II. RENTOVÝ A UMOROVACÍ POČET

1. Pojem finančnej renty

Finančnou rentou (dôchodkom) nazývame postupnosť platieb (anuít) v rovnako veľkých časových intervaloch.

Klasifikácia renty podľa:

a) podmienok
- **nepodmienené** (jednotlivé platby nepodliehajú žiadnej podmienke),
- **podmienené** (výplata renty je viazaná na splnenie určitých podmienok),

b) počtu platieb
- **konečné,**
- **nekonečné,**

c) veľkosti jednotlivých platieb:
- **konštantné,**
- **premenlivé,**

d| dĺžky periódy medzi jednotlivými platbami: ročná, polročná a pod.,

e) termínu jednotlivých platieb
- **polehotná** (platby na konci každej periódy - ordinárna anuita),
- **predlehotná** (platby na začiatku každej periódy - duálna anuita),

f) termínu pripočítavania úrokov
- **s dekurzívnymi úrokmi** (úroky sa pripočítavajú na konci časovej periódy),
- **s anticipatívnymi úrokmi** (úroky sa pripočítavajú na začiatku časovej periódy).

Poznámka. V ďalšom sa budeme zaoberať polehotnou rentou s dekurzívnymi úrokmi.

2. Polehotná renta.

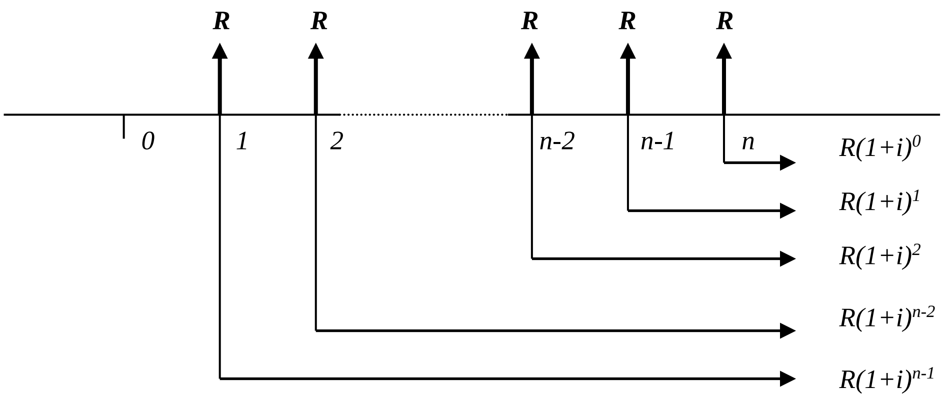
Budeme používať nasledujúce označenie:

- A_n - súčasná hodnota renty,
- S_n - budúca hodnota rent
- n - doba splatnosti renty,
- R - splátka (anuita),
- p - počet splátok za rok,
- m - počet úrokových periód (konverzií) za rok
- i - ročná úroková sadzba (ak m=1),
- j - nominálna ročná úroková sadzba (ak m>1),

Budúca hodnota.

Nech všetky platby na konci prvého, druhého, až n-tého úrokového obdobia sú vo výške R. Nech i je používaná úroková sadzba pre jedno úrokovacie obdobie.

Prvá platba renty prinesie po skončení trvania renty (po n platbách) výnos $R(1+i)^{n-1}$, druhá výnos $R(1+i)^{n-2}$ a posledná, n-tá platba, prinesie výnos $R(1+i)^0$. Môžeme to znázorniť časovým diagramom.



Pre budúcu hodnotu renty S_n po n časových periódach, teda po n splátkach, dostávame

$$S_n = R + R(1+i) + \ldots + R(1+i)^{n-1} = R\sum_{k=1}^{n}(1+i)^{k-1}$$

Odtiaľ dostávame (súčet geometrického radu)

$$\boxed{S_n = R\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \, .$$

Vzťah

$$s_{n\rceil i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

nazývame **polehotný sporiteľ**. Udáva koľkokrát prevýši budúca hodnota renty s ordinárnou anuitou hodnotu jednej platby pri úrokovej sadzbe i za jednu periódu.

Príklad. Do banky si koncom každého roka vložíme 5 000 € pri 2 % ročnej úrokovej miere. Akú sumu nasporíme počas 5 rokov?

Uvažujme p-termínovú rentu (p- splátok ročne) počas n rokov s nominálnou úrokovou sadzbou j pri m konverziách za rok. Budúca hodnota takejto renty je

$$S_n = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

Príklad. Koľko sa nám podarí nasporiť počas 6 rokov pri pravidelných mesačných vkladoch 250 € pri 2,5 % nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úročení?

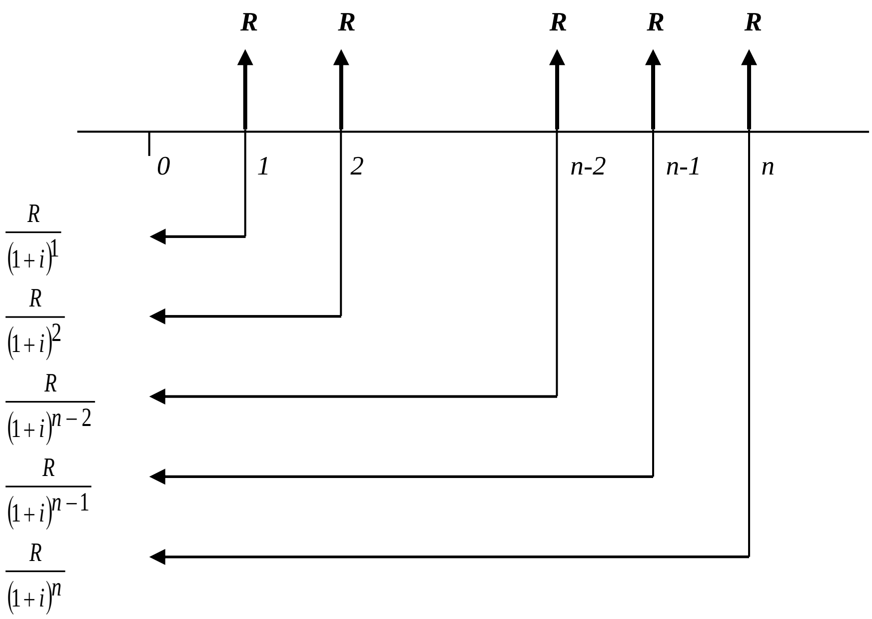
Uvažujme p-termínovú rentu (p - splátok ročne) počas n rokov s nominálnou úrokovou sadzbou j a spojitom úrokovaní. Budúca hodnota takejto renty je

$$S_n = R\frac{e^{jn}-1}{e^{\frac{j}{p}}-1}.$$

Príklad. Koľko sa nám podarí nasporiť počas 6 rokov pri pravidelných mesačných vkladoch 250 € pri 2,5 % nominálnej úrokovej miere a spojitom úročení?

Súčasná hodnota

Označme A_n súčasnú hodnotu renty.



Táto hodnota je rovná súčtu diskontovaných hodnôt všetkých platieb renty k nejakému časovému bodu v minulosti, obyčajne k začiatku prvého úrokovacieho obdobia

$$A_n = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+i)^n} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

kde

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

je **polehotný zásobiteľ**. Udáva súčasnú hodnotu renty so splátkou $R=1$ peňažných jednotiek pri ročnej úrokovej sadzbe i pre jednu periódu renty.

Z vyjadrenia súčasnej hodnoty A_n a budúcej hodnoty S_n (ak zoberieme za bod porovnania koniec renty) dostávame

$$S_n = A_n(1+i)^n.$$

Príklad. Koľko eur musíme vložiť do banky s 3% ročnou úrokovou mierou, aby sme zabezpečili pravidelné ročné vyplácanie renty vo výške 5 000 € počas 6 rokov?

Uvažujme p-termínovú rentu (p-splátok ročne) počas n rokov s nominálnou úrokovou sadzbou j pri m konverziách za rok dostávame pre $p \geq 1$

$$A_n = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

Príklad. Koľko eur musíme vložiť do banky s 3% ročnou úrokovou mierou, aby sme zabezpečili pravidelné mesačné vyplácanie renty vo výške 800 € počas 2 rokov?

Uvažujme p-termínovú rentu (p- splátok ročne) počas n rokov s nominálnou úrokovou sadzbou j a spojitom úrokovaní. Súčasná hodnota takejto renty je

$$A_n = R\frac{1-e^{-jn}}{e^{\frac{j}{p}}-1}.$$

Príklad. Do banky vložíme 50 000 €. Banka nám poskytuje 3,6 % nominálnu úrokovú mieru pri spojitom úrokovaní. Akú sumu môžeme počas piatich rokov čerpať mesačne až do vyčerpania účtu?

Príklad. Dlh 20 000 € máme vrátiť troma rovnakými splátkami po roku, po troch rokoch a po 4 rokoch pri úrokovej miere 9 %. Aké veľké budú tieto splátky?

3. Večná renta

Večná renta je renta, ktorá nie je postupnosťou platieb ukončená ($n \to \infty$). Jej súčasná hodnota je

$$A_\infty = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \ldots = \frac{R}{i}.$$

Poznámka. Uvažovať o budúcej hodnote večnej renty nemá zmysel, jej hodnota by bola ∞.

Uvažujme p-termínovú večnú rentu (p-splátok ročne) s nominálnou úrokovou sadzbou j pri m konverziách za rok dostávame pre $p \ge 1$

$$A_n = \frac{R}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

Uvažujme p-termínovú večnú rentu (p- splátok ročne) s nominálnou úrokovou sadzbou j a spojitom úrokovaní. Súčasná hodnota takejto renty je

$$A_n = \frac{R}{e^{\frac{j}{p}}-1}.$$

Príklad. Aká veľká by mala byť ročná úroková sadzba pre nekonečné vyplácanie sumy vo výške 10 000 € na konci každého roka, ak sme teraz do banky vložili 30 000 €?

Príklad. Ako by to bolo, ak by sme za rovnakých podmienok chceli vyplácať sumu 500 € každý mesiac?

4. Klasifikácia pôžičiek

V umorovacom počte študujeme metódy splácania dlhodobých pôžičiek, úverov, hypoték a pod.

Úver je poskytnutie peňažných prostriedkov na určitú dobu, za odmenu zvanú úrok. Splácanie úveru je možné z hľadiska veriteľa považovať za príjem dôchodku.

Umorovaním nazývame proces vyskytujúci sa pri splácaní úrokovanej pôžičky, t.j. takej pôžičky, u ktorej sa predpokladá, že dlžník vráti veriteľovi podľa dohodnutých podmienok okrem požičanej sumy aj úroky z tejto sumy.

Podľa **doby splatnosti** možno úvery rozdeliť na:

- **krátkodobé** – doba splatnosti nepresahuje 1 rok
- **strednodobé** – doba splatnosti je od 1 do 4 rokov
- **dlhodobé** – doba splatnosti je dlhšia ako 4 roky

Podľa **spôsobu umorovania** možno úvery rozdeliť na :

- úver **splatný naraz** spolu s úrokmi za určitú dobu (jednorázové splácanie sa obvykle používa iba pri krátkodobých úveroch)
- úver **splatný postupnými pravidelnými platbami**

  podľa charakteru týchto platieb rozlišujeme

  a) **platby s konštantnou anuitou** – platby sú stále v rovnakej výške (časť platby ide na úmor úveru a časť na zaplatenie úrokov)

b) **platby s konštantným úmorom** – platby nie sú v rovnakej výške, ale rovnaká je čiastka, ktorá znižuje uver t.j. **úmor.**

Pravidelnými platbami sa splácajú strednodobé a dlhodobé úvery.

Prehľad výšky splátok úveru vrátane úrokov z hľadiska ich časového rozloženia zostavujú banky pre svojich klientov do tzv. **umorovacieho plánu**.

Umorovací plán slúži:

- k výpočtu a prehľadu o výške jednotlivých platieb (úrok, úmor, anuita) v priebehu splácania úveru,
- k odlíšeniu úmoru a úroku za účelom správneho zaúčtovania (úmory sa platia zo zisku a úroky sa zahŕňajú do nákladov).

Ekonomická analýza dlhodobých pôžičiek spočíva v nasledujúcich krokoch:

1. Vypracovanie plánov splácania pôžičiek. **Umorovací plán** pôžičky udáva, koľko z pravidelnej splátky pre každú periódu pripadá na zúročenie zvyšku dlhu, koľko na **umorenie dlhu** a koľko je zvyšok dlhu po zaplatení **umorovacej splátky**.
2. Zhodnotenie týchto plánov pre dlžníka.
3. **Určenie výnosnosti** (efektívnosti) pôžičky pre veriteľa.

5. Pravidlá umorovania

Keď si zoberieme obchodný úver, alebo keď si zoberieme dlhodobý bankový úver na nákup bytu, tak banka si pripraví na požičanú sumu, na základe úrokovej miery, plán splácania úveru, ktorým nám dá na vedomie, aké čiastky máme platiť v priebehu trvania úveru a v akých cykloch. Podobne pri akýchkoľvek prípadoch pôžičky, je potrebné zostaviť plán. V tejto časti sa budeme zaoberať tým, ako sa tieto plány splácania úveru zostavujú, prípadne ako ich môžeme kontrolovať.

Základná úloha je nasledovná. V určitom časovom bode ($t = 0$) dostaneme pôžičku H, ktorú budeme splácať v nadväzujúcich obdobiach $t_1, t_2, \ldots, t_n$ splátkami $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pričom k celej sume pôžičky je potrebné pripočítať úrok.

Najprv sa pozrime na základné pojmy a označenia súvisiace s úlohou:

t - obdobie (v súčasnosti $t = 0$),
n - počet splátok,
H - začiatočná hodnota splácaného úveru,
H_t - zostatok dlhu na konci t-tej periódy splácania,
q - dohodnutá úroková sadzba,
k_t - veľkosť úroku na konci t- tej periódy,
S_t - hodnota splácaného kapitálu v čase t (umorovacia splátka),
A_t - veľkosť celkovej splátky (anuita).

Teoreticky môžeme zostaviť rôzne plány splácania úveru (plány umorovania pôžičky). Tieto plány spĺňajú nasledovné základné požiadavky:

- Čiastky splácania úveru sa musia rovnať hodnote úveru
  $S_1 + S_2 + ... + S_n = H$.
- Splácať je potrebné len hodnotu úveru, ale v celej čiastke.
- V priebehu umorovania zmena, ktorá sa udeje v čase t medzi H_{t-1} a H_t je $S_t = H_{t-1} - H_t$.
  Táto požiadavka udáva, že čiastky platené ako úrok neznižujú hodnotu vybraného úveru.
- Hodnota celkovej splátky v určitom čase *t*, musí byť rovná hodnote časti úveru v čase *t* a príslušnému úroku po skončení periódy *t* úverovania $A_t = q \cdot H_{t-1} + S_t$ alebo $A_t = k_t + S_t$.
  Táto podmienka formalizuje tú jednoduchú skutočnosť, že každá splátka dlhu (**anuita**), sa skladá z dvoch častí: príslušného úroku a príslušnej časti úveru.
- Suma jednotlivých celkových splátok, ktoré splácame, musí byť zhodná s hodnotou pôžičky na začiatku čiže
$$H = \frac{A_1}{1+q} + \frac{A_2}{(1+q)^2} + ... + \frac{A_n}{(1+q)^n}$$

6. Jednorázové splácanie pôžičiek

Podľa tejto konštrukcie úveru sumu *H* splatíme až po skončení *n*-tej periódy, teda bude to len jedna splátka a po častiach sa budú platiť len úroky (jednorázové splatenie po dobe splatnosti). Ako príklad môžeme spomenúť dlhopis s fixným úrokovaním. Aj štátne pôžičky - zmluvy sú často založené na takýchto dohodách. Prirodzene aj v prípade splatenia jednou sumou po dobe splatnosti sa môže stať, že počas určitej dĺžky času sa nesplácajú úroky, ale týmito otázkami sa nebudeme teraz zaoberať. V prípade jednorázovej splátky plán splácania úveru môže mať nasledujúcu formu

Obdobie t	Zostatok úveru H_t	Úrok k_t	Umor. splátka S_t	Celk. splátka A_t
1	H	q.H	0	q.H
2	H	q.H	0	q.H
.				
n	H	q.H	H	H+q.H

Vidíme, že v tejto forme splácania úveru sú čiastky splácania počas celého tohto obdobia konštantné až na konečnú splátku.

O jednorázovom splácaní hovoríme vtedy, keď sa poskytnutý úver-jeho suma počas trvania pôžičky nemení.

Príklad. Aké veľké budú platby pri dlhopise s nominálnou hodnotou 7 000 €, keď dlhopis má dobu splatnosti 4 roky, úroky budú platené ročne a na konci doby splatnosti bude dlhopis vyplatený, pričom ročná úroková miera je 12 %.

7. Rovnomerné splácanie pôžičiek

Úver H má byť splatený aj s úrokmi n splátkami, splatnými vždy koncom úrokového obdobia pri nemennej ročnej úrokovej sadzbe q. Každá splátka sa skladá z konštantnej časti úveru, a to úmoru $\frac{H}{n}$ a s premenlivého úroku, ktorý závisí od zostatku úveru. Úmor zostáva stále rovnaký a úrok sa znižuje s rastúcim úrokovým obdobím.

V tomto prípade sa zostatok úveru pravidelne znižuje preto sa znižuje aj úrok, to znamená, že pri splácaní je treba platiť stále menšiu čiastku. V prípade rovnomerného splácania platí:

a) v každom časovom bode poznáme zostatok úveru (H_{t-1}), ktorého hodnota sa zakaždým znižuje o H/n,

b) na vyššie uvedenú sumu úveru pripadá úrok: ten sa z dôvodu každoročne sa znižujúceho zostatku úveru tiež znižuje,

c) v tomto prípade v každom období je umorovacia splátka rovnaká H/n,

d) celkové splátky v jednotlivých časových obdobiach udáva úrok a hodnota umorovacích splátok.

Obdobie t	Zostatok úveru H_t	Úrok k_t	Umor.splátka S_t	Celk.splátka A_t
1	H	q.H	H/n	H(1/n+q)
2	H-H/n	q.H(1-1/n)	H/n	H[1/n+q(1-1/n)]
n	H-(n-1)H/n	q.H/n	H/n	(1+q)H/n

Príklad. Zobrali sme si pôžičku 2 000 €, ktorú budeme v nasledujúcich 4 mesiacoch pravidelne splácať rovnakými umorovacími čiastkami. Aké veľké budú anuity, keď za každou splátkou je potrebné platiť mesačný úrok? Ročná úroková miera je 12 %.

8. Anuitné splácanie pôžičiek

Úver H má byť splatený aj s úrokmi n rovnakými platbami (anuitami), splatnými vždy koncom úrokového obdobia (budeme sa zaoberať iba polehotným úročením) pri nemennej ročnej úrokovej sadzbe q. Predpokladáme ročné úrokové obdobie.

Začiatočnú hodnotu úveru možno pokladať za začiatočnú hodnotu dôchodku a jednotlivé anuity možno pokladať za výplaty dôchodku, ktorý si veriteľ zaistil poskytnutím úveru u dlžníka.

Tento spôsob splácania úveru predstavujú všeobecne rozšírené konštrukcie, kedy sú celkové splátky pôžičky rovnaké $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ (A - **anuita**).
Zoberme si príklad obchodných pôžičiek alebo dlhodobých hypoték. V konštrukciách splácania úverov pre rovnaké čiastky splácania zo vzťahu

$$H = \frac{A_1}{1+q} + \frac{A_2}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(1+q)^n},$$

pre $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ dostaneme

$$H = A\left(\frac{1}{1+q} + \frac{1}{(1+q)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+q)^n}\right)$$

a odtiaľ

$$A = H \frac{q}{1-(1+q)^{-n}}.$$

Príklad. Vytvorme plán splácania pôžičky 10 000 € so 7,5% ročnou úrokovou mierou. Budeme ju splácať 5 rokov rovnakými celkovými ročnými splátkami.

Príklad. Dlh vo výške 10 000 € má byť splatený ročnými splátkami vrátane úrokov. Prvá splátka vo výške 5 000 € je odložená o rok a každá ďalšia je v porovnaní s predchádzajúcou stále o 2 000 € vyššia. Zostavme umorovací plán pri ročnej úrokovej sadzbe 0,1. Určme aká bude výška poslednej splátky.

9. Hypotekárne úvery

Sú jedným zo základných zdrojov k financovaniu bývania. Pre hypotekárne úvery je typický aj spôsob financovania. Banky získavajú zdroje emisiou hypotekárnych záložných listov. Hypotekárne záložné listy sú relatívne bezpečné a obvykle i dobre obchodovateľné, čo zvyšuje ich atraktivitu u investorov, ktorí sú ochotní sa uspokojiť i s relatívne nižším výnosom.
Úroková sadzba z hypotekárneho úveru môže byť stanovená pevne pre celé obdobie splatnosti alebo ako pohyblivá sadzba v závislosti od vývoja úrokových sadzieb na trhu. Často sa používa i kombinácia oboch, t.j. pevná sadzba na niekoľko rokov (doba fixácie).
Výšku ročných splátok hypotekárneho úveru určíme z anuitného splácania pôžičiek (hypotekárne úvery sú obvykle splácané pravidelnými konštantnými platbami - anuitami).

Väčšinou sa hypotekárne úvery splácajú mesačne, potom pre výpočet mesačnej splátky použijeme

vzorec $H = A_t \dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$, kde $m=1,\ p=12$.

Zhrnutie

Renta – *postupnosť platieb v istých časových intervaloch.*

Budúca hodnota polehotnej renty

$$S_n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$ (ročné platby s ročným úrokovaním),

$$S_n = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$ (p -termínová renta počas n rokov s nominálnou úrokovou sadzbou j pri m konverziách za rok),

$$S_n = R\frac{e^{j\cdot n} - 1}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$ (p -termínová renta počas n rokov s nominálnou úrokovou sadzbou j a spojitým úrokovaním).

Súčasná hodnota polehotnej renty

$$A_n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$ (ročné platby s ročným úrokovaním),

$$A_n = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$ (p -termínová renta počas n rokov s nominálnou úrokovou sadzbou j pri m konverziách za rok),

$$A_n = R\frac{1-e^{-j\cdot n}}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$ (p -termínová renta počas n rokov s nominálnou úrokovou sadzbou j a spojitým úrokovaním).

Súčasná hodnota večnej renty

$$A_\infty = \frac{R}{i}$$ (ročné platby s ročným úrokovaním),

$$A_n = \frac{R}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$ (p -termínová večná renta s nominálnou úrokovou sadzbou j pri m konverziách za rok),

$$A_n = \frac{R}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$ (p -termínová večná renta s nominálnou úrokovou sadzbou j a spojitým úrokovaním).