# MOCNINOVÝ RAD

JE RAD ŠPEC. FCIÍ

$$\underbrace{a_0 + \underbrace{a_1(x-a)}_{\text{LIN. Č.}} + \underbrace{a_2(x-a)^2}_{\text{kvadr.}} + \dots}_{} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

premenná

koeficienty

stred !!

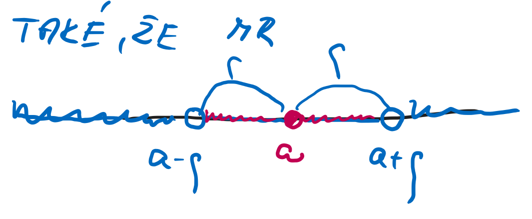
OT 1. Kedy MR (pre ktoré x) konv.?
OT 2. Kde to využijeme?

AK v MR $\sum a_n(x-a)^n$ dosadíme za $x$ reál. číslo ($x=5$),
TAK MR $\to$ ČR $\to$ už môžme kritéria konv/div

MR $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$
dosadí $x = a$
ČR $a_0 + 0 + 0 + \dots = a_0$ KONV
súčet

Veta Každý MR konverguje vo svojom strede!

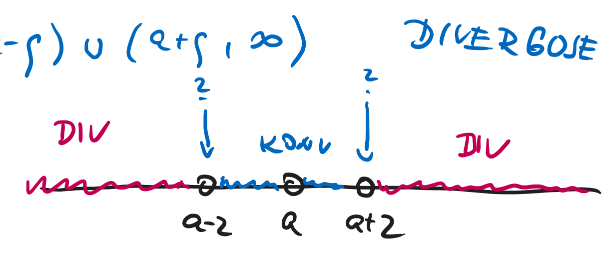
Veta (teoretická) PRE KAŽDÝ MR $\sum a_n(x-a)^n$ EXISTUJE „ČÍSLO" $\rho$ (POLOMER KONVERGENCIE), TAKÉ, ŽE MR KONVERGUJE NA $(a-\rho, a+\rho)$



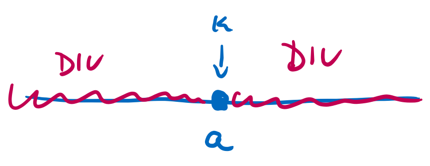

AK $\rho$ je KONEČNÉ TAK MR NA DOPLNKU $(-\infty, a-\rho) \cup (a+\rho, \infty)$ DIVERGUJE

VYSVETLENIE

ak napr. $\rho = 2 \Rightarrow$



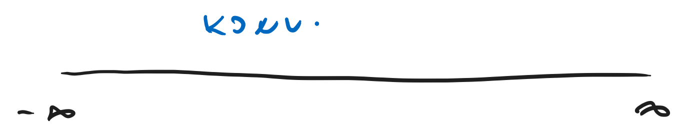

$\rho = 0 \Rightarrow$




NEZAUJÍMAVÉ

$\rho = \infty \Rightarrow$ KON $(a-\infty, a+\infty) = (-\infty, \infty)$

BEST OT




AKO NÁJSŤ $\rho$ (polomer konv)

MYŠLIENKA:

MR.. $\sum \frac{x^n}{n}$ t.j. $a = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$

$x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ČR
$x = 5$: $\sum \frac{5^n}{n}$ ČR

máme PODIELOVÉ resp. ODMOCNINOVÉ KR ???

ÚVAHA

MÁME MR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$

PREDSTAVME SI, ŽE $x$ je KONKR. ČÍSLO

ČR $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ($b_n = a_n(x-a)^n$ ↳ číslo)

NA VYŠETRENIE KONV (resp. DIV) POUŽIJEME PODIELOVÉ KRIT.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n} \right| = 1$$

$$= |x-a| \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}_{\lambda} = |x-a| \cdot \lambda < 1$$

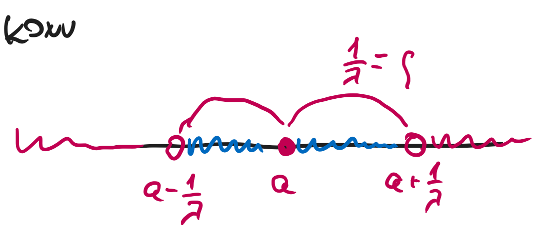
POZNÁME Z ČR

ak $\lambda \in (0,\infty)$
$0 < \lambda < \infty$

$|x-a| < \frac{1}{\lambda} = \rho$

stred.

KONV




čo ak $\lambda = 0$

↳ $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = |x-a| \cdot 0 = 0 < 1$ všade

konv. môže na $(-\infty, \infty)$

t.j. $\rho = \infty = \frac{1}{0}$

čo ak $\lambda = \infty$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = |x-a| \cdot \infty = \infty$ DIV ($x \neq a$)

všade okrem $x = a$

Veta (o polomere konv)

Nech pre MR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ existuje $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$.

Potom polomer konv. $\rho = \frac{1}{\lambda}$

(v špec. príp.
$\lambda = 0 \Rightarrow \rho = \infty$
$\lambda = \infty \Rightarrow \rho = 0$)

PREPOSIELANÉ S POD KRIT.
AK BY SME V ÚVAHÁCH POUŽILI ODMOCNINOVÉ KRIT
TAK BY SME DOŠLI $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ opäť $\rho = \frac{1}{\lambda}$

PRÍKLAD

DANÝ $\sum \frac{10^n}{n} x^n$

$a = 0$
$a_n = \frac{10^n}{n}$
kladné

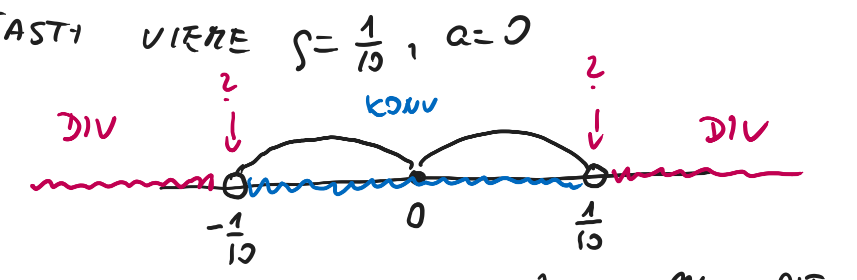
1° NÁJDITE POLOMER KONV.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{n+1}}{\frac{10^n}{n}} = 10 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 10$$

t.j. $\rho = \frac{1}{10}$ ✓

2° NÁJDITE OBOR KONV (t.j. vš. $x$ pre ktoré MR KONV)

Z 1. ČASTI VIEME $\rho = \frac{1}{10}$, $a = 0$




ostáva vyšetriť KONV/DIV pre $x = -\frac{1}{10}$, $x = \frac{1}{10}$

$x = -\frac{1}{10} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{10^n}{n} \left(-\frac{1}{10}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ALT KONV

$x = \frac{1}{10} \Rightarrow \sum \frac{10^n}{n} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ HARM DIV

$O = \left\langle -\frac{1}{10}, \frac{1}{10} \right)$