V. RIZIKO A VÝNOS

0. Charakteristiky polohy a variability

V praxi často sledujeme priemerné (očakávané) tempo rastu výroby, priemerné ceny, priemerné mzdy a pod. Používame pri tom jednoduchý aritmetický priemer hodnôt sledovaného kvantitatívneho znaku. Podobnú základnú, informáciu o rozložení náhodnej premennej X poskytuje **stredná (očakávaná) hodnota** $\mu = E(X)$ náhodnej premennej X (tzv. charakteristika polohy), kde

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot p_i \text{, resp. } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

pre diskrétnu, resp. pre spojitú náhodnú premennú. Nech postupnosť hodnôt $x_1, \dots, x_n$ predstavuje nezávislé realizácie náhodnej premennej X, potom pre veľké n je

$$E(X) \approx \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

Aritmetický priemer $\bar{x}$ je štatistickým odhadom strednej hodnoty $E(X)$.
Charakteristickou variability náhodnej premennej je **rozptyl** (variancia, disperzia) $D(X)$ pričom

$$D(X) = E\left([X - E(X)]^2\right).$$

Druhá odmocnina z rozptylu je **smerodajná odchýlka** $\sigma = \sigma_X = \sqrt{D(X)}$. Ako odhad smerodajnej odchýlky sa používa modifikovaná výberová odchýlka, resp. štatistická smerodajná odchýlka

$$s_x^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \text{, resp. } s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Najdôležitejším rozdelením spojitej náhodnej premennej je **normálne rozdelenie** $N(\mu, \sigma^2)$, kde hustota pravdepodobnosti je daná vzťahom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}, \; x \in R, \; \mu = E(X), \; \sigma = \sigma_X = \sqrt{D(X)}.$$

Rozdelenie $N(0,1)$ nazývame **normované normálne rozdelenie.**

Prostriedkom merania „tesnosti“ vzťahu medzi dvoma náhodnými premennými je **kovariancia** a je definovaná vzťahom

$$Cov_{XY} = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

Ak náhodné premenné X, Y zo systému (X, Y) sú nezávislé, $Cov_{XY} = 0$. Majme systém náhodných premenných $(X_1, \ldots, X_s)$ a nech $Cov_{ij} = Cov_{X_i Y_i}$ a $\sigma_i = \sigma_{X_i}$. Potom maticu

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & Cov_{12} & \ldots & Cov_{1s} \\ Cov_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & Cov_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Cov_{s1} & Cov_{s2} & \ldots & \sigma_s^2 \end{pmatrix}$$

nazývame **kovariančnou maticou**. Štatistickým odhadom kovariancie $Cov_{X_i Y_i}$ je

$$k_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Výberová modifikovaná kovariancia je k_{xy}^* číslo

$$k_{xy}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \frac{n}{n-1} \cdot k_{xy}.$$

Mieru lineárnej závislosti medzi náhodnými premennými X, Y udáva **koeficient korelácie** $Corr_{XY}$ a je daný vzťahom

$$Corr_{XY} = \frac{Cov_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Koeficient korelácie nadobúda hodnoty z intervalu $\langle -1,1 \rangle$. Ak je koeficient korelácie $Corr_{XY}$ nulový, hovoríme, že náhodné premenné X, Y sú nekorelované. Majme systém náhodných premenných $(X_1, \ldots, X_s)$ a nech $\rho_{ij} = \frac{k_{ij}}{s_i \cdot s_j} = \frac{k_{ij}^*}{s_i^* \cdot s_j^*} \approx Corr_{X_i X_j}$, potom maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \ldots & \rho_{1s} \\ \rho_{21} & 1 & \ldots & \rho_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_{s1} & \rho_{s2} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ nazývame **korelačnou maticou.**

1. Finančné riziko

Finančné transakcie sú ovplyvňované mnohými náhodnými faktormi, ktorých dopad na konkrétnu ekonomickú veličinu zväčša nie je možné presne určiť. Veličinu vtedy považujeme za náhodnú veličinu. Snažíme sa stanoviť jej očakávanú hodnotu, prípadne variabilitu. V tejto kapitole budú takýmito veličinami budúce miery výnosu a riziká kapitálových aktív.

Mierou výnosu (výnosnosťou) aktíva za isté časové obdobie nazveme podiel hodnoty dodatočných finančných tokov z aktíva s hodnotou aktíva na začiatku obdobia. Kvôli názornosti pod aktívami budeme rozumieť zväčša rizikové cenné papiere a budeme uvažovať obdobie v dĺžke jedného roka, hoci nasledujúce úvahy budú mať všeobecnú platnosť.

Budeme používať takéto označenie:

r - miera výnosu cenného papiera alebo portfólia,
$\bar{r}$ - stredná (očakávaná) hodnota miery výnosu,
σ - smerodajná odchýlka (riziko) miery výnosu,
k_{ij} - kovariancia výnosnosti medzi i-tým a j-tým cenným papierom,
ρ_{ij} - korelácia medzi i-tým a j-tým cenným papierom,
w_i - váha i-tého cenného papiera.

Uvažujme portfólio vytvorené z n rizikových cenných papierov (alebo portfólií, či iných aktív) s očakávanými mierami výnosu $\bar{r}_{1,}, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_n$ a kovariančnou maticou

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{s1} & k_{s2} & \dots & k_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \dots & \sigma_1\sigma_s\rho_{1s} \\ \sigma_2\sigma_1\rho_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2\sigma_1\rho_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_s\sigma_1\rho_{s1} & \sigma_s\sigma_2\rho_{s2} & \dots & \sigma_s^2 \end{pmatrix}$$

, kde $k_{ii} = \sigma_i^2$ je rozptyl miery výnosu i-teho cenného papiera (ďalej len CP) a $k_{ij} = \sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$ je kovariancia miery výnosu i-teho a j-teho CP a ρ_{ij} je korelácia medzi i-tym a j-tym CP (pozri prílohy). Nech $w_1, w_2, \cdots, w_n$ sú váhy príslušnej kombinácie ($w_i \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}_i = 1$), váha w_i je pomerná časť hodnoty i-teho CP z hodnoty celého portfólia.

Pre strednú hodnotu $\bar{r}_P$ a smerodajnú odchýlku σ_P miery výnosu portfólia platí

$$\bar{r}_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \bar{r}_i$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i \cdot w_j \cdot k_{ij} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{w}^{\mathbf{T}},$$

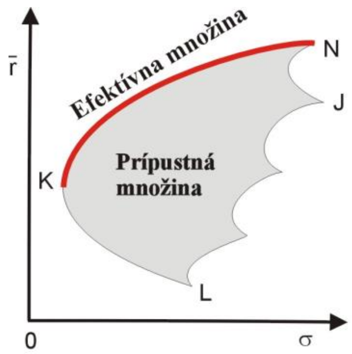
kde $\boldsymbol{w}$ je riadkový vektor váh a $\boldsymbol{w}^T$ je odpovedajúci stĺpcový vektor váh.

Ak uvažujeme portfólio vytvorené z dvoch CP s očakávanými mierami výnosu $\bar{r}_1$ a $\bar{r}_2$, smerodajnými odchýlkami σ_1 a σ_2 a váhami w a $1-w$, potom

$$\bar{r}_P = w \cdot \bar{r}_1 + (1-w) \cdot \bar{r}_2$$

$$\sigma_P^2 = w^2 \cdot \sigma_1^2 + 2w(1-w)\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12} + (1-w)^2 \cdot \sigma_2^2.$$

Prípustná množina portfólií vytvorených z viacerých CP má tvar dáždnika. Body J, K na obrázku reprezentujú portfóliá s najväčším a najmenším možným rizikom v danej prípustnej množine portfólií a body L, N predstavujú portfóliá s najmenšou a najväčšou možnou očakávanou mierou výnosu.



Efektívne portfólio má spomedzi prvkov prípustnej množiny najväčšiu očakávanú mieru výnosu pri danej smerodajnej odchýlke miery výnosu a súčasne najmenšiu smerodajnú odchýlku pri danej očakávanej miere výnosu.

Efektívnou množinou nazývame množinu efektívnych portfólií.

Príklad. Nech portfólio P je tvorené akciami A, B, C podľa tabuľky

Akcie	Počet	Cena jednej akcie	Miery výnosu
A	100	40	0.12, 0.10, 0.13, 0.14, 0.11
B	100	50	0.09, 0.08, 0.07, 0.10, 0.09
C	200	30	0.19, 0.18, 0.20, 0.18, 0.21

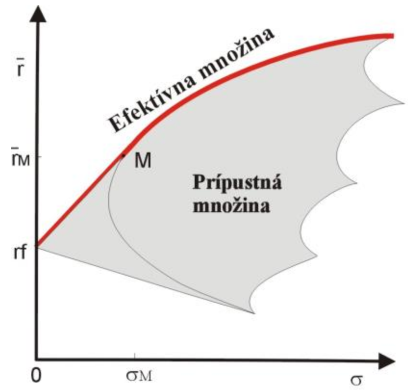
Aký je odhad strednej hodnoty a smerodajnej odchýlky miery výnosu tohto portfólia, ak výnosy za obdobie posledných 5 rokov boli také, ako je uvedené v tabuľke.

2. Priamka kapitálového trhu

Uvažujme portfóliá vytvorené zo skupiny rizikových CP a s časťou investície v **bezrizikovom aktíve**, ktoré je určené zaručenou mierou výnosu r_f a nulovou smerodajnou odchýlkou miery výnosu. Portfólio M s parametrami $\bar{r}_M, \sigma_M$ sa nazýva **trhové portfólio**, v ktorom je každý CP zastúpený takou pomernou časťou w_i ako na celom trhu rizikových CP. Keďže kovariancia mier výnosu bezrizikového aktíva s mierou výnosu ktorejkoľvek skupiny rizikových CP je nulová, portfólio vytvorené z rizikových CP a bezrizikového aktíva bude ležať na polpriamke (dotyčnica k efektívnej množine) so začiatočným bodom $(0, r_f)$ a prechádzajúcej bodom $(\sigma_M, \bar{r}_M)$. Jej rovnica má tvar

$$\bar{r}_P = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P,$$

a nazýva sa **priamka kapitálového trhu** (*CML* – Capital Market Line) a je súčasne **efektívnou množinou portfólií** v prípade kombinovania rizikových *CP* a bezrizikového aktíva.



3. Priamka trhu cenných papierov

Priamka kapitálového trhu sa týkala len efektívnych portfólií. Podobný vzťah sa dá odvodiť aj pre ľubovoľné **prípustné portfólio**. V tomto prípade hovoríme o **priamke trhu cenných papierov** (*SML* – Security Market Line)

$$r_i = r_f + (\bar{r}_M - r_F)\beta_i ,$$

kde $\beta_i = \frac{Cov(r_i, \bar{r}_M)}{\sigma_M^2} = Corr(r_i, \bar{r}_M) \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$ je **koeficient** vyjadrujúci **mieru rizika** *i*-teho cenného papiera.

Ak $\beta_i > 1$, investícia je agresívna-prudko reaguje na zmenu výnosov trhového portfólia.
Ak $\beta_i < 1$, investícia je defenzívna-nevýrazné zmeny pri zmene výnosov trhového portfólia.
Ak $\beta_i = 1$, ako sa mení trh, tak sa mení aj CP.

Poznámka. Podrobnejšie sa s danou tematikou môžete oboznámiť v [Cipra, T.: *Finanční matematika v praxi*].

Zhrnutie

Miera výnosu portfólia $\bar{r}_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \bar{r}_i$

Rozptyl výnosu portfólia $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i \cdot w_j \cdot k_{ij} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{w}^{\mathbf{T}}$

Priamka kapitálového trhu $\bar{r}_P = r_f + \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P$

Priamka trhu cenných papierov $r_i = r_f + (\bar{r}_M - r_F)\beta_i$