I. ÚROKOVANIE

1. Základné pojmy

Kapitál (istina) je suma, ktorú poskytuje veriteľ dlžníkovi za určitý poplatok.

Úrok je poplatok, ktorý platí dlžník veriteľovi za používanie jeho peňazí.

Veľkosť úroku sa určuje ako percentová časť istiny za úrokové obdobie.

Úroková perióda je časové obdobie, za ktoré percentová miera určuje úrok ako časť kapitálu.

Úroková miera je percentová miera, zodpovedajúca určitej perióde.

Pri konkrétnych výpočtoch využívame tzv. **úrokovú sadzbu** vyjadrenú v tvare

$$\frac{\text{úroková miera}}{100\%}.$$

Úrokové miery môžu byť ročné, polročné, štvrťročné, mesačné a týždenné.
Pre úrokové miery sa používa označenie :
ročná - per annum, p.a.
polročná - per semestrem, p.s.
štvrťročná - per quartalem, p.q.
mesačná - per mensem, p.m.
týždenná - per septimanam, p.sept.

Úrokovanie je proces spojený s výpočtom úrokov.

Klasifikácia úrokovania podľa:

a) spôsobu výpočtu
- **jednoduché úrokovanie** (úrok v každej perióde sa určuje z konštantného začiatočného vkladu, resp. sa počíta za časť úrokovej periódy).
- **zložené úrokovanie** (úrok v každej úrokovej perióde sa počíta z kapitálu zväčšeného o úroky z predchádzajúceho obdobia).

b) splatnosti úroku
- **dekurzívne (polehotné) úrokovanie** (úrok je splatný na konci úrokovacej periódy).
- **anticipatívne (predlehotné) úrokovanie** (úrok je splatný na začiatku úrokovacej periódy).

V ďalšom sa budeme zaoberať dekurzívnym úrokovaním.

2. Jednoduché dekurzívne úrokovanie

Budeme používať nasledujúce označenie:
- PV - *začiatočná hodnota kapitálu* (Present Value),
- FV - *budúca hodnota kapitálu* (Future Value),
- $i \cdot 100\%$ - *jednoduchá úroková miera* (pre jedno úrokovacie obdobie),
- t - *dĺžka úrokového obdobia*, vyjadrená v jednotkách úrokovej periódy,

- *u - úrok,*
- *i - úroková sadzba*
- i_d *- sadzba dane zo zisku* (19%).

Úrok vypočítame podľa vzťahu

$$u = PV \cdot i \cdot t\,.$$

Exaktné a bankové úrokovanie

V prípade, že doba, za ktorú sa počíta úrok, je určená v dňoch, na výpočet veličiny t môžeme použiť dve metódy:

- **ordinárna (banková) metóda** $t = \frac{n}{360}$, kde n je počet dní,
- **exaktná (presná) metóda** $t = \frac{n}{365}$, resp. $t = \frac{n}{366}$ v priestupnom roku, kde n je počet dní.

S jednoduchým úrokovaním sa stretávame najčastejšie pri vedení bankových účtov. Podľa najbežnejších praktík úrokovania sa lineárne úrokovanie deje na bankových účtoch pripisovaním úrokov a zvyšovaním hodnoty kapitálu na základe vkladového obdobia. Zvlášť sa úrokuje každý vklad, a síce na základe nasledujúcich základných informácií:

1. dátum vkladu (D_1): začiatok doby úrokovania,
2. dátum pripísania úrokov (D_2): koniec doby úrokovania,
3. nominálna úroková miera v % vzťahujúca sa na 1 rok .

Dĺžka doby úrokovania je vlastne rozdiel $t = D_2 - D_1$. V praxi sa často miesto skutočného úrokového obdobia používa v niektorých prípadoch doba - 30 dňový mesiac, miesto skutočného počtu dní v roku sa používa jednotne 360 alebo 365 (366) dní. Na možné denné úrokovanie v praxi sa využívajú rôzne spôsoby uvedené v nasledujúcej tabuľke:

Spôsob	Počet dní v mesiaci	Počet dní v roku
Nemecký	30	360
Francúzsky	Skutočný	360
Anglický	Skutočný	365
Presný	Skutočný	Skutočný

Poznámka. S rozšírením výpočtovej techniky sú stále menej používané vypracované zjednodušené spôsoby a výpočty sa robia na základe skutočného kalendárneho obdobia.

Príklad. Aký je úrok z vkladu 2 000 € za obdobie od 5.4.2014 do 31.12.2014 pri ročnej úrokovej miere 2 %? Počítajme pomocou bankovej aj exaktnej metódy.

Budúca hodnota

Ak úrok u pripočítame k začiatočnej hodnote PV, dostaneme konečnú (budúcu) hodnotu FV po čase t vyjadrenom v úrokovacích periódach.

$$FV = PV + PV \cdot i \cdot t = PV(1 + i \cdot t).$$

Veličinu $(1 + i \cdot t)$ nazývame **úročiteľom (úrokovacím faktorom)** pre obdobie dĺžky t.

Príklad. Aká je budúca hodnota pôžičky 35 000 € pri ročnej úrokovej miere 8 % za 5 mesiacov?

Súčasná hodnota

Ak zo vzťahu $FV = PV(1 + i \cdot t)$ vyjadríme veličinu PV dostávame

$$PV = \frac{FV}{1 + i \cdot t}.$$

Veličina PV vyjadruje súčasnú hodnotu kapitálu FV pri danej úrokovej sadzbe i za časové obdobie t.

Príklad. Banka poskytuje na vkladoch 4,5 % ročný úrok. Karol potrebuje o 9 mesiacov vrátiť dlžobu 8 500 €. Koľko musí teraz vložiť do banky, aby o 9 mesiacov mal túto sumu k dispozícii?

Matematický a obchodný diskont pri jednoduchom úrokovaní

Diskontovanie (tiež **odúročenie**) je výpočet súčasnej hodnoty PV závislej od budúcej hodnoty FV.

Matematický diskont D_M je úrok počítaný **zo začiatočnej hodnoty**, a pretože $D_M = FV - PV$ a súčasná hodnota PV je v tom prípade

$$PV = \frac{FV}{1 + i \cdot t},$$

je

$$D_M = FV \frac{i \cdot t}{1 + i \cdot t}.$$

V bankovej praxi je zaužívané, že úroky, ktoré si banka ponecháva vo forme diskontu sa počítajú nie na množstvo peňazí v súčasnosti PV, ale z množstva peňazí v budúcnosti. Nech d je úroková sadzba použitá pri výpočte diskontu.

Obchodný diskont D_O je úrok počítaný **z budúcej hodnoty** FV kapitálu (splatnej hodnoty) podľa diskontnej sadzby d za obdobie t

$$D_O = FV \cdot d \cdot t.$$

Pretože $D_O = FV - PV$ dostávame pre súčasnú hodnotu kapitálu

$$PV = FV(1 - d \cdot t)$$

Bankový diskont sa používa pri krátkodobých pôžičkách s dobou splatnosti, ktorá nepresahuje dĺžku úrokovacej periódy. O diskonte hovoríme aj v súvislosti s eskontom zmenky. Ak prevezme banka nejakú pohľadávku pred dobou splatnosti tejto pohľadávky, nevyplatí celú výšku pohľadávky, ale istú časť si ponechá vo forme diskontu.

Príklad. Vlastníme zmenku na 30 000 € splatnú 30.6. Peniaze však potrebujeme už 9.4. Predáme svoju zmenku v banke, ktorá si za túto službu zrazí obchodný diskont pri ročnej diskontnej sadzbe d = 0,09. Akú sumu nám banka vyplatí?

Príklad. Rozhodli sme sa predať banke zmenku nominálnej hodnoty 25 000 €, 60 dní pred dobou splatnosti. Banka si zrazí diskont a vyplatí nám 24 583,30 €. Akú diskontnú sadzbu si banka uplatňuje ?

Ak úroková sadzba i zaručí veriteľovi pri jednoduchom úrokovaní rovnaký zisk (úrok) ako pri bankovom diskonte s diskontnou sadzbou d hovoríme, že sú sadzby **ekvivalentné.**

Platí $d = \dfrac{i}{1 + i \cdot t}$ alebo $i = \dfrac{d}{1 - d \cdot t}$.

Príklad. Aká je ročná úroková sadzba i zaručujúca veriteľovi pri jednoduchom úrokovaní rovnakú mieru zisku za obdobie 8 mesiacov ako pri bankovom diskonte s ročnou diskontnou sadzbou $d = 0{,}06$?

3. Zložené úrokovanie

Ak je doba n, za ktorú počítame úrok dlhšia ako úrokovacia perióda, tak obyčajne počítame úroky pomocou zloženého úrokovania. Pri tomto úrokovaní sú úroky pravidelne pripisované v stanovených časových intervaloch. Vznikajú tak úroky z úrokov.

V prípade, že sa kapitál úročí 1 krát ročne,

budúca hodnota je

$$FV_n = PV\,(1+i)^n.$$

V prípade, že sa úroky počítajú viackrát ročne (viac úrokovacích periód-**konverzií** m za 1 rok), úroková sadzba za jednu periódu je $i = \frac{j}{m}$, kde j je ročná **nominálna** úroková miera, budúca hodnota je

$$FV_n = PV\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}.$$

Príklad. Podnikateľ má teraz možnosť kúpiť nehnuteľnosť v hodnote 800 000 €, ktorej hodnota o 2 roky bude 1 050 000 €. Čo bude pre neho výhodnejšie, kúpiť nehnuteľnosť teraz alebo vložiť peniaze do banky s ročnou úrokovou mierou 8 % a nehnuteľnosť kúpiť o dva roky?

Príklad. Vklad 60 000 € vzrástol na dvojnásobok za 12 rokov. Akou ročnou úrokovou sadzbou bol úročený?

Nominálna a efektívna úroková miera

Efektívna ročná úroková miera i^* je úroková miera, ktorá pri jednoduchom úrokovaní za jeden rok zabezpečí rovnaké množstvo peňazí, ako nominálna pri zloženom úrokovaní za jeden rok.

$$i^* = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

Efektívna úroková miera nám umožňuje porovnávať rôzne nominálne úrokové miery na rovnaké časové obdobie, avšak s rôznou frekvenciou pripisovania úrokov. Platí $i^* > j$.

Príklad. Nájdime efektívnu úrokovú mieru, ktorá odpovedá úrokovej miere 10 % p.a., ak sú úroky pripisované a) polročne b) štvrťročne c) mesačne d) denne

Príklad. Rozhodnime, ktorý terminovaný účet je výhodnejší pre vkladateľa.

a) 5 % p.a. s denným pripisovaním úrokov,

b) 5,2 % p.a. s polročným pripisovaním úrokov.

Diskontovanie pri zloženom úrokovaní

Podobne ako pri jednoduchom úrokovaní, môžeme aj pri zloženom úrokovaní zaviesť matematický a obchodný diskont.

Matematický diskont pri zloženom úrokovaní je

$$D_M = FV - PV = FV \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) = FV \cdot \left(1 - v^n\right)$$

$v = \dfrac{1}{1+i}$ sa nazýva diskontný faktor (odúročiteľ).

Obchodný diskont pri zloženom úrokovaní sa nedá určiť priamo, iba ako rozdiel budúcej a súčasnej hodnoty kapitálu.

Súčasná hodnota PV pri danej diskontnej sadzbe d je za n úrokových periód rovná

$$PV = FV \cdot (1-d)^n$$

a obchodný diskont $D_O = FV - PV$ pre zložené úrokovanie je

$$D_O = FV \cdot [1-(1-d)^n].$$

4. Zmiešané úrokovanie

Nech sa dá úrokové obdobie vyjadriť v tvare $n+t$, kde n je celé číslo udávajúce počet rokov, i je ročná úroková sadzba a t je číslo menšie ako jedna, udávajúce časť roka. Potom niekedy počítame budúcu hodnotu takto

$$FV = PV(1+i)^n(1+i \cdot t).$$

Tento princíp nazývame **zmiešaným úrokovaním**, vzniká kombináciou zloženého a jednoduchého úrokovania.

Príklad. Vypočítajme ako nám narastie vklad 250 000 € po uplynutí 6 rokov a 160 dní pri zmiešanom úrokovaní a ročnej úrokovej miere 5 %.

5. Spojité úrokovanie

Súčasná výpočtová technika umožňuje výpočet úrokov pre dĺžku úrokovej periódy $\Delta t \to 0$, teda pre počet konverzií $m \to \infty$. Takýto proces úročenia nazývame spojité úrokovanie. Ak t je dĺžka úrokového obdobia v rokoch, potom pre budúcu hodnotu FV po čase t dostávame

$$FV = \lim_{m \to \infty} PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt}$$

Pretože

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} = e^j,$$

dostávame

$$FV_t = PV \cdot e^{j \cdot t}.$$

Výraz $e^{j \cdot t}$ sa nazýva **úrokovací faktor.**

Za predpokladu, že nominálna úroková j sadzba nie je konštantná, ale mení sa v čase, budeme ju nazývať **intenzita úrokovania** $\delta(t)$ a budúcu hodnotu v závislosti na súčasnej hodnote môžeme vyjadriť takto

$$FV = PV \cdot e^{\int_{t_0}^{t_1} \delta(t) \cdot dt}.$$

Ak je intenzita úrokovania $\delta(t)$ konštantná funkcia, možno ju reprezentovať ako nominálnu úrokovú sadzbu j, pričom $i^* = e^j - 1$ je **efektívna úroková sadzba**.

Príklad. Banka ponúka 3 % nominálnu úrokovú mieru pri spojitom úrokovaní. Akú hodnotu bude mať náš vklad 18 000 € po roku a 7 mesiacoch?

Príklad. Za aký čas sa môžeme stať milionárom, za predpokladu, že náš vklad 100 000 € bude dlhodobo spojito úrokovaný nominálnou úrokovou mierou 5 %?

Príklad. Pre 8 % nominálnu úrokovú mieru nájdime odpovedajúcu efektívnu úrokovú mieru pri dennom a spojitom úrokovaní.

6. Zdaňovanie úrokov

Ak uvažujeme **zdanenie úrokov** ročnou úrokovou sadzbou i_d, potom
v prípade **jednoduchého úrokovania** je budúca hodnota

$$FV = PV\left[1 + i\,(1 - i_d)\,t\right],$$

v prípade **zloženého úrokovania** je budúca hodnota

$$FV = PV\left[1 + i\,(1 - i_d)\right]^n, \ resp.\ FV = PV\left[1 + \frac{i\,(1 - i_d)}{m}\right]^{m \cdot n}.$$

Poznámka. Podobne sa dajú odvodiť vzťahy so zdanením úrokov aj pre ostatné typy úrokovania.

7. Princíp finančnej ekvivalencie

Niekedy je potrebné platby uskutočniť v inom termíne, ako bolo dohodnuté. V takom prípade je potrebné určiť výšku platby k novému termínu. Ekvivalentné sú také finančné operácie, ktoré dávajú k tomu istému dátumu rovnaké platby. Princíp finančnej ekvivalencie umožňuje zhodnocovať platby uskutočnené v rôznych termínoch. Dátum, ku ktorému porovnávame rôzne platby, nazývame *porovnávacím dátumom*.

Je potrebné rozlišovať jednoduché a zložené úrokovanie. K zostaveniu hodnotovej rovnice budeme využívať vzťahy pre výpočet budúcej hodnoty:
- v prípade jednoduchého úrokovania $FV = PV(1 + i \cdot t)$,
- v prípade zloženého úrokovania $FV = PV(1 + i)^n$.

Poznámka. Všetky platby musíme porovnávať v spoločnom bode na časovej osi. V prípade jednoduchého úrokovania ich porovnávame v nule, teda na začiatku úrokovacieho obdobia. V prípade zloženého úrokovania ich môžeme porovnávať v ľubovoľnom spoločnom bode na časovej osi.

Príklad. Dlžník má veriteľovi zaplatiť nasledujúce platby 120 € o 3 mesiace, 150 € o 5 mesiacov a 170 € o 11 mesiacov. Chce ich nahradiť jedinou ekvivalentnou platbou o pol roka pri 10% ročnej úrokovej miere. Vypočítajme veľkosť platby.

Príklad. Dlžník má veriteľovi zaplatiť nasledujúce platby 1 000 € o rok, 1 500 € o 2 roky a 2 000 € o 4 roky. Chce ich nahradiť jedinou ekvivalentnou platbou o 2 roky pri 10% ročnej úrokovej miere. Vypočítajme veľkosť platby.

8. Inflácia

Vzorce pre zložené úrokovanie môžeme použiť na výpočty týkajúce sa inflácie. Najrozšírenejším spôsobom je použitie tzv. cenových indexov, ktoré sú založené na maloobchodnej cene tzv. spotrebného koša vybraných položiek tovarov a služieb. Pri stanovení ceny celého koša sa berú ceny jednotlivých položiek s určitou váhou. Cena určitých výrobkov môže narásť nielen vplyvom inflácie, ale tiež technickou inováciou. V USA sa používa tzv. *CPI* (Consumer Price Index), vo Veľkej Británii je to *RPI* (Retail Price Index), ktoré sú mesačne doplňované.

Cenový index sa používa na výpočet miery inflácie r_{infl} (rate of inflation) za dané obdobie ako percentuálna zmena cenového indexu za dané obdobie, t.j.

$$\frac{CPI_{t_2} - CPI_{t_1}}{CPI_{t_1}} 100\,\%$$

Veľmi často sa počíta priemerná ročná miera inflácie za dané obdobie. Vzorec zloženého úrokovania $FV = PV(1+i)^n$ aplikujeme na príslušné hodnoty cenového indexu tak, že $FV \approx CPI_{t+n}$, $PV \approx CPI_t$. Teda

$$CPI_{t+n} = CPI_t \left(1 + r_{infl}\right)^n$$

Príklad. Aká bola priemerná ročná miera inflácie v krajine X v období od konca roku 2000 do konca roku 2005, ak CPI_{2000} = 112,6 a CPI_{2005} = 208,3?

Inflácia ovplyvňuje mieru zisku. Preto rozlišujeme: nominálnu mieru zisku r_{nom} (nominal rate of return), ktorá nerešpektuje infláciu a reálnu mieru zisku r_{real} (real rate of return), pričom

$$1 + r_{nom} = (1 + r_{real})(1 + r_{infl})$$

Príklad. Ak je nominálna miera zisku 6 % a miera inflácie je 3,3 %. Aká je reálna miera zisku?

Zhrnutie

Jednoduché úrokovanie $FV = PV\left(1 + i \cdot t\right)$

Zložené úrokovanie $FV = PV\left(1 + i\right)^n \; alebo \; FV = PV\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$

Zmiešané úrokovanie $FV = PV\left(1 + i\right)^n \left(1 + i \cdot t\right)$

Spojité úrokovanie $FV = PV\left(1 + i\right)^t = PV \cdot e^{j \cdot t}$