POLYNÓMY

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Nech n je prirodzené číslo. Nech $a_0, a_1, ..., a_n$ sú reálne čísla. Výraz

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

nazývame polynóm v premennej x. Čísla $a_0, a_1, ..., a_n$ nazývame koeficienty polynómu.
Koeficient a_0 sa nazýva absolútny člen.
Ak $a_n \neq 0$, tak číslo n je stupeň polynómu (st $P_n(x)$).

Rovnosť polynómov

Majme polynómy

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

a

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0.$$

Dva polynómy $P_n(x), Q_m(x)$ sa rovnajú, ak sú rovnakého stupňa ($n = m$) a majú rovnaké koeficienty pri rovnakých mocninách x, ($a_i = b_i, i = 1, ..., n$).

Delenie polynómov

Nech sú dané polynómy $P_n(x), Q_m(x)$, $(m \leq n)$. Potom existujú dva jednoznačne určené polynómy $S(x), R(x)$ také, že platí

$$P_n(x) = Q_m(x)S(x) + R(x),$$

resp.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

pričom

- $R(x) = 0$ alebo
- $R(x) \neq 0$ a $st\ R(x) < st\ Q_m(x)$

Polynóm $R(x)$ nazývame zvyšok po delení polynómu $P_n(x)$ polynómom $Q_m(x)$.

Delenie polynómov

Nech sú dané polynómy $P_n(x), Q_m(x)$, $(m \leq n)$. Potom existujú dva jednoznačne určené polynómy $S(x), R(x)$ také, že platí

$$P_n(x) = Q_m(x)S(x) + R(x),$$

resp.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

pričom

- $R(x) = 0$ alebo
- $R(x) \neq 0$ a $st\ R(x) < st\ Q_m(x)$

Polynóm $R(x)$ nazývame zvyšok po delení polynómu $P_n(x)$ polynómom $Q_m(x)$.

Delenie polynómov

Nech sú dané polynómy $P_n(x), Q_m(x), (m \leq n)$. Potom existujú dva jednoznačne určené polynómy $S(x), R(x)$ také, že platí

$$P_n(x) = Q_m(x)S(x) + R(x),$$

resp.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

pričom

- $R(x) = 0$ alebo
- $R(x) \neq 0$ a $st\ R(x) < st\ Q_m(x)$

Polynóm $R(x)$ nazývame zvyšok po delení polynómu $P_n(x)$ polynómom $Q_m(x)$.

Majme polynóm

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

a číslo $\alpha \in R$.

Úloha: vypočítať hodnotu polynómu v čísle α, teda $P_n(\alpha) = ...$

Polynóm zapíšeme v tvare

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + ... + x(a_{n-1} + x a_n)...))$$

Hodnotu $P_n(\alpha) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha(a_2 + ... + \alpha(a_{n-1} + \alpha a_n)...))$ vypočítame pomocou Hornerovej schémy nasledovne

Hornerova schéma

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
α		$\alpha\ b_n$	$\alpha\ b_{n-1}$	...	αb_2	αb_1
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_1	$b_0 = P_n(\alpha)$

kde $b_n = a_n$

$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha\ b_n = a_{n-1} + \alpha\ a_n$

$b_{n-2} = a_{n-2} + \alpha\ b_{n-1} = a_{n-2} + \alpha(a_{n-1} + \alpha a_n)$

$\vdots$

$b_0 = a_0 + \alpha\ b_1 = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha b_2) = \ldots = P_n(\alpha)$

Definícia

Číslo α pre ktoré platí $P_n(\alpha) = 0$ nazývame koreňom polynómu $P_n(x)$ (resp. je riešením algebraickej rovnice $P_n(x) = 0$.)

platí:

- Ak číslo α je koreňom polynómu $P_n(x)$, potom $(x - \alpha)$ delí polynóm $P_n(x)$ bezo zvyšku,

$$P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x).$$

- koreň α polynómu $P_n(x)$ nazývame k-násobný koreň polynómu, ak platí

$$P_n(x) = (x - \alpha)^k Q_{n-k}(x)$$

- Polynóm n - tého stupňa má v množine C práve n koreňov.(dôsledok základnej vety albebry)

Nech $\alpha_1, ..., \alpha_l$ sú rôzne komplexné korene polynómu $P_n(x)$, každý s násobnosťou $k_i, i = 1, ...l$, potom vieme polynóm zapísať v tvare:

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}...(x - \alpha_l)^{k_l},$$

kde $k_1 + k_2 + ...k_l = n$.

Tento rozklad nazývame rozklad polynómu $P_n(x)$ na súčin koreňových činiteľov nad množinou komplexných čísel.

- Polynóm n - tého stupňa má v množine C práve n koreňov.(dôsledok základnej vety albebry)

Nech $\alpha_1, ..., \alpha_l$ sú rôzne komplexné korene polynómu $P_n(x)$, každý s násobnosťou $k_i, i = 1, ...l$, potom vieme polynóm zapísať v tvare:

$$P_n(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}...(x - \alpha_l)^{k_l},$$

kde $k_1 + k_2 + ...k_l = n$.
Tento rozklad nazývame rozklad polynómu $P_n(x)$ na súčin koreňových činiteľov nad množinou komplexných čísel.

Nech $\alpha_1, ..., \alpha_l$ sú rôzne reálne korene polynómu $P_n(x)$, každý s násobnosťou $k_i, i = 1, ...l$, nech $p_i^2 - 4q_i < 0$ pre $i = 1, ..s$ potom rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov v množine reálnych čísel má tvar:

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}...(x-\alpha_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)...(x^2+p_sx+q_s)$$

Veta

Nech koeficienty polynómu $P_n(x)$ sú celé čísla ($a_i \in Z$).
Nech $\alpha = \frac{p}{q}$ je koreňom plynómu $P_n(x)$.
($p \in Z, q \in N$, p, q nesúdeliteľné).
Potom p delí a_0 a q delí a_n. (p/a_0, q/a_n)

Funkciu

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

nazývame racionálnou funkciou.

- ak $n \geq m$ hovoríme, že funkcia $f(x)$ je nerýdzoracionálna
- ak $n < m$ hovoríme, že funkcia je rýdzoracionálna

Každú nerýdzoracionálnu funkciu vieme vyjadriť ako šúčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie (viď delenie polynómov)

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, st\ R(x) < m$$

Každú rýdzoracionálnu funkciu vieme rozložiť na súčet parciálnych (elementárnych) zlomkov:

$$\frac{A}{x-\alpha}$$

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n}$$

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$$

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

kde $A, B, C, \alpha, p, q \in R,\ n \in N,\ p^2-4q<0$. Príklady...