

Polynómy

Pojem polynóm

Definícia 1 Nech $n \in \mathbb{N}$ a nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ (koeficienty polynómu). Výraz

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

nazývame *polynómom* v premennej x .

Ak $a_n \neq 0$, tak číslo n je *stupeň polynómu*.

Pozn.: Koeficient a_0 sa nazýva *absolútny* koeficient, koeficient a_1 sa nazýva *lineárny* koeficient, koeficient a_2 sa nazýva *kvadratický* koeficient.

Základné vlastnosti polynómov

Majme polynómy

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ Q_m(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

- Dva polynómy $P_n(x)$, $Q_m(x)$ sa *rovnajú* práve vtedy, ak sú rovnakého stupňa a koeficienty pri rovnakých mocninách sa rovnajú.
- Dva polynómy $P_n(x)$, $Q_m(x)$ sa *rovnajú* práve vtedy, ak sú rovnakého stupňa a majú rovnaké hodnoty pre každé x .
- Nech $P_n(x)$, $Q_m(x)$ sú dva polynómy. Potom existujú dva jednoznačne určené polynómy $S(x)$, $R(x)$ také, že platí:
 - a) $P_n(x) = Q_m(x) S(x) + R(x)$,
 - b) $R(x)$ je nulový polynóm alebo stupeň polynómu $Q_m(x)$ je väčší ako stupeň polynómu $R(x)$.

Polynóm $R(x)$ nazývame *zvyškom po delení* polynómu $P_n(x)$ polynómom $Q_m(x)$.

Pojem algebraická rovnica

Definícia 2 Nech $n \in \mathbb{N}$ a nech $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Rovnicu

$$P_n(x) = 0, \text{ resp.}$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

nazývame *algebraickou rovnicou* (algebraickou rovnicou n -tého stupňa).

Definícia 3 Každé komplexné číslo α , pre ktoré platí $P_n(\alpha) = 0$ nazývame *koreňom* (riešením) danej algebraickej rovnice $P_n(x) = 0$.

Základné tvrdenia

Veta 1 Číslo α , $\alpha \in \mathbb{C}$ je koreňom rovnice $P_n(x) = 0$ práve vtedy, ak polynóm $x - \alpha$ delí polynóm $P_n(x)$ bezo zvyšku.

Veta 2 Algebraická rovnica n -tého stupňa má práve n koreňov v množine \mathbb{C} .

Veta 3 Ak algebraická rovnica $P_n(x) = 0$ má v množine \mathbb{C} k rovnakých koreňov $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$ ($k \leq n$), tak číslo α_1 je k -násobným koreňom rovnice $P_n(x) = 0$.

Veta 4 (Kanonický rozklad polynómu) Ak $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sú navzájom rôzne komplexné korene (násobnosť k každého koreňa je rovná 1) rovnice $P_n(x) = 0$, tak

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Veta 5 (Kanonický rozklad polynómu) Ak $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ($1 \leq p \leq n$) sú všetky navzájom rôzne komplexné korene s násobnosťami k_1, k_2, \dots, k_p rovnice $P_n(x) = 0$, tak platí

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_p)^{k_p},$$

pričom $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$.

Veta 6 Nech je daná algebraická rovnica $P_n(x) = 0$ a jej koeficienty a_0, a_1, \dots, a_n sú celé čísla.

Nech

$$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},$$

kde p, q sú nesúdeliteľné, je koreň rovnice $P_n(x) = 0$. Potom koeficient a_n je deliteľný číslom q a koeficient a_0 je deliteľný číslom p .

Veta 7 Nech $n \geq 2$ a koeficienty $P_n(x)$ sú reálne čísla. Ak komplexné číslo $\alpha = a + bi$ je koreňom rovnice $P_n(x) = 0$, tak jej koreňom je aj komplexne združené číslo $\bar{\alpha} = a - bi$.

Veta 8 Algebraická rovnica s reálnymi koeficientmi *nepárneho stupňa* má aspoň jeden reálny koreň.

Hornerova schéma

Polynóm

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

zapíšeme v tvare

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + x a_n))) \dots$$

odtiaľ dostaneme tzv. **Hornerovu schému** na výpočet hodnôt daného polynómu pre $x = \alpha$ v tvare:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0
α	αb_n	αb_{n-1}	\dots	αb_2	αb_1	$\alpha b_0 = P_n(\alpha)$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	\dots	b_1	$b_0 = P_n(\alpha)$

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-2} + \alpha b_{n-1}$$

\vdots

$$b_1 = a_1 + \alpha b_2$$

$$b_0 = a_0 + \alpha b_1 = P_n(\alpha)$$

Pojem racionálna funkcia

Definícia 4 Funkciu

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

nazývame *racionálnou* funkciou.

Definícia 5 Ak $n \geq m$, hovoríme, že funkcia $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je *nerýdzoracionálna* funkcia.

Ak $n < m$, hovoríme, že funkcia $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je *rýdzoracionálna* funkcia.

Základné vlastnosti

Každú **nerýdzoracionálnu** funkciu môžeme vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie. Teda

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_s(x) + \frac{R_r(x)}{Q_m(x)},$$

kde $r < m$ a $s + m = n$.

Každú **rýdzoracionálnu** funkciu vieme rozložiť na súčet elementárnych (parciálnych) zlomkov, ktoré môžu mať v množine \mathbb{R} tieto tvary

$$\frac{A}{ax + b}, \quad \frac{B}{(ax + b)^n}, \quad \frac{Cx + D}{ax^2 + bx + c}, \quad \frac{Ex + F}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

kde $A, B, C, D, E, F, a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a trojčlen $ax^2 + bx + c$ nemá reálne korene.

Pozn.: Koeficienty A, B, C, D, E, F vypočítame metódou porovnávania koeficientov alebo dosadzovacou metódou.

Rozklad na elementárne (parciálne) zlomky

1. Zistíme, či daná funkcia je rýdzoracionálna. Ak áno, pokračujeme bodom 3 a ak nie, pokračujeme bodom 2.
2. Predelíme čitateľ a menovateľom (delíme polynóm polynómom) a získanú rýdzoracionálnu funkciu rozložíme na elementárne (parciálne) zlomky.
3. Rozložíme menovateľ a na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad polynómu).
4. Zapišeme všeobecné parciálne zlomky.
5. Vypočítame ich koeficienty (dosadzovacou alebo porovnávacou metódou).