

Určitý integrál

Pojem určitý integrál

Definícia 1 Majme spojitú a nezápornú funkciu $f : \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Rozdelíme interval $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ na podintervaly pomocou deliacich bodov $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 < \mathbf{x}_1 < \dots < \mathbf{x}_{n-1} < \mathbf{x}_n = \mathbf{b}$. Každý takýto systém podintervalov nazveme *delenie intervalu* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Dĺžku i -teho čiastočného intervalu $\langle \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i \rangle$, kde $i = 1, 2, \dots, n$ označujeme $\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}$.

Definícia 2 Číslo $\|D\| = \max\{\Delta \mathbf{x}_1, \Delta \mathbf{x}_2, \dots, \Delta \mathbf{x}_n\}$ nazývame *normou delenia* D .

Definícia 3 Ak pre každé prirodzené číslo n je dané jedno delenie D_n intervalu $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, hovoríme o postupnosti delení intervalu $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ sa nazýva *normálna*, ak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\| = 0$.

Definícia 4 Nech t_i pre $i = 1, 2, \dots, n$ je ľubovoľný bod z intervalu $\langle \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i \rangle$. *Integrálnym súčtom funkcie* f pre delenie D intervalu $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ a pre danú voľbu čísel t_1, t_2, \dots, t_n nazývame číslo

$$S(f, D) = f(t_1)\Delta \mathbf{x}_1 + f(t_2)\Delta \mathbf{x}_2 + \dots + f(t_n)\Delta \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta \mathbf{x}_i.$$

Definícia 5 Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Nech pre ľubovoľnú normálnu postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ a ľubovoľnú voľbu bodov t_i v čiastočných intervaloch existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n)$, potom hovoríme, že funkcia f je *integrovateľná* na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ a túto limitu nazývame *určitým integrálom funkcie* f na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Teda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta \mathbf{x}_i = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

kde \mathbf{a} je dolná hranica a \mathbf{b} je horná hranica určitého integrálu.

Výpočet a vlastnosti určitého integrálu

Veta 1 (Newton – Leibnizov vzorec) *Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech má na intervale $\langle a, b \rangle$ primitívnu funkciu F . Potom platí*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Veta 2 *Nech $a < b$ a nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom*

- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^a f(x) dx = 0$

Veta 3 *Nech funkcie f, g sú integrovateľné funkcie na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Potom platí*

$$\int_a^b [k_1 \cdot f(x) + k_2 \cdot g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx.$$

Veta 4 *Nech $a < b < c$. Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech je integrovateľná na intervale $\langle b, c \rangle$. Potom je funkcia f integrovateľná aj na intervale $\langle a, c \rangle$ a platí*

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Veta 5 *Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle -a, a \rangle$ a je*

- *párna*, tak $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
- *nepárna*, tak $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Existencia určitého integrálu

Veta 6 Ak je funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$, tak je na tomto intervale integrovateľná.

Veta 7 Nech funkcia f je ohraničená na intervale $\langle a, b \rangle$ a má v tomto intervale konečný počet bodov nespojitosti, potom je na tomto intervale integrovateľná.

Substitučná metóda

Veta 8 Nech funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a nech funkcia φ má spojitú deriváciu na intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$ a zobrazuje interval $\langle a, b \rangle$ do $\langle \alpha, \beta \rangle$. Potom platí

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt.$$

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x) dx = dt \\ x = a \rightarrow t = \varphi(a) = \alpha \\ x = b \rightarrow t = \varphi(b) = \beta \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

Metóda per partes

Veta 9 Nech funkcie u, v majú spojitú deriváciu na intervale $\langle a, b \rangle$. Potom platí

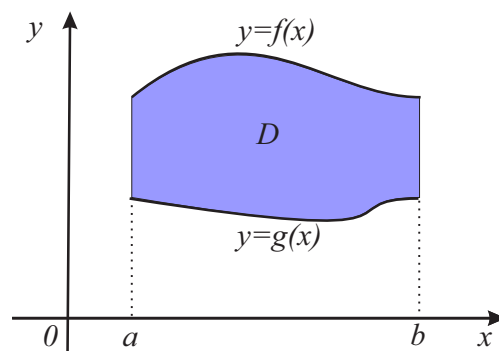
$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

Geometrické aplikácie určitého integrálu-elementárne oblasti

Definícia 6 Nech funkcie f, g sú spojité funkcie definované na intervale $\langle a, b \rangle$, $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Nech pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ je $g(x) \leq f(x)$. Potom množinu D bodov $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, kde

$$\begin{aligned} a &\leq x \leq b \\ g(x) &\leq y \leq f(x) \end{aligned}$$

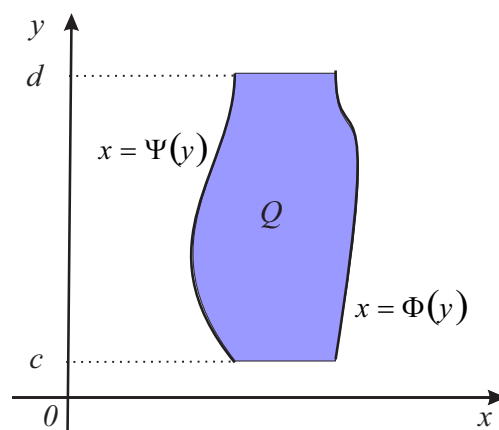
nazývame *elementárna oblasť vzhľadom na os O_x* .



Definícia 7 Nech funkcie Ψ, Φ sú spojité funkcie definované na intervale $\langle c, d \rangle$, $\Psi : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : \langle c, d \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Nech pre každé $y \in \langle c, d \rangle$ je $\Psi(y) \leq \Phi(y)$. Potom množinu Q bodov $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, kde

$$\begin{aligned} c &\leq y \leq d \\ \Psi(y) &\leq x \leq \Phi(y) \end{aligned}$$

nazývame *elementárna oblasť vzhľadom na os O_y* .



Plošný obsah rovinných útvarov

Veta 10 *Plošný obsah elementárnej oblasti D sa počíta podľa vzorca*

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Veta 11 *Plošný obsah elementárnej oblasti Q sa počíta podľa vzorca*

$$P = \int_c^d [\Phi(y) - \Psi(y)] dy$$

Objem rotačného telesa

Veta 12 *Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti D okolo O_x je*

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

Veta 13 *Objem telesa, ktoré vznikne rotáciou elementárnej oblasti Q okolo O_y je*

$$V = \pi \int_c^d [\Phi^2(y) - \Psi^2(y)] dy$$

Dĺžka krivky

Veta 14 *Ak krivka C je grafom $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá má spojitú deriváciu, tak jej dĺžka ℓ je*

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$