Úrokovanie

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Základné pojmy

- **finančný trh** - miesto, kde sa sústreďuje ponuka a dopyt peňazí a kapitálu
- **úrok** - poplatok dlžníka veriteľovi za používanie jeho peňazí
- **peňažný ústav** - miesto, kde prebieha tok peňazí od, resp. ku klientom
- **úroková perióda** - časové obdobie, za ktoré percentová miera určuje úrok
- **úroková miera** - percentová miera, ktorá zodpovedá úrokovej perióde
- **úroková sadzba** - úroková miera v tvare desatinného čísla
- **úrokovanie** - proces spojený s výpočtom úrokov
- **úrokové obdobie** - časové obdobie, počas ktorého prebieha úrokovanie

Úroková perióda

Úroková perióda môže byť:

- **per annum (p. a.)** - ročná
- **per semestrum (p. s.)** - polročná
- **per quartalem (p. q.)** - štvrťročná
- **per mensem (p. m.)** - mesačná
- **per septimanam (p. sept.)** - týždenná

Úroková miera a úroková sadzba

Prevod úrokovej miery na úrokovú sadzbu:

$$\text{úroková sadzba} = \frac{\text{úroková miera}}{100\ \%}$$

$$0{,}12 = \frac{12\ \%}{100\ \%}$$

Úrokovanie - klasifikácia podľa termínu splatnosti úroku

Klasifikácia úrokovania podľa termínu splatnosti úroku:

- dekurzívne (polehotné) úrokovanie - úrok splatný na konci úrokovej periódy
- anticipatívne (predlehotné) úrokovanie - úrok splatný na začiatku úrokovej periódy

Úrokovanie - klasifikácia podľa dĺžky úrokového obdobia

Klasifikácia úrokovania podľa dĺžky úrokového obdobia:

- jednoduché úrokovanie - úrokové obdobie je kratšie ako úroková perióda
- zložené úrokovanie - úrokové obdobie je dlhšie ako úroková perióda a je jej celočíselným násobkom
- zmiešané úrokovanie - úrokové obdobie je dlhšie ako úroková perióda

Terminológia a označenie

jednoduché úrokovanie - úrokové obdobie je kratšie ako úroková perióda

Použité skratky:

PV	začiatočná (súčasná) hodnota kapitálu
FV	budúca hodnota kapitálu
I	úrok
t	dĺžka úrokového obdobia vyjadrená v jednotkách úrokovej periódy
i	úroková sadzba
i_d	sadzba dane zo zisku (? %)

Exaktné a bankové úrokovanie

Pri vyjadrení úrokového obdobia t, ak je známy počet dní n používame pri jednoduchom úrokovaní metódy:

- banková metóda (ordinárna) $t = \dfrac{n}{360}$
  počet dní v mesiaci 30
- exaktná metóda (presná) $t = \dfrac{n}{365}$, resp. $t = \dfrac{n}{366}$
  skutočný počet dní v mesiaci

Úrok a budúca hodnota kapitálu

Výpočet úroku:

$$I = PV \cdot i \cdot t$$

Výpočet budúcej hodnoty kapitálu:

$$FV = PV + I = PV + PV \cdot i \cdot t = PV \cdot (\underbrace{1 + i \cdot t}_{\text{úročiteľ}})$$

Výpočet budúcej hodnoty kapitálu pri zdaňovaní úrokov:

$$FV = PV + I = PV + PV \cdot i(1 - i_d) \cdot t = PV \cdot [1 + i \cdot (1 - i_d) \cdot t]$$

Úrok a budúca hodnota kapitálu - Príklad

Príklad:

Bankovou metódou vypočítajme budúcu hodnotu kapitálu vo výške 500 eur pri ročnej úrokovej miere 5 %, ak bude suma úročená 6 mesiacov.

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 500 \\ i & = & 0{,}05 \\ t & = & \frac{1}{2} \\ \hline FV & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$FV = PV \cdot (1 + i \cdot t) = 500 \cdot (1 + 0,05 \cdot \frac{1}{2}) = 500 \cdot 1,025 = 512,5$

Štandardy určovania úrokového obdobia

Pri vyjadrení úrokového obdobia pri jednoduchom úrokovaní používame štandardy:

spôsob	štandard	počet dní v mesiaci	počet dní v roku
nemecký	30E/360	30	360
francúzsky	ACT/360	skutočný	360
anglický	ACT/365	skutočný	skutočný

Štandardy určovania úrokového obdobia - Príklad 1

Príklad:

Vypočítajme úrok z vkladu 500 eur za obdobie od 20. 2. 2012 do 8. 6. 2012 všetkými spôsobmi, ak ročná úroková miera je 6 %.

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 500 \\ i & = & 0{,}06 \\ \hline I & = & ? \end{array}$$

Štandardy určovania úrokového obdobia - Príklad 1

Riešenie:

a) Nemecký spôsob (zaokrúhlením počtu dní v mesiaci aj roku)

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{(30-20)+3\cdot 30+8}{360} = \tfrac{108}{360} \\ I &= PV \cdot i \cdot t = 500 \cdot 0{,}06 \cdot \tfrac{108}{360} = 500 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}3 = 9 \end{aligned}$$

b) Francúzsky spôsob (zaokrúhlením počtu dní len v roku)

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{(29-20)+31+30+31+8}{360} = \tfrac{109}{360} \\ I &= PV \cdot i \cdot t = 500 \cdot 0{,}06 \cdot \tfrac{109}{360} = 500 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}30278 = 9{,}0834 \end{aligned}$$

c) Anglický spôsob (nezaokrúhľujeme)

$$\begin{aligned} t &= \tfrac{(29-20)+31+30+31+8}{366} = \tfrac{109}{366} \\ I &= PV \cdot i \cdot t = 500 \cdot 0{,}06 \cdot \tfrac{109}{366} = 500 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}29781 = 8{,}9343 \end{aligned}$$

Štandardy určovania úrokového obdobia - Príklad 2

Príklad:

Odberateľ nám nezaplatil faktúru v hodnote 6 500 eur, splatnú 7. 7. 2012. Podľa zmluvy účtujeme penále vo výške 0,05 % z fakturovanej sumy za každý deň oneskorenia platby. Aké veľké je penále k 9. 9. 2012?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 6\,500 \\ i & = & 0{,}0005 \\ \hline I & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} I &= PV \cdot i \cdot t = 6\ 500 \cdot 0{,}0005 \cdot (31 - 7 + 31 + 9) = \\ &= 6\ 500 \cdot 0{,}0005 \cdot 63 = 208{,}00 \end{aligned}$$

Štandardy určovania úrokového obdobia - Príklad 3

Príklad:

Aký veľký bude úrok a celková suma na konci kalendárneho roka pri 3% úrokovej miere, ak sa počas roka uskutočnia nasledujúce vklady:

dátum	10. 2.	12. 4.	16. 6.
vklad	600	500	400

Poznámka: Ak nie je uvedené inak, úrokové obdobie určíme bankovou (ordinárnou metódou).

Štandardy určovania úrokového obdobia - Príklad 3

Riešenie:

$$\begin{aligned}
PV_1 &= 600\\
t_1 &= \tfrac{(30-10)+10\cdot 30}{360} = \tfrac{320}{360}\\
FV_1 &= PV_1 \cdot (1 + i \cdot t_1) = 600 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot \tfrac{320}{360}) = 616
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PV_2 &= 500\\
t_2 &= \tfrac{(30-12)+8\cdot 30}{360} = \tfrac{258}{360}\\
FV_2 &= PV_2 \cdot (1 + i \cdot t_2) = 500 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot \tfrac{258}{360}) = 510{,}75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PV_3 &= 400\\
t_3 &= \tfrac{(30-16)+6\cdot 30}{360} = \tfrac{194}{360}\\
FV_3 &= PV_3 \cdot (1 + i \cdot t_3) = 400 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot \tfrac{194}{360}) = 406{,}47
\end{aligned}$$

$$FV = FV_1 + FV_2 + FV_3 = 616 + 510,75 + 406{,}47 = 1\ 533{,}22$$

Štandardy určovania úrokového obdobia - Príklad 3

Riešenie iným spôsobom:

$$
\begin{aligned}
PV_1 &= 600 \\
t_1 &= \tfrac{(30-10)+30+12}{360} = \tfrac{62}{360} \\
FV_1 &= PV_1 \cdot (1 + i \cdot t_1) = 600 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot \tfrac{62}{360}) = 603{,}1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PV_2 &= FV_1 + 500 = 1\ 103{,}1 \\
t_2 &= \tfrac{(30-12)+30+16}{360} = \tfrac{64}{360} \\
FV_2 &= PV_2 \cdot (1 + i \cdot t_2) = 1\ 103{,}1 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot \tfrac{64}{360}) = 1\ 108{,}9832
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PV_3 &= FV_2 + 400 = 1\ 508{,}9832 \\
t_3 &= \tfrac{(30-16)+6\cdot 30}{360} = \tfrac{194}{360} \\
FV_3 &= PV_3 \cdot (1 + i \cdot t_3) = 1\ 508{,}9832 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot \tfrac{194}{360}) = 1\ 533{,}378
\end{aligned}
$$

Súčasná hodnota kapitálu - odúročenie

Výpočet súčasnej hodnoty kapitálu:

$$\begin{aligned} FV &= PV \cdot (1 + i \cdot t) \\ \Longrightarrow \quad PV &= FV \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + i \cdot t}}_{\text{odúročiteľ}} \end{aligned}$$

Súčasná hodnota kapitálu - odúročenie - Príklad

Príklad:

Jožovi sľúbil majiteľ bytu predať byt o 8 mesiacov za 60 000 eur. Koľko musí teraz vložiť do banky pri 6% ročnej úrokovej miere, aby mal v dohodnutom čase k dispozícii potrebnú čiastku?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} FV & = & 60\ 000 \\ i & = & 0{,}06 \\ t & = & \dfrac{8}{12} \\ \hline PV & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$PV = FV \cdot \frac{1}{1 + i \cdot t} = 60\ 000 \cdot \left(1 + 0{,}06 \cdot \frac{8}{12}\right)^{-1} = 57\ 692{,}308$$

Úroková miera - Príklad

Príklad:

Podľa zmluvy máte za pôžičku 3 300 eur vyplatiť o 8 mesiacov čiastku 3 564 eur. Aká bola dohodnutá úroková miera?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 3\ 300 \\ FV & = & 3\ 564 \\ t & = & \frac{8}{12} \\ \hline i & = & ? \end{array}$$

Úroková miera - Príklad

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
FV &= PV \cdot (1 + i \cdot t) \\
1 + i \cdot t &= \frac{FV}{PV} \\
i &= \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{t} \\
i &= \frac{\frac{3\ 564}{3\ 300} - 1}{\frac{8}{12}} \\
i &= 0,12 \\
i \cdot 100\% &= 12\%
\end{aligned}
$$

Úrokové obdobie - Príklad

Príklad:

Za koľko mesiacov máme zaplatiť 4 284 eur, ak sme si požičali 4 200 eur pri ročnej úrokovej miere 8 %?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 4\ 200 \\ FV & = & 4\ 284 \\ i & = & 0,08 \\ \hline t & = & ? \end{array}$$

Úrokové obdobie - Príklad

Riešenie:

$$\begin{aligned} FV &= PV \cdot (1 + i \cdot t) \\ 1 + i \cdot t &= \frac{FV}{PV} \\ t &= \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{i} \\ t &= \frac{\frac{4\ 284}{4\ 200} - 1}{0,08} \\ t &= 0,25 \end{aligned}$$

3 mesiace

Matematický diskont - úrok zo súčasnej hodnoty kapitálu

Definícia

Matematický diskont je úrok zo súčasnej hodnoty kapitálu, vyjadrený pomocou budúcej hodnoty kapitálu pri danej úrokovej miere $i \cdot 100$ %.

Zápis:

$$D_m = \frac{FV \cdot t \cdot i}{1 + t \cdot i}$$

$$D_m (= I) = PV \cdot t \cdot i = \frac{FV}{1 + t \cdot i} \cdot t \cdot i = \frac{FV \cdot t \cdot i}{1 + t \cdot i}$$

Matematický diskont - Príklad

Príklad:

Jožovi sľúbil majiteľ bytu predať byt o 8 mesiacov za 60 000 eur. Teraz vloží do banky určitú sumu pri 6% ročnej úrokovej miere, aby mal v dohodnutom čase k dispozícii potrebnú čiastku. O aký úrok narastie vložená suma?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV & = & 60\ 000 \\ i & = & 0{,}06 \\ t & = & \dfrac{8}{12} \\ \hline I(= D_m) & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$I = D_m \quad = \quad \frac{FV \cdot t \cdot i}{1 + t \cdot i} = \frac{60\ 000 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{8}{12}}{1 + 0{,}06 \cdot \frac{8}{12}} = 2\ 307{,}692.$$

Obchodný diskont - úrok z budúcej hodnoty kapitálu

Definícia

Obchodný diskont je úrok z budúcej hodnoty kapitálu, vyjadrený pomocou budúcej hodnoty kapitálu pri danej diskontnej miere $d \cdot 100$ %.

Zápis:

$$D_o = FV \cdot t \cdot d$$

Výpočet súčasnej hodnoty diskontovaním:

$$\begin{aligned} FV &= PV + D_o \\ \Longrightarrow \quad PV &= FV - D_o = FV - FV \cdot t \cdot d \\ \Longrightarrow \quad PV &= FV(1 - t \cdot d) \end{aligned}$$

Obchodný diskont - Príklad

Príklad:

Banka poskytuje na úvery 20% ročnú diskontnú mieru. Podnikateľ si zobral pôžičku, pričom o 4 mesiace musí vrátiť 15 000 eur. Akú sumu dostal podnikateľ od banky?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV & = & 15\ 000 \\ d & = & 0{,}2 \\ t & = & \dfrac{4}{12} \\ \hline PV & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$PV = FV \cdot (1 - t \cdot d) = 15\ 000 \left(1 - 0{,}2 \cdot \tfrac{4}{12}\right) = 14\ 000$$

Zmenka - Príklad

Príklad:

Obchodník 10. marca vystavil firme zmenku s nominálnou hodnotou 10 000 eur s 10% ročnou úrokovou mierou. Dátum splatnosti zmenky je 10. august. Dňa 1. júna firma eskontuje zmenku v banke, ktorá má 12% ročnú diskontnú mieru. Akú sumu banka vyplatí firme?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 10\,000 \\ i & = & 0{,}1 \\ d & = & 0{,}12 \\ t_1 & = & \dfrac{5}{12} \\ t_2 & = & \dfrac{69}{360} \\ \hline X & = & ? \end{array}$$

Zmenka - Príklad

Riešenie:

- budúca hodnota ku dňu splatnosti

$$\begin{aligned} FV &= PV \cdot (1 + i \cdot t_1) = 10\ 000 \left(1 + 0{,}1 \cdot \tfrac{5}{12}\right) = \\ &= 10\ 416{,}667 \end{aligned}$$

- budúca hodnota znížená o obchodný diskont

$$\begin{aligned} X &= FV \cdot (1 - t_2 \cdot d) = 10\ 416{,}667 \cdot \left(1 - \tfrac{69}{360} \cdot 0{,}12\right) = \\ &= 10\ 177{,}083 \end{aligned}$$

Vzťah medzi matematickým a obchodným diskontom

Aký je vzťah medzi D_m a D_o za predpokladu, že $i = d$?

$$D_m = \frac{FV \cdot t \cdot i}{1 + t \cdot i} = \frac{D_o}{1 + t \cdot i}$$

$$1 + t \cdot i > 1$$

$$\Longrightarrow \quad D_m < D_o$$

Poznámka: Obchodný diskont sa používa pri krátkodobých pôžičkách.

Ekvivalentné sadzby

Aký je vzťah medzi i a d za predpokladu, že $D_m = D_o$?

$$\frac{FV \cdot t \cdot i}{1 + t \cdot i} = FV \cdot t \cdot d$$

$$d = \frac{i}{1 + t \cdot i} \qquad (1)$$

resp.

$$i = \frac{d}{1 - t \cdot d} \qquad (2)$$

$$\Longrightarrow \quad i > d$$

Definícia

Úroková sadzba i a diskontná sadzba d sú ekvivalentné, ak vyhovujú rovniciam (1) a (2).

Poznámka: Ekvivalentné sadzby dávajú rovnakú súčasnú hodnotu, ak sú rovnaké budúce hodnoty a obdobie odúročenia.

Ekvivalentné sadzby - Príklad 1

Príklad:

Uvažujme o dvoch ročných pôžičkách s rovnakou splatnou sumou 300 eur. Prvá pôžička je založená na obchodnom diskonte s 8% ročnou diskontnou mierou a druhá na matematickom diskonte s 8% ročnou úrokovou mierou. Zistime:

1. Aký je zisk veriteľa pri týchto pôžičkách.
2. Aká je ročná úroková miera, ktorá zaručí veriteľovi rovnaký zisk ako 8% ročná diskontná miera.

Ekvivalentné sadzby - Príklad 1

Riešenie:

a) zisk veriteľa

$$
\begin{aligned}
D_m + D_o &= \frac{FV \cdot t \cdot i}{1 + t \cdot i} + FV \cdot t \cdot d = \\
&= \frac{300 \cdot 1 \cdot 0{,}08}{1 + 1 \cdot 0{,}08} + 300 \cdot 1 \cdot 0{,}08 = \\
&= 22{,}222 + 24 = 46{,}222.
\end{aligned}
$$

b) ekvivalentná úroková miera

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{d}{1 - t \cdot d} = \\
&= \frac{0{,}08}{1 - 1 \cdot 0{,}08} = 0{,}087.
\end{aligned}
$$

Ekvivalentné sadzby - Príklad 2

Príklad:

Akú veľkú ročnú diskontnú mieru nám má poskytnúť banka, aby sme získali 12% ročnú úrokovú mieru na osemmesačnú pôžičku?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} i & = & 0{,}12 \\ t & = & \frac{8}{12} \\ \hline d & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$d = \frac{i}{1 + t \cdot i} = \frac{0{,}12}{1 + \frac{8}{12} \cdot 0{,}12} = 0{,}074$$

Terminológia a označenie

zložené úrokovanie - úrokové obdobie je dlhšie ako úroková perióda a je jej celočíselným násobkom

Použité skratky:

PV	začiatočná (súčasná) hodnota kapitálu
FV_n	budúca hodnota kapitálu po n rokoch
n	dĺžka úrokového obdobia v rokoch
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok
i	ročná úroková sadzba, ak $m = 1$
j	ročná úroková sadzba, ak $m > 1$
i_d	sadzba dane zo zisku (19 %)

Budúca hodnota kapitálu

Výpočet budúcej hodnoty kapitálu, ak i je ročná úroková sadzba:

po prvom roku

$$FV_1 = PV + PV \cdot i = PV \cdot (1 + i) = PV_2$$

po druhom roku

$$FV_2 = PV_2 \cdot (1 + i) = PV \cdot (1 + i)^2 = PV_3$$

po treťom roku

$$FV_3 = PV_3 \cdot (1 + i) = PV \cdot (1 + i)^3 = PV_4$$

$$\vdots$$

po $n-$tom roku

$$FV_n = PV \cdot (1 + i)^n$$

Budúca hodnota kapitálu - Príklad 1

Príklad:

Do banky sme uložili 500 eur. Aká bude výška kapitálu po troch rokoch, ak je ročná úroková miera 3,6 %?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 500 \\ i & = & 0{,}036 \\ n & = & 3 \\ \hline FV_3 & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$FV = FV_n \quad = \quad PV \cdot (1+i)^n = 500(1+0{,}036)^3 = 555{,}967$$

Budúca hodnota kapitálu - Príklad 2

Príklad:

Máme teraz možnosť kúpiť za 50 000 eur nehnuteľnosť, ktorej hodnota bude o 2 roky 65 000 eur. Čo je pre nás výhodnejšie, kúpiť nehnuteľnosť teraz alebo vložiť peniaze do banky s ročnou úrokovou mierou 8 % a nehnuteľnosť kúpiť o 2 roky?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 50\,000 \\ FV & = & 65\,000 \\ i & = & 0{,}08 \\ n & = & 2 \\ \hline FV_2 & = & ? \end{array}$$

Budúca hodnota kapitálu - Príklad 2

Riešenie:

$$FV = FV_n = PV \cdot (1+i)^n = 50\ 000(1+0{,}08)^2 = 58\ 320$$

$$58\ 320 < 65\ 000$$

je výhodnejšie kúpiť nehnuteľnosť

Začiatočná hodnota kapitálu

Výpočet začiatočnej hodnoty kapitálu, úrokovej sadzby a úrokovacieho obdobia, ak i je ročná úroková sadzba:

Nech
$$FV_n = PV \cdot (1+i)^n$$

Potom

$$PV = \frac{FV_n}{(1+i)^n}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{FV_n}{PV}} - 1$$

$$n = \frac{\ln \frac{FV_n}{PV}}{\ln(1+i)}$$

Úroková sadzba - Príklad 3

Príklad:

Vklad vzrástol pri zloženom úrokovaní na trojnásobok za 15 rokov. Akou ročnou úrokovou sadzbou bol úročený?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV_{15} & = & 3PV \\ n & = & 15 \\ \hline i & = & ? \end{array}$$

Úroková sadzba - Príklad 3

Riešenie:

$$\begin{aligned} FV_{15} &= PV \cdot (1+i)^{15} \\ FV_{15} &= 3PV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PV \cdot (1+i)^{15} &= 3PV \\ (1+i)^{15} &= 3 \\ i &= \sqrt[15]{3} - 1 \\ i &= 0{,}076 \end{aligned}$$

Úrokové obdobie - Príklad 4

Príklad:

Za aký čas sa zdvojnásobí vklad uložený v banke pri 5% ročnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV_n & = & 2PV \\ i & = & 0,05 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

Úrokové obdobie - Príklad 4

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
FVn &= PV \cdot (1+i)^n \\
FV_n &= 2PV \\
\\
PV \cdot (1+i)^n &= 2PV \\
(1+i)^n &= 2 \\
\ln(1+i)^n &= \ln 2 \\
n \cdot \ln(1+i) &= \ln 2 \\
n &= \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} \\
\\
n &= \frac{\ln 2}{\ln(1+0{,}05)} \\
\\
n &= 14{,}2
\end{aligned}
$$

Odúročenie (diskontovanie)

$$PV = \frac{FV_n}{(1+i)^n}$$

Položme $n = 1$

$$\Longrightarrow \quad PV = \frac{FV_1}{1+i}$$

$$\Longrightarrow \quad v = \frac{1}{1+i} \qquad \text{diskontný faktor}$$

$$\Longrightarrow \quad PV = FV_n \cdot v^n$$

Odúročenie (diskontovanie) - Príklad 5

Príklad:

Podnikateľ si na rozbehnutie výroby zobral pôžičku za predpokladu, že za šesť rokov splatí 80 000 eur. Keďže sa mu dobre darilo, chce pôžičku splatiť za štyri roky. Koľko zaplatí pri 8% ročnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV_6 & = & 80\ 000 \\ i & = & 0{,}08 \\ n & = & 2 \\ \hline FV_4 & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$FV_4 = FV_6 \cdot \frac{1}{(1+i)^2} = \frac{80\ 000}{(1+0{,}08)^2} = 68\ 587{,}106$$

Zmena úrokového obdobia, budúca hodnota kapitálu

Nech

n	dĺžka úrokového obdobia v rokoch
m	počet úrokových períód (konverzií) za rok
j	ročná úroková sadzba, ak $m > 1$

potom

$\frac{j}{m}$	úroková sadzba za jednu periódu
$(1 + \frac{j}{m})^m$	úročiteľ (za jeden rok)
$FV_n = PV \cdot (1 + \frac{j}{m})^{m \cdot n}$	budúca hodnota kapitálu

Zmena úrokového obdobia, úročiteľ

- úročiteľ za 1 rok

$$\underbrace{\left(1+\frac{j}{m}\right)\cdot\left(1+\frac{j}{m}\right)\cdots\left(1+\frac{j}{m}\right)}_{m\text{–krát}} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

- úročiteľ za n rokov

$$\left(\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}\right)^{n} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}$$

Budúca hodnota kapitálu - Príklad 6

Príklad:

Vložili sme do banky 1 000 eur pri 5% ročnej úrokovej miere. Akú sumu dostaneme po troch rokoch, ak sa úroky pripisovali

1. raz do roka,
2. mesačne?

Zápis:

1.
$$\begin{array}{lcl} PV & = & 1\ 000 \\ i & = & 0{,}05 \\ n & = & 3 \\ m & = & 1 \\ \hline FV_3 & = & ? \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{lcl} PV & = & 1\ 000 \\ j & = & 0{,}05 \\ n & = & 3 \\ m & = & 12 \\ \hline FV_3 & = & ? \end{array}$$

Budúca hodnota kapitálu - Príklad 6

Riešenie:

- počet konverzií $m = 1$

$$\begin{aligned} FV_n &= PV \cdot (1+i)^n \\ FV_3 &= 1\ 000 \cdot (1+0{,}05)^3 = \\ &= 1\ 157{,}625 \end{aligned}$$

- počet konverzií $m > 1$

$$\begin{aligned} FV_n &= PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} \\ FV_3 &= 1\ 000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12 \cdot 3} = \\ &= 1\ 161{,}472 \end{aligned}$$

Súčasná hodnota kapitálu - Príklad 7

Príklad:

Na kúpu bytu v hodnote 50 000 eur sme si založili účet s 5% nominálnou úrokovou mierou. Koľko musíme dnes vložiť na účet pri štvrťročnom úrokovaní, aby sme mali o 10 rokov potrebnú sumu?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV_{10} & = & 50\ 000 \\ j & = & 0{,}05 \\ n & = & 10 \\ m & = & 4 \\ \hline PV & = & ? \end{array}$$

Súčasná hodnota kapitálu - Príklad 7

Riešenie:

$$FV_n = PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$$

$$PV = \frac{FV_n}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}}$$

$$PV = \frac{50\ 000}{\left(1 + \frac{0{,}05}{4}\right)^{4 \cdot 10}}$$

$$PV = 30\ 420{,}67$$

Úroková miera - Príklad 8

Príklad:

Akú nominálnu úrokovú mieru poskytuje banka pri mesačnom úročení, v ktorej vám počas siedmych rokov narástol kapitál 8 000 eur na hodnotu 10 580,1109 eur?

Zápis:

$$
\begin{array}{lcl}
FV_7 & = & 10\ 580,1109 \\
PV & = & 8\ 000 \\
n & = & 7 \\
m & = & 12 \\
\hline
j & = & ?
\end{array}
$$

Úroková miera - Príklad 8

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
FV_n &= PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} \\
10\ 580,1109 &= 8\ 000 \cdot \left(1 + \frac{j}{12}\right)^{12 \cdot 7} \\
\left(1 + \frac{j}{12}\right)^{84} &= \frac{10\ 580,1109}{8\ 000} \\
\left(1 + \frac{j}{12}\right) &= \sqrt[84]{\frac{10\ 580,1109}{8\ 000}} \\
j &= 12 \cdot (\sqrt[84]{\frac{10\ 580,1109}{8\ 000}} - 1) = 0,04 \\
j \cdot 100\% &= 4\ \%
\end{aligned}
$$

Dĺžka úrokového obdobia - Príklad 9

Príklad:

Chceme kúpiť vkladový list v hodnote 8 000 eur za predpokladu polročného úrokovania pri 5% nominálnej úrokovej miere. Za aký čas bude mať tento vkladový list hodnotu 9 000 eur?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 8\ 000 \\ j & = & 0{,}05 \\ FV_n & = & 9\ 000 \\ m & = & 2 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

Dĺžka úrokového obdobia - Príklad 9

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
FV_n &= PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} \\
9\ 000 &= 8\ 000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{2}\right)^{2 \cdot n} \\
\frac{9}{8} &= 1{,}025^{2n} \\
\log \frac{9}{8} &= \log 1{,}025^{2n} \\
\log \frac{9}{8} &= 2n \cdot \log 1{,}025 \\
n &= \frac{1}{2} \frac{\log \frac{9}{8}}{\log 1{,}025} \\
n &= 2{,}385
\end{aligned}
$$

Efektívna ročná úroková sadzba

Definícia

Efektívna ročná úroková sadzba i^* je úroková sadzba, ktorá pri jednoduchom úrokovaní zabezpečí rovnaký úrok ako nominálna pri zloženom úrokovaní.

Položme $n = 1$, resp. $t = 1$, potom

$$FV_1 = PV \cdot (1 + \tfrac{j}{m})^m, \qquad \text{resp.} \qquad FV = PV \cdot (1 + i^* \cdot 1)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad PV \cdot (1 + \tfrac{j}{m})^m &= PV \cdot (1 + i^* \cdot 1) \\ 1 + i^* &= (1 + \tfrac{j}{m})^m \\ i^* &= (1 + \tfrac{j}{m})^m - 1 \end{aligned}$$

Efektívna ročná úroková sadzba - Príklad

Príklad:

Banka poskytuje na vklady 6,8 % nominálnu úrokovú mieru. Vypočítajme ročnú efektívnu úrokovú mieru v prípade

1. mesačného konvertovania,
2. polročného konvertovania.

Zápis:

$$
\begin{array}{lrcl}
1. & j & = & 0{,}068 \\
 & n & = & 1 \\
 & m & = & 12 \\
\hline
 & i^* & = & ?
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lrcl}
2. & j & = & 0{,}068 \\
 & n & = & 1 \\
 & m & = & 2 \\
\hline
 & i^* & = & ?
\end{array}
$$

Efektívna ročná úroková sadzba - Príklad

Riešenie:

- počet konverzií $m = 12$

$$\begin{aligned} i^* &= \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 = \\ &= \left(1 + \frac{0{,}068}{12}\right)^{12} - 1 = \\ &= 0{,}07016 \end{aligned}$$

- počet konverzií $m = 2$

$$\begin{aligned} i^* &= \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 = \\ &= \left(1 + \frac{0{,}068}{2}\right)^{2} - 1 = \\ &= 0{,}069156 \end{aligned}$$

Zmiešané úrokovanie - budúca hodnota kapitálu

zmiešané úrokovanie - úrokové obdobie sa dá vyjadriť v tvare $n + t$, kde n je celé číslo udávajúce počet rokov a t je číslo menšie ako jedna, udávajúce časť roka

všeobecne: úrokové obdobie je väčšie ako úroková perióda, ale nie je celočíselným násobkom úrokovej periódy

Budúcu hodnotu kapitálu počítame zo vzťahu

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + i \cdot t)$$

Budúca hodnota kapitálu - Príklad 1

Príklad:

Vypočítajme, aká bude akumulovaná hodnota kapitálu 1 500 eur pri 5% ročnej úrokovej miere od 28. 5. 2005 do 31. 12. 2011, ak je pre medziobdobie kratšie ako jeden rok používané jednoduché úrokovanie.

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 1\,500 \\ i & = & 0{,}05 \\ t & = & \dfrac{212}{360} \\ n & = & 6 \\ \hline FV & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$FV = PV\cdot(1+i)^n\cdot(1+i\cdot t) = 1\,500(1+0{,}05)^6(1+0{,}05\cdot\tfrac{212}{360}) = 2\,069{,}331$$

Budúca hodnota kapitálu - Príklad 2

Príklad:

Vypočítajme, aká bude akumulovaná hodnota kapitálu 1 500 eur pri 5% ročnej úrokovej miere od 28. 5. 2005 do 31. 10. 2012, ak je pre medziobdobie kratšie ako jeden rok používané jednoduché úrokovanie.

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 1\ 500 \\ i & = & 0{,}05 \\ t_1 & = & \dfrac{212}{360} \\ n & = & 6 \\ t_2 & = & \dfrac{10}{12} \\ \hline FV & = & ? \end{array}$$

Budúca hodnota kapitálu - Príklad 2

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
FV &= PV \cdot (1 + i \cdot t_1) \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot t_2) = \\
&= 1\ 500 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot \tfrac{212}{360}) \cdot (1 + 0{,}05)^6 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot \tfrac{10}{12}) = \\
&= 2\ 155{,}553
\end{aligned}
$$

Súčasná hodnota kapitálu - Príklad 3

Príklad:

Koľko musíme dnes vložiť do banky, ktorá poskytuje 0,04 úrokovú sadzbu pri zmiešanom úrokovaní, keď o 3 roky a 4 mesiace potrebujeme mať nasporených 3 200 eur.

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV & = & 3\ 200 \\ i & = & 0{,}04 \\ n & = & 3 \\ t & = & \frac{4}{12} \\ \hline PV & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n \cdot (1+i \cdot t)} = \frac{3\ 200}{(1+0{,}04)^3(1+0{,}04 \cdot \frac{4}{12})} = 2\ 807{,}357$$

Spojité úrokovanie - budúca hodnota kapitálu

spojité úrokovanie - dĺžka úrokovej periódy $\Delta t \to 0$, teda počet konverzií $m \to \infty$

Budúcu hodnotu kapitálu počítame zo vzťahu

$$FV_t = PV \cdot e^{j \cdot t}$$

$$FV_t = \lim_{m \to \infty} PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot t}$$

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} = e^{j}$$

$$\Longrightarrow FV_t = PV \cdot e^{j \cdot t}$$

Úrokové obdobie - Príklad 1

Príklad:

Za aký čas sa na účte zdvojnásobí vložená suma eur, ak nominálna ročná úroková miera je 8 % a úroky sa pripisujú

1. mesačne,
2. spojite?

Zápis:

1. $$\begin{array}{lcl} j & = & 0{,}08 \\ FV_n & = & 2PV \\ m & = & 12 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

2. $$\begin{array}{lcl} j & = & 0{,}08 \\ FV_t & = & 2PV \\ m & \to & \infty \\ \hline t & = & ? \end{array}$$

Úrokové obdobie - Príklad 1

Riešenie:

- počet konverzií $m = 12$

$$
\begin{aligned}
FV_n &= PV \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} \\
FV_n &= 2PV \\
\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} &= 2 \\
\left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right)^{12 \cdot n} &= 2 \\
n &= 8{,}69
\end{aligned}
$$

- počet konverzií $m \to \infty$

$$
\begin{aligned}
FV_t &= PV \cdot e^{j \cdot t} \\
FV_t &= 2PV \\
e^{0{,}08t} &= 2 \\
t &= 8{,}66
\end{aligned}
$$

Úroková miera - Príklad 2

Príklad:

Uvažujete o kúpe vkladového listu s nominálnou hodnotou 16 000 eur, ktorý má mať o 4 roky hodnotu 21 597,74 eur za predpokladu spojitého úrokovania. Akej nominálnej úrokovej miere zodpovedá výnos z tohto vkladového listu?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} PV & = & 16\ 000 \\ FV_4 & = & 21\ 597,74 \\ t & = & 4 \\ m & \to & \infty \\ \hline j & = & ? \end{array}$$

Úroková miera - Príklad 2

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
FV_t &= PV \cdot e^{j \cdot t} \\
21\ 597{,}74 &= 16\ 000 \cdot e^{j \cdot 4} \\
e^{4 \cdot j} &= \frac{21\ 597{,}74}{16\ 000} \\
4j &= \ln \frac{21\ 597{,}74}{16\ 000} \\
j &= \frac{1}{4} \ln \frac{21\ 597{,}74}{16\ 000} = 0{,}075 \\
j \cdot 100\ \% &= 7{,}5\ \%
\end{aligned}
$$

Súčasná hodnota kapitálu - Príklad 3

Príklad:

Na kúpu bytu v hodnote 50 000 eur sme si založili účet s 5% nominálnou úrokovou mierou. Koľko musíme dnes vložiť na účet pri spojitom úrokovaní, aby sme mali o 10 rokov potrebnú sumu?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} FV_{10} & = & 50\ 000 \\ j & = & 0{,}05 \\ n & = & 10 \\ m & \to & \infty \\ \hline PV & = & ? \end{array}$$

Súčasná hodnota kapitálu - Príklad 3

Riešenie:

$$FV_t = PV \cdot e^{j \cdot t}$$

$$PV = \frac{FV_t}{e^{j \cdot t}}$$

$$PV = \frac{50\ 000}{e^{0{,}05 \cdot 10}}$$

$$PV = 30\ 326,53$$

Efektívna ročná úroková sadzba

Definícia

Efektívna ročná úroková sadzba i^* je úroková sadzba, ktorá pri jednoduchom úrokovaní zabezpečí rovnaký úrok ako nominálna pri spojitom úrokovaní.

Položme $t = 1$ v oboch prípadoch, potom

$$FV_1 = PV \cdot e^{j \cdot 1}, \qquad \text{resp.} \qquad FV = PV \cdot (1 + i^* \cdot 1)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad PV \cdot e^j &= PV \cdot (1 + i^*) \\ 1 + i^* &= e^j \\ i^* &= e^j - 1 \end{aligned}$$

Optimálna doba vlastnenia

Nech $V(t)$ je rastúca funkcia, ktorá vyjadruje hodnotu nejakej cennosti. Nech existuje banka so spojitým úrokovaním s ročnou úrokovou sadzbou j.

Otázka: Máme si cennosť ponechať alebo predať a peniaze uložiť do banky?

Ak $\frac{V'(t)}{V(t)} > j$, tak je výhodné si cennosť nechať,

ak $\frac{V'(t)}{V(t)} < j$, tak je výhodné cennosť predať,

ak $\frac{V'(t)}{V(t)} = j$, tak je to z hľadiska ceny jedno.

Optimálna doba vlastnenia - Príklad

Príklad:

Predpokladajme, že vlastníme pozemok, ktorého cena o t rokov odteraz bude $V(t) = 10\ 000\, e^{\sqrt{t}}$. Ak by ročná úroková miera zostala na rovnakej úrovni 5 % a pripisovanie úrokov by bolo spojité, po akom čase by sa oplatilo pozemok predať a získané peniaze uložiť na účet?

Riešenie:

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \frac{10\ 000 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}}{10\ 000 \cdot e^{\sqrt{t}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{t}}$$

zistíme, kedy klesajúca hodnota pozemku dosiahne hodnotu úrokovej sadzby

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{t}} &= 0{,}05 \\ t &= 100 \end{aligned}$$

Princíp finančnej ekvivalencie - Definícia

Definícia

Princíp finančnej ekvivalencie spočíva vo vyjadrení platieb k rovnakému dátumu. Tento dátum nazývame porovnávací (referenčný) dátum (R. D.). Ekvivalentné finančné operácie sú operácie, ktoré dávajú k tomu istému dátumu platby rovnakej hodnoty. Rovnica ekvivalencie (hodnotová rovnica) vyjadruje rovnosť platieb ekvivalentných operácií.

Rozlišujeme

- jednoduché úrokovanie - ak R.D. existuje, tak je jednoznačný a len vtedy sú platby ekvivalentné
- zložené úrokovanie - R.D. je ľubovoľný a ak sú platby ekvivalentné, tak kedykoľvek

Hodnotová rovnica

Zostavenie hodnotovej rovnice pre

1. jednoduché úrokovanie
   - úrokovanie (i je nominálna úroková sadzba)

$$FV = PV \cdot (1 + i \cdot t)$$

   - diskontovanie (d je nominálna diskontná sadzba)

$$PV = FV \cdot (1 - i \cdot d)$$

   nominálna hodnota je
   - súčasná hodnota - ak je daná úroková miera
   - budúca hodnota - ak je daná diskontná miera

2. zložené úrokovanie

$$FV_n = PV \cdot (1 + i)^n$$

Princíp finančnej ekvivalencie - Príklad 1

Príklad:

Dlžník má podľa dohody zaplatiť veriteľovi 500 eur o 3 mesiace a 400 eur o 6 mesiacov pri 6% ročnej úrokovej miere. Splátky chce ale nahradiť jednou splátkou, ktorú vyplatí o 8 mesiacov. Aká bude jej výška?

Riešenie:

$$\frac{500}{1+0{,}06\cdot\frac{3}{12}}+\frac{400}{1+0{,}06\cdot\frac{6}{12}} = \frac{X}{1+0{,}06\cdot\frac{8}{12}}$$

$$\begin{aligned} 0{,}96154X &= 880{,}96035 \\ X &= 916{,}2 \end{aligned}$$

Princíp finančnej ekvivalencie - Príklad 2

Príklad:

Dlžník má podľa dohody zaplatiť veriteľovi 500 eur o 3 mesiace a 400 eur o 6 mesiacov pri 6% ročnej úrokovej miere. Splátky chce ale nahradiť rovnako veľkými splátkami, ktoré vyplatí o 5 a 8 mesiacov. Aká bude ich výška?

Riešenie:

$$\frac{500}{1+0{,}06\cdot\frac{3}{12}}+\frac{400}{1+0{,}06\cdot\frac{6}{12}} = \frac{X}{1+0{,}06\cdot\frac{5}{12}}+\frac{X}{1+0{,}06\cdot\frac{8}{12}}$$

$$X\left(\frac{1}{1+0{,}06\cdot\frac{5}{12}}+\frac{1}{1+0{,}06\cdot\frac{8}{12}}\right) = \frac{400}{1+0{,}06\cdot\frac{6}{12}}+\frac{500}{1+0{,}06\cdot\frac{3}{12}}$$

$$1{,}93715X = 880{,}96035$$

$$X = 454{,}77178$$

Princíp finančnej ekvivalencie - Príklad 3

Príklad:

Máme dve zmenky v nominálnych hodnotách 200 eur a 202 eur s dobou splatnosti 17. 7. 2012 a 22. 8. 2012 pri 10% ročnej diskontnej miere. Určme dátum ekvivalencie týchto zmeniek.

Riešenie:

x ... počet dní pred dátumom 17. 7.
hodnotová rovnica využitím $PV = FV \cdot (1 - i \cdot d)$:

$$\begin{aligned} 200 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot \frac{x}{360}\right) &= 202 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot \frac{x + 35}{360}\right) \\ 100 \cdot \left(1 - \frac{x}{3\,600}\right) &= 101 \cdot \left(1 - \frac{x + 35}{3\,600}\right) \\ 100 \cdot (3\,600 - x) &= 101 \cdot (3\,565 - x) \\ x &= 65 \end{aligned}$$

Princíp finančnej ekvivalencie - Príklad 4

Príklad:

Dlžník má veriteľovi zaplatiť nasledujúce platby: 1 200 eur o 2 roky, 1 600 eur o 4 roky a 2 000 eur o 6 rokov. Avšak chce ich splatiť jednou ekvivalentnou platbou o 5 rokov pri 7% ročnej úrokovej miere. Vypočítajme veľkosť splátky.

Riešenie:

$$\begin{aligned} S &= 1\ 200 \cdot (1+i)^3 + 1\ 600 \cdot (1+i) + \frac{2\ 000}{1+i} = \\ &= 1\ 200 \cdot (1+0{,}07)^3 + 1\ 600 \cdot (1+0{,}07) + \frac{2\ 000}{1+0{,}07} = \\ &= 5\ 051{,}21048 \end{aligned}$$

Princíp finančnej ekvivalencie - Príklad 5

Príklad:

Zistite, či je pre dlžníka výhodnejšie žiadať zaplatiť 30 000 eur o 4 roky alebo zaplatiť 15 000 eur o 2 roky a 16 000 eur o 5 rokov pri 5% ročnej úrokovej miere?

Riešenie:

$$\begin{aligned} S &= 15\,000 \cdot (1+i)^2 + \frac{16\,000}{1+i} = \\ &= 15\,000 \cdot (1+0{,}05)^2 + \frac{16\,000}{1+0{,}05} = \\ &= 31\,775{,}60 > 30\,000 \end{aligned}$$

Pre dlžníka je výhodnejšia 1. možnosť.

Princíp finančnej ekvivalencie - Príklad 6

Príklad:

Zistite, či je pre veriteľa výhodnejšie žiadať zaplatiť 24 000 eur o 4 roky alebo zaplatiť 14 000 eur o 3 roky a 12 000 eur o 6 rokov pri 3% ročnej úrokovej miere?

Riešenie:

$$\begin{aligned} S &= 14\ 000 \cdot (1+i) + \frac{12\ 000}{(1+i)^2} = \\ &= 14\ 000 \cdot (1+0{,}05) + \frac{12\ 000}{(1+0{,}05)^2} = \\ &= 25\ 731{,}15 > 24\ 000 \end{aligned}$$

Pre veriteľa je výhodnejšia 2. možnosť.

Pojem inflácie a cenového indexu

Definícia

Pokles (nárast) hodnoty peňazí oproti širokej skupine tovarov nazývame inflácia (deflácia). Ukazovateľom vzťahu hodnoty peňazí a skupiny tovarov je cenový index, ktorý predstavuje súhrnú cenu týchto produktov v určených množstvách.

Cenové indexy:

- Index spotrebiteľských cien CPI (Consumer Price Index)
- Index cien výrobcov PPI (Producer Price Index)
- Deflátor HDP

Cenové indexy

- Index spotrebiteľských cien *CPI* - maloobchodná cena spotrebného koša vybraných položiek spotrebného tovaru a služieb
- Index cien výrobcov *PPI* - analogicky
- Deflátor HDP - pomer nominálneho a reálneho hrubého domáceho produktu (slúži na porovnanie rôznych štátov)

Miera inflácie

Definícia

Miera inflácie za obdobie $< t_1, t_2 >$ je relatívna zmena cenového indexu za toto obdobie.

Zápis:

$$i_{infl} \cdot 100\ \% = \frac{CPI_{t_2} - CPI_{t_1}}{CPI_{t_1}} \cdot 100\ \%$$

Definícia

Priemerná ročná miera inflácie za obdobie $< t, t+n >$ je definovaná vzťahom

$$CPI_{t+n} = CPI_t \cdot (1 + i_{infl})^n$$

kde CPI_t (CPI_{t+n}) je cenový index na začiatku (na konci) obdobia.

Miera inflácie - Príklad 1

Príklad:

Aká bola priemerná ročná miera inflácie v Brazílii v období od konca roku 1980 do konca roku 1998 meraná indexom CPI, ak $CPI_{1980} = 120{,}8$ a $CPI_{1998} = 242{,}8$?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} CPI_{1980} & = & 120{,}8 \\ CPI_{1998} & = & 242{,}8 \\ n & = & 18 \\ \hline i_{infl} & = & ? \end{array}$$

Miera inflácie - Príklad 1

Riešenie:

$$\begin{aligned}
CPI_{t+n} &= CPI_t \cdot (1 + i_{infl})^n \\
242,8 &= 120,8 \cdot (1 + i_{infl})^{18} \\
(1 + i_{infl})^{18} &= 2{,}00993 \\
i_{infl} &= 0{,}03955 \\
i_{infl} \cdot 100\% &= 3,96\%
\end{aligned}$$

Vplyv inflácie na mieru zisku

- nominálna miera zisku $i_{nom} \cdot 100$ %
  - nezohľadňuje infláciu
- reálna miera zisku $i_{real} \cdot 100$ %
  - zohľadňuje infláciu

Veta (Fisherova rovnica)

Nech $i_{nom} \cdot 100$ % je nominálna miera zisku, $i_{real} \cdot 100$ % je reálna miera zisku a $i_{infl} \cdot 100$ % je miera inflácie, tak platí

$$1 + i_{nom} = (1 + i_{real}) \cdot (1 + i_{infl}).$$

Vplyv inflácie na mieru zisku - Príklad 2

Príklad:

Aká je očakávaná reálna miera zisku, ak je nominálna miera zisku 9 % a miera inflácie 4,5 %?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} i_{nom} & = & 0,09 \\ i_{infl} & = & 0,045 \\ \hline i_{real} & = & ? \end{array}$$

Miera inflácie - Príklad 2

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
1 + i_{nom} &= (1 + i_{real}) \cdot (1 + i_{infl}) \\
1 + 0{,}09 &= (1 + i_{real}) \cdot (1 + 0{,}045) \\
1 + i_{real} &= \frac{1+0{,}09}{1+0{,}045} \\
i_{real} &= \frac{1+0{,}09}{1+0{,}045} - 1 \\
i_{real} &= 0{,}04306 \\
i_{real} \cdot 100\% &= 4,31\%
\end{aligned}
$$

Vplyv inflácie na mieru zisku - Príklad 3

Príklad:

Uložili sme si 5 000 eur v banke s ročnou úrokovou mierou 8 %. Inflácia dosahuje priemerne okolo 5 %. Aká bude reálna hodnota nášho vkladu po roku?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} PV & = & 5\ 000 \\ i_{nom} & = & 0,08 \\ i_{infl} & = & 0,05 \\ \hline i_{real} & = & ? \\ FV & = & ? \end{array}$$

Miera inflácie - Príklad 3

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
1 + i_{nom} &= (1 + i_{real}) \cdot (1 + i_{infl}) \\
1 + 0,08 &= (1 + i_{real}) \cdot (1 + 0{,}05) \\
1 + i_{real} &= \frac{1{,}08}{1{,}05} \\
1 + i_{real} &= 1{,}02857 \\
i_{real} &= 0{,}0286
\end{aligned}
$$

$$FV = FV_n = PV \cdot (1+i)^n = PV \cdot (1+i_{real})^n = 5\,000 \cdot 1{,}02857 = 5\,142{,}86$$

Vplyv inflácie na mieru zisku - Príklad 4

Príklad:

Priemerná výška mesačného zárobku zamestnanca vo firme je 850 eur. Predpokladajme, že sa výška zárobku nebude meniť počas nasledujúcich 2 rokov. Aká bude reálna hodnota mesačného zárobku po 2 rokoch, ak sa inflácia pohybuje priemerne okolo 4,5 %?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} PV & = & 850 \\ i_{nom} & = & 0 \\ i_{infl} & = & 0,045 \\ \hline i_{real} & = & ? \\ FV & = & ? \end{array}$$

Miera inflácie - Príklad 4

Riešenie:

$$\begin{aligned}
1 + i_{nom} &= (1 + i_{real}) \cdot (1 + i_{infl}) \\
1 + 0 &= (1 + i_{real}) \cdot (1 + 0{,}045) \\
1 + i_{real} &= \frac{1}{1{,}045} \\
1 + i_{real} &= 0{,}956938 \\
i_{real} &= -0{,}043
\end{aligned}$$

$$FV = FV_n = PV \cdot (1+i)^n = PV \cdot (1+i_{real})^n = 850 \cdot 0{,}956938^2 = 778{,}3705$$

Ďakujem za pozornosť.