t\cos(3t).$$

Na základe Príkladu 5.3 platí

$$t\cos t \doteqdot \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$$

a podľa tabuľky korešpondencií

$$\cos(3t) \doteqdot \frac{p}{p^2+9}.$$

Využitím vety o derivovaní obrazu (9) (násobiť predmet $f(t)$ výrazom $-t$ znamená derivovať obraz $F(p)$) môžeme zapísať

$$-t\cos(3t) \doteqdot \left(\frac{p}{p^2+9}\right)' = \frac{9-p^2}{(p^2+9)^2}.$$

Využitím vety o lineárnosti (1) (násobiť predmet $f(t)$ konštantou $c = -1$ znamená násobiť obraz $F(p)$ rovnakou konštantou $c = -1$) môžeme zapísať

$$t\cos(3t) \doteqdot \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}.$$

Nakoniec využitím vety o tlmení (3) (násobiť predmet $f(t)$ výrazom e^{at}, $a = 3$, znamená odčítať od argumentu p obrazu $F(p)$ konštantu a) a následne využitím vety o lineárnosti (1) (násobiť predmet $f(t)$ konštantou $c = \frac{1}{2}$ znamená násobiť obraz $F(p)$ rovnakou konštantou $c = \frac{1}{2}$) dostaneme

$$\frac{1}{2}e^{3t}\,t\cos t \doteqdot \frac{1}{2}\,\frac{(p-3)^2-1}{\left[(p-3)^2+1\right]^2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}e^{3t}\,t\cos(3t) \doteqdot \frac{1}{2}\,\frac{(p-3)^2-9}{\left[(p-3)^2+9\right]^2}.$$

Preto

$$e^{3t}\,t\cos t\,\cos(2t) \doteqdot \frac{1}{2}\,\frac{(p-3)^2-1}{\left[(p-3)^2+1\right]^2} + \frac{1}{2}\,\frac{(p-3)^2-9}{\left[(p-3)^2+9\right]^2}.$$

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách nájdite Laplaceov obraz $F(p)$ ku predmetu $f(t)$:

1. $f(t) = 4t^3 - 2t + 5e^{3t}$ $\qquad F(p) = \dfrac{24}{p^4} - \dfrac{2}{p^2} + \dfrac{5}{p-3}$
2. $f(t) = 3t^2 - 7 + 3\cos(2t) - 5\sin(3t)$ $\qquad F(p) = \dfrac{6}{p^3} - \dfrac{7}{p} + \dfrac{3p}{p^2+4} - \dfrac{15}{p^2+9}$
3. $f(t) = t^2 - 3t + 2 + \cos(2t)$ $\qquad F(p) = \dfrac{2}{p^3} - \dfrac{3}{p^2} + \dfrac{2}{p} + \dfrac{p}{p^2+4}$
4. $f(t) = (t-1)(t-2) + \sin(4t)$ $\qquad F(p) = \dfrac{2}{p^3} - \dfrac{3}{p^2} + \dfrac{2}{p} + \dfrac{4}{p^2+16}$
5. $f(t) = \cos^2(2t) - \sin^2(2t) - 3\cos\frac{t}{2}$ $\qquad F(p) = \dfrac{p}{p^2+16} - \dfrac{12p}{4p^2+1}$
6. $f(t) = 4\cos^2 t + 2\sin^2 t + 8\sin(2t) - 5$ $\qquad F(p) = -\dfrac{2}{p} + \dfrac{p+16}{p^2+4}$
7. $f(t) = 2\sin^2 t + 2\sin t\cos t - 1$ $\qquad F(p) = \dfrac{2-p}{p^2+4}$
8. $f(t) = 2\cos(2t)\cos(3t)$ $\qquad F(p) = \dfrac{p}{p^2+25} + \dfrac{p}{p^2+1}$
9. $f(t) = \cos(5t)\sin(3t) - \sin^2(3t)$ $\qquad F(p) = \dfrac{4}{p^2+64} - \dfrac{1}{p^2+4} - \dfrac{1}{2p} + \dfrac{p}{2p^2+72}$
10. $f(t) = \sin^3 t$ $\qquad F(p) = \dfrac{6}{(p^2+9)(p^2+1)}$
11. $f(t) = (t^3-4)e^{-2t}$ $\qquad F(p) = \dfrac{6}{(p+2)^4} - \dfrac{4}{p+2}$

12. $f(t) = \sin(2t)\, e^{3t} + \cos(2t)\, e^{-3t}$ $\qquad F(p) = \dfrac{2}{(p-3)^2+4} + \dfrac{p+3}{(p+3)^2+4}$

13. $f(t) = \left[\sin^2 t + \cos(5t)\cos(3t)\right] 2e^{2t}$ $\qquad F(p) = \dfrac{1}{p-2} + \dfrac{p-2}{(p-2)^2+64}$

14. $f(t) = t\,[\cos(2t) + \sin(3t)]$ $\qquad F(p) = \dfrac{p^2-4}{(p^2+4)^2} + \dfrac{6p}{(p^2+9)^2}$

15. $f(t) = (t+1)\sin(2t) + t^2 \sin t$ $\qquad F(p) = \dfrac{2}{p^2+4} + \dfrac{4p}{(p^2+4)^2} + \dfrac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}$

16. $f(t) = t\, e^{2t} \sin(3t)$ $\qquad F(p) = \dfrac{6(p-2)}{[(p-2)^2+9]^2}$

17. $f(t) = \dfrac{e^{2t}-1}{t}$ $\qquad F(p) = \ln \dfrac{p}{p-2}$

18. $f(t) = \dfrac{e^{2t}-e^{3t}}{t}$ $\qquad F(p) = \ln \dfrac{p-3}{p-2}$

19. $f(t) = \dfrac{\sin^2(2t)}{t}$ $\qquad F(p) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{\sqrt{p^2+16}}{p}$

20. $f(t) = \dfrac{1-e^{-3t}}{t\, e^t}$ $\qquad F(p) = \ln \dfrac{p+4}{p+1}$

21. $f(t) = \dfrac{\cos t - 1}{t\, e^t}$ $\qquad F(p) = \ln \dfrac{p+1}{\sqrt{(p+1)^2+1}}$

22. $f(t) = \dfrac{\sin(4t)\ \sin(2t)}{t}$ $\qquad F(p) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{p^2+36}{p^2+4}$

23. $f(t) = \dfrac{\sin(5t)\ \cos(3t)}{t}$ $\qquad F(p) = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{p}{8} - \operatorname{arctg}\dfrac{p}{2}\right)$

24. $f(t) = \dfrac{e^{-2t}\sin t}{t}$ $\qquad F(p) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p+2)$

25. $f(t) = \dfrac{\sin^3 t}{t}$ $\qquad F(p) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3}{4}\operatorname{arctg} p + \dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{p}{3}$

26. $f(t) = \dfrac{\sin(6t)\ \sin(3t)}{t\, e^{3t}}$ $\qquad F(p) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{(p+3)^2+81}{(p+3)^2+9}$

27. $f(t) = \cos(t-1)\, \eta(t-1)$ $\qquad F(p) = \dfrac{p\, e^{-p}}{p^2+1}$

28. $f(t) = e^{t-2}\eta(t-2)$ $\qquad F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p-1}$

29. $f(t) = \displaystyle\int_0^t (\tau - \cos\frac{\tau}{2} + e^{-\tau}\tau^3)d\tau$ $\qquad F(p) = \dfrac{1}{p^3} - \dfrac{4}{4p^2+1} + \dfrac{6}{p(p+1)^4}$

30. $f(t) = \displaystyle\int_0^t (\tau+1)\ \cos(3\tau) d\tau$ $\qquad F(p) = \dfrac{1}{p^2+9} + \dfrac{p^2-9}{p(p^2+9)^2}$

31. $f(t) = \int\limits_0^t e^{-2\tau} e^{\tau - t} d\tau$ $\qquad F(p) = \dfrac{1}{(p+2)(p+1)}$

32. $f(t) = \int\limits_0^t e^{2\tau} \sin(3\tau) d\tau$ $\qquad F(p) = \dfrac{3}{p(p-2)^2 + 9p}$

5.2 Spätná Laplaceova transformácia

Obrátený postup, teda ak ku známemu obrazu $F(p)$ priradíme korešpondujúci predmet $f(t)$, nazývame **spätná Laplaceova transformácia**. Pomocou nej môžeme nájsť riešenie niektorých diferenciálnych rovníc resp. systémov obyčajných diferenciálnych rovníc oveľa jednoduchšie a rýchlejšie. K danému obrazu spätná Laplaceova transformácia priradí predmet $f(t)$ v tvare

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\, e^{pt} dp.$$

Ak funkcia $F(p)$ je analytická až na konečný počet singulárnych bodov $a_k \in C$, $k = 1, \ldots, m$ a a_k sú póly funkcie $F(p)$, tak k danému obrazu $F(p)$ môžeme nájsť predmet $f(t)$:

1. pomocou rezíduí v póloch

$$f(t) = \begin{cases} \sum\limits_k \operatorname{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=a_k} & \text{pre } \ t > 0, \\ 0 & \text{pre } \ t \leqq 0, \end{cases}$$

2. rozkladom $F(p)$ na parciálne zlomky a následným použitím tabuľky korešpondencií základných funkcií a základných viet.

Príklad 5.8. *Pomocou spätnej Laplaceovej transformácie nájdime predmet $f(t)$ k obrazu $F(p) = \dfrac{p-2}{p(p+4)}$.*

Riešenie: Úlohu vyriešime pre porovnanie oboma spôsobmi.

1. Ak chceme nájsť predmet $f(t)$ pomocou rezíduí, musíme najprv nájsť póly funkcie $F(p) = \frac{p-2}{p(p+4)}$. Funkcia $F(p)$ má dva jednoduché póly $(k = 0)$ a to $a_1 = 0$, $a_2 = -4$. Podľa Vety 4.2 rezíduá v týchto póloch sú nasledovné

$$\operatorname{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=a_1} = \operatorname{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=0} = \lim_{p\to 0}\left[(p-0)\,\frac{p-2}{p(p+4)}\, e^{pt}\right] = -\frac{1}{2}\, e^0 = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=a_2} = \operatorname{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=-4} = \lim_{p\to 0}\left[(p+4)\,\frac{p-2}{p(p+4)}\, e^{pt}\right] = \frac{3}{2}\, e^{-4t}.$$

Teda

$$f(t) = \text{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=0} + \text{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=-4} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\, e^{-4t}.$$

2. Rozkladom $F(p)$ na parciálne zlomky dostaneme

$$F(p) = \frac{p-2}{p(p+4)} = \frac{-\frac{1}{2}}{p} + \frac{\frac{3}{2}}{p+4}.$$

Z tabuľky korešpondencií vyplýva

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{p} \doteqdot -\frac{1}{2}\,1 = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{2}\,\frac{1}{p+4} \doteqdot \frac{3}{2}\, e^{-4t}.$$

Využitím vety o lineárnosti (1) (násobiť predmet $f(t)$ konštantou c znamená násobiť obraz $F(p)$ rovnakou konštantou c) dostávame

$$f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\, e^{-4t}.$$

Príklad 5.9. *Pomocou spätnej Laplaceovej transformácie nájdime predmet $f(t)$ ku obrazu $F(p) = \dfrac{p+3}{(p+1)^3}$.*

Riešenie: Úlohu vyriešime pomocou rezíduí. Funkcia $F(p)$ má práve jeden trojnásobný pól ($k = 3$) a to $a = -1$. Podľa Vety 4.2 rezíduum v póle $a = -1$ je

$$\begin{aligned}
\text{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=a} = \text{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=-1} &= \frac{1}{2!}\lim_{p\to-1}\left[(p+1)^3\,\frac{p+3}{(p+1)^3}\, e^{pt}\right]'' = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\left[(p+3)\, e^{pt}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\left[e^{pt} + (p+3)\, t\, e^{pt}\right]' = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\left[t\, e^{pt} + t\, e^{pt} + (p+3)\, t^2\, e^{pt}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left(2\, t\, e^{-t} + 2\, t^2\, e^{-t}\right) = t\, e^{-t}(1+t).
\end{aligned}$$

Preto

$$f(t) = \text{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=-1} = t\, e^{-t}(1+t).$$

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách nájdite pomocou spätnej Laplaceovej transformácie predmet $f(t)$ ku obrazu $F(p)$:

33. $F(p) = \dfrac{2}{p(p-2)(p-3)}$ $\qquad f(t) = \dfrac{1}{3} - e^{2t} + \dfrac{2}{3}\, e^{3t}$

34. $F(p) = \dfrac{4p^2 + 16p - 8}{p^3 - 4p}$ $f(t) = 2 - 3\,e^{-2t} + 5\,e^{2t}$

35. $F(p) = \dfrac{p^2 + p + 1}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$ $f(t) = \dfrac{1}{2}\,e^{-t} - 3\,e^{-2t} + \dfrac{7}{2}\,e^{-3t}$

36. $F(p) = \dfrac{3p^2 - 10p + 4}{p^3 - p^2 - 4p + 4}$ $f(t) = e^t - e^{2t} + 3\,e^{-2t}$

37. $F(p) = \dfrac{1}{(p+3)(p+1)^2}$ $f(t) = \dfrac{2t\,e^{-t} - e^{-t} + e^{-3t}}{4}$

38. $F(p) = \dfrac{1}{p(p-2)^2}$ $f(t) = \dfrac{1 - e^{2t} + 2t\,e^{2t}}{4}$

39. $F(p) = \dfrac{p^2 - 2p + 2}{p^3 - 2p^2 + p}$ $f(t) = t\,e^t - e^t + 2$

40. $F(p) = \dfrac{p}{(p+3)(p-1)^2}$ $f(t) = \dfrac{3}{16}e^t + \dfrac{1}{4}t\,e^t - \dfrac{3}{16}\,e^{-3t}$

41. $F(p) = \dfrac{p^2}{p^3 + 5p^2 + 8p + 4}$ $f(t) = e^{-t} - 4t\,e^{-2t}$

42. $F(p) = \dfrac{p^2 - 3p + 2}{p^3 + 2p^2 + p}$ $f(t) = 2 + 6t\,e^{-t} - e^{-t}$

43. $F(p) = \dfrac{1}{(p+3)(p+1)^3}$ $f(t) = \dfrac{2t^2e^{-t} - 2t\,e^{-t} + e^{-t} - e^{-3t}}{8}$

44. $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$ $f(t) = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{t}{2} + \dfrac{2}{3}\,e^t + \dfrac{1}{12}\,e^{-2t}$

45. $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)^3}$ $f(t) = \dfrac{t^2e^t}{2} + t\,e^t$

46. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)^2}$ $f(t) = 2e^{-t} + t\,e^{-t} + t - 2$

47. $F(p) = \dfrac{p^3 - 2p^2 + 4}{p^3(p-2)^2}$ $f(t) = \dfrac{1}{4} + t + \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{e^{2t}}{4} + \dfrac{t\,e^{2t}}{2}$

48. $F(p) = \dfrac{7p^2 - 2p + 5}{p^3 - p^2 + p - 1}$ $f(t) = 5\,e^t + 2\cos t$

49. $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2 - 2p + 2)}$ $f(t) = \dfrac{1 - e^t\cos t + e^t\sin t}{2}$

50. $F(p) = \dfrac{4p+3}{(p-1)(p^2 + 2p + 5)}$ $f(t) = \dfrac{7\,e^t - 7\cos(2t)\,e^{-t}}{8} + \dfrac{9\sin(2t)\,e^{-t}}{8}$

51. $F(p) = \dfrac{p}{(p-2)(p+1)(p^2+1)}$ $f(t) = \dfrac{2}{15}\,e^{2t} + \dfrac{1}{6}\,e^{-t} - \dfrac{1}{10}(3\,\cos t + \sin t)$

52. $F(p) = \dfrac{p^2 + 2p + 3}{p(p^2 + 2p + 5)}$ $f(t) = \dfrac{3 + 2\,e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t)}{5}$

53. $F(p) = \dfrac{2p^3 + 2p^2 + 3p + 2}{p(p+1)(p^2+1)}$ $f(t) = 2 + \dfrac{e^{-t} - \cos t + \sin t}{2}$

54. $F(p) = \dfrac{1}{(p-2)(p-3)(p^2+1)}$ $\qquad f(t) = -\dfrac{e^{2t}}{5} + \dfrac{e^{3t}}{10} + \dfrac{\cos t + \sin t}{10}$

55. $F(p) = \dfrac{p^3+p^2+p+1}{p^2(p^2+2p+2)}$ $\qquad f(t) = \dfrac{t}{2} + e^{-t}\cos t - \dfrac{1}{2}e^{-t}\sin t$

56. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+2p+2)(p^2+2p+5)}$ $\qquad f(t) = \dfrac{e^{-t}\sin t}{3} - \dfrac{e^{-t}\sin(2t)}{6}$

57. $F(p) = \dfrac{-p^2}{(p+1)^2(p^2+1)}$ $\qquad f(t) = \dfrac{e^{-t} - t\,e^{-t} - \cos t}{2}$

5.3 Riešenie diferenciálnych rovníc pomocou spätnej Laplaceovej transformácie

Spätnú Laplaceovu transformáciu môžeme využiť na zjednodušenie riešenia diferenciálnych rovníc vyšších rádov. Dôležité je, aby pre danú diferenciálnu rovnicu n–tého rádu bolo k dispozícií n podmienok. Pri tomto spôsobe vychádzame z predpokladu korešpondencie výrazu $x(t) \doteqdot X(p)$. Diferenciálnu rovnicu v závislosti na reálnej premennej t prevedieme pomocou Laplaceovej transformácie na tzv. operátorový tvar, na rovnicu v závislosti na komplexnej premennej p, a takto získanú rovnicu vyriešime. Takéto riešenie bude obrazom riešenia pôvodnej diferenciálnej rovnice a nájdeme ho obráteným postupom pomocou spätnej Laplaceovej transformácie. Postupujeme nasledovne:

1. Aplikáciou vety o derivovaní predmetu (7) a využitím daných podmienok diferenciálnej rovnice nájdeme obrazy k $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$, $\ldots$, $x^{(n)}(t)$.

2. Pomocou tabuľky korešpondencií a viet nájdeme obraz pravej strany diferenciálnej rovnice.

3. Porovnaním oboch strán dostaneme operátorovú rovnicu pre $X(p)$ a p, z ktorej vyjadríme $X(p)$ a pomocou spätnej Laplaceovej transformácie k nej nájdeme príslúchajúci predmet $x(t)$, ktorý je riešením pôvodnej diferenciálnej rovnice.

Príklad 5.10. *Riešme diferenciálnu rovnicu* $x''' - 3x' + 2x = 8t\,e^{-t}$, *ak* $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$.

Riešenie: Predpokladáme, že $x(t) \doteqdot X(p)$. Podľa vety o derivovaní predmetu (7) a využitím daných podmienok platí

$$\begin{aligned}
x'(t) &\doteqdot p\,X(p) - x(0) = p\,X(p) - 0 = p\,X(p),\\
x''(t) &\doteqdot p^2X(p) - p\,x(0) - x'(0) = p^2\,X(p) - p\,0 - 0 = p^2X(p),\\
x'''(t) &\doteqdot p^3X(p) - p^2x(0) - p\,x'(0) - x''(0) = p^3X(p) - p^2\,0 - p\,0 - 1 = p^3X(p) - 1.
\end{aligned}$$

Obrazom funkcie na pravej strane diferenciálnej rovnice je podľa Príkladu 5.2

$$8t\,e^{-t} \doteqdot \frac{8}{(p+1)^2}.$$

Využitím vzťahu $x(t) \doteqdot X(p)$ dostaneme operátorovú rovnicu

$$p^3X(p) - 1 - 3p\,X(p) + 2\,X(p) = \frac{8}{(p+1)^2}.$$

Z toho si vyjadríme

$$X(p) = \frac{9+2p+p^2}{(p+1)^2(p^3-3p+2)} = \frac{p^2+2p+9}{(p+1)^2(p-1)^2(p+2)}.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice $x(t)$ môžeme nájsť pomocou rezíduí alebo rozkladom na parciálne zlomky. Rozložíme $X(p)$ na parciálne zlomky

$$X(p) = \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{2}{(p+1)^2}.$$

Pomocou tabuľky korešpondencií platí

$$\frac{1}{p+2} \doteqdot e^{-2t}, \qquad \frac{1}{p-1} \doteqdot e^{t}, \qquad \frac{1}{p^2} \doteqdot t$$

a využitím vety o tlmení (3) (násobiť predmet $f(t)$ výrazom e^{at} znamená odčítať od argumentu p obrazu $F(p)$ konštantu a) dostávame

$$\frac{1}{(p-1)^2} \doteqdot t\,e^{t}, \qquad \frac{2}{(p+1)^2} \doteqdot 2t\,e^{-t}.$$

Nakoniec využitím vety o lineárnosti (1) (násobiť predmet $f(t)$ konštantou c znamená násobiť obraz $F(p)$ rovnakou konštantou c) môžeme písať

$$x(t) = e^{-2t} - e^{t} + t\,e^{t} + 2t\,e^{-t}.$$

Neriešené úlohy:

V nasledujúcich úlohách použitím Laplaceovej transformácie nájdite riešenie $x(t)$ diferenciálnej rovnice:

58. $x'' - 5x' + 6x = 2,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ $\quad x(t) = \dfrac{1}{3} - e^{2t} + \dfrac{2}{3}\,e^{3t}$

59. $x'' + 4x' + 3x = e^{-t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ $\quad x(t) = \dfrac{2t\,e^{-t} - e^{-t} + e^{-3t}}{4}$

60. $x'' - 2x' = e^{2t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ $\quad x(t) = \dfrac{1 - e^{2t} + 2t\,e^{2t}}{4}$

61. $x'' - x' = e^{t},\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$ $\quad x(t) = t\,e^{t} - e^{t} + 2$

62. $x'' + 2x' - 3x = e^{t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$ $\quad x(t) = \dfrac{3}{16}e^{t} + \dfrac{1}{4}t\,e^{t} - \dfrac{3}{16}\,e^{-3t}$

63. $x'' - 2x' + x = e^{t},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$ $\quad x(t) = \dfrac{t^2 e^{t}}{2} + t\,e^{t}$

64. $x'' + 2x' + x = t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ $\quad x(t) = 2e^{-t} + t\,e^{-t} + t - 2$

65. $x'' - 2x' + 2x = 1,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ $\quad x(t) = \dfrac{1 - e^{t}\cos t + e^{t}\sin t}{2}$

66. $x'' - x' - 2x = \cos t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ $\quad x(t) = \dfrac{2}{15}\,e^{2t} + \dfrac{1}{6}\,e^{-t} - \dfrac{1}{10}(3\,\cos t + \sin t)$

67. $x'' + 2x' + 5x = 3,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$ $\quad x(t) = \dfrac{3 + 2\,e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t)}{5}$

68. $x'' + x' = \cos t,\ x(0) = 2,\ x'(0) = 0$ $\quad x(t) = 2 + \dfrac{e^{-t} - \cos t + \sin t}{2}$

69. $x'' - 5x' + 6x = \sin t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ $\quad x(t) = -\dfrac{e^{2t}}{5} + \dfrac{e^{3t}}{10} + \dfrac{\cos t + \sin t}{10}$

70. $x'' + 2x' + x = \sin t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1$ $\quad x(t) = \dfrac{e^{-t} - t\,e^{-t} - \cos t}{2}$

V nasledujúcich úlohách riešte diferenciálne rovnice iba v množine obrazov:

71. $x''' + 2x'' + x' = 2\,e^{-2t},\ x(0) = 2,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 1$ $\quad X(p) = \dfrac{2p^3 + 9p^2 + 15p + 12}{p(p+2)(p+1)^2}$

72. $x'' + x' = t\,\cos(2t),\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ $\quad X(p) = \dfrac{p^2 - 4}{p(p+1)(p^2+4)^2}$

73. $x'' + 2x' + 2x = 2\,e^{-t}\sin t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1$ $\quad X(p) = \dfrac{p^3 + 5p^2 + 8p + 8}{(p^2 + 2p + 2)^2}$

Literatúra

[1] *Berman, G. N.*, **Zbierka úloh z matematickej analýzy**, SVTL, Bratislava (1955).

[2] *Demidovič, B. P.*, **Sbornik zadač po kursu matematičeskovo analiza**, Nauka, Moskva (1975).

[3] *Džurina, J. – Grinčová, A. – Pirč, V.*, **Matematická analýza 2**, Košice (2005), ISBN 80-8073-413-5.

[4] *Eliáš, J. – Horváth J. – Kajan, J.*, **Zbierka úloh z vyššej matematiky 3**, ALFA, Bratislava (1967), ISBN 63-003-71.

[5] *Eliáš, J. – Horváth J. – Kajan, J.*, **Zbierka úloh z vyššej matematiky 4**, ALFA, Bratislava (1968), ISBN 63-026-70.

[6] *Galajda, P. – Schröter, Š.*, **Funkcie komplexnej premnnej a operátorový počet**, ALFA, Bratislava (1991).

[7] *Grinčová, A.*, **Matematika II a jej využitie v ekonómii**, FEI TUKE, Košice (2012), ISBN 978-80-553-0851-7.

[8] *Greguš, M. – Švec, M. – Šeda, V.*, **Obyčajné diferenciálne rovnice**, ALFA, Bratislava (1985).

[9] *Ivan, J.*, **Matematika II**, ALFA, Bratislava (1989).

[10] *Jirásek, F. – Kriegelstein, E. – Tichý, Z.*, **Sbírka řešených přikladů z matematiky**, SNTL/ALFA, Praha (1982).

[11] *Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M.*, **Matematika II**, SVTL, Bratislava (1961).

[12] *Kondáš, J. – Kudláč, M.*, **Zbierka riešených a neriešených úloh z matematickej analýzy II**, FEI TUKE, Košice (2005), ISBN 80-8073-428-3.

[13] *Mišík, L.*, **Funkcionálna analýza** (1989).

[14] *Pirč, V. – Haščák, A.*, **Matematická analýza II**, Elfa s.r.o. Košice (1999), ISBN 80-88964-06-7.

[15] *Pták, P.*, **Calculus II**, ČVUT, Praha (1997), ISBN 80-01-01207-7.

[16] *Rudin, W.*, **Principles of mathematical analysis**, McGraw Hill, New York (1976).

[17] *Šoltés, V. – Švidroňová, E.*, **Zbierka úloh z vyššej matematiky II**, Edičné stredisko TU v Košiciach (1992).

[18] *Knežo, D. – Kimáková, Z. – Andrejiová, M.*, **Matematika 2**, Edičné stredisko TU v Košiciach (2010), ISBN 978-80-553-0546-2.

[19] *Walter, W.*, **Analysis 2. Berlin**, Springer – Verlag (1995).

Názov: MATEMATIKA III v príkladoch

Autori: Anna Grinčová, Jana Petrillová

Vydavateľ: Technická univerzita v Košiciach
Rok: 2022
Vydanie: prvé
Rozsah: 91 strán

ISBN

ISBN