MR ... $\sum_{1}^{\infty} a_n (x-a)^n$

A V ĎALŠOM PREDP., ŽE $\rho > 0$ t.j. na $(a-\rho, a+\rho)$ MR KONV. t.j. MÁ SÚČET ?

OPERÁCIE S MR

Nech $\rho > 0$ t.j. na $(a-\rho, a+\rho)$ platí

$$s(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$

súčet radu

Potom na $(a-\rho, a+\rho)$ platí

✓ $s'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots$ ← MR

✓ $\int s(x)\,dx = a_0(x-a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + a_2\frac{(x-a)^3}{3} + \dots$ ← MR

✓ $\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-a)^n\,dx$

POLOMER KONV. SA NEMENÍ!

PRAKT. POUŽITIE

Geom. rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (= s(x))$$

$|x|<1$, $\rho = 1$

MR $a_n = 1$, $a = 0$

NOVÝ MR

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \dots x \in (-1,1)$$

$$2 + 3.2x + 4.3x^2 + \dots = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

NOVÝ MR

ANALOG. MÔŽEME AJ INTEGR.

MY SMERUJEME K TOMUTO:

MÁME Geom. rad $q = -x^2$ $|x|<1$ t.j. $|q|<1$

MR $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2}$

integ

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \operatorname{arctg} x + \cancel{c} \quad (x=0)$$

$0 = 0 + c$

t.j. elem. fciu $f(x) = \operatorname{arctg} x$ sme napísali ako súčet MR

NÁŠ CIEĽ: DANÚ EL. FCIU NAPÍSAŤ AKO SÚČET MR

$f(x) = e^x$, $= \sin x$, $= \cos x$

$$\int_0^{1/2} \operatorname{arctg} x\,dx = \int_0^{1/2} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\,dx$$

$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2} - \frac{x^4}{3.4}\Big|_0^{1/2} + \frac{x^6}{5.6}\Big|_0^{1/2} - \dots$$

$$= \frac{1}{2.1.2^2} - \frac{1}{3.4\,2^4} + \frac{1}{5.6\,2^6} - \frac{1}{7.8.2^8} + \dots$$

súčet ALT. RAD $a_n \downarrow 0$

chyba $\leq \frac{1}{56\,2^8}$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\int_0^{1/2} \operatorname{arctg}(t^2)\,dt = \int_0^{1/2} t^2 - \frac{t^6}{3} + \frac{t^{10}}{5} - \dots$$

PF nenájd.

$$\frac{t^3}{3} - \frac{t^7}{3.7} + \frac{t^{11}}{5.11}\Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{3.7.2^7} + \frac{1}{5.11\,2^{11}}$$

$\geq$ chyba

Pre $\ln x$ je „VÝROBA" MR KOMPLIKOVANÁ

ALE

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad ✓$$

DERIVUJ ↕ int.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$|x|<1$ t.j. $\rho = \frac{1}{2}$

SPOZNÁVAM SÚČET GEOM. RADU

BOHUŽIAĽ TIETO TRIKY NEFUNGUJÚ PRE e^x, $\sin x$, $\cos x$ MR

$\sin(2+3i)$, NÁVOD NA POTOM

MUSÍME ODVODIŤ ČOSI NOVÉ

SMER VSTUP → VÝSTUP

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

DANÁ EL. FCIA

$a_n = ?$ a - ZVOLENÉ ($a=0$)

AKÉ MÁ BYŤ a_n? VO VŠEOBECNOSTI?

INÝ ZÁPIS

$\rho > 0$

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots = f(x)$$

$a-\rho$, a, $a+\rho$

DOSAĎ $x = a$

$$a_0 = f(a) = f^{(0)}(a) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}$$

VZŤAH MEDZI SÚČTOM MR A KOEF

$a_1 = ?$

DERIVUJ

$$a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \dots = f'(x)$$

$x = a$

$$a_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!}$$

DER.

$$2a_2 + 3.2a_3(x-a) + 4.3(x-a)^2 + \dots = f''(x)$$

$x = a$

$$2a_2 = f''(a) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}$$

ODHAD

$$a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

ZÁVER. NECH

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{na } (a-\rho, a+\rho)$$

POTOM

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

TOTO JE NÁVOD NA VÝROBU MR

POSTUP

DANÉ

$$f(x) \underset{\text{NUTNE}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

VÝST. a_n

PÝTAM SA, ČI AK K $f(x)$ „VYROBÍM" MR, ČI SÚČET MR JE PÔVODNÁ FCIA

ZLÁ SPR. — NEMUSÍ

DOBRÁ SPR. → PRE EL. FCIE ÁNO

TAYLOROV RAD

TR = MR, kde $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

MÁME $f(x) = e^x$

VYRÁBAME TR $\sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ → ŠTAND. $a = 0$

$f(0) = 1$

$f'(x) = e^x$ ... $f'(0) = 1$

$f^{(n)}(x) = e^x$ ... $f^{(n)}(0) = 1$

BINGO $(-\infty, \infty)$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

TR, a_n

$\rho = ?$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$\rho = \frac{1}{\lambda} = \infty$

Vieme

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

PR.

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt = \int_0^1 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots\,dt$$

ŠT. SPÔSOB NEFUNG. PF k e^{-t^2} NEMÁME

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{2.5} - \frac{t^7}{3!\,7} + \dots \Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2.5} - \frac{1}{3!\,7}$$

VÝROBA $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ OPÄŤ TR v $a = 0$

$f(x) = \sin x$ $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ $f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(0) = \sin x$

KOEF TR SA OPAKUJÚ

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$f(x) = \cos x$ $f(0) = 1$, 0, -1, 0

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

NA POTOM FCIA KOMPL. PREM.