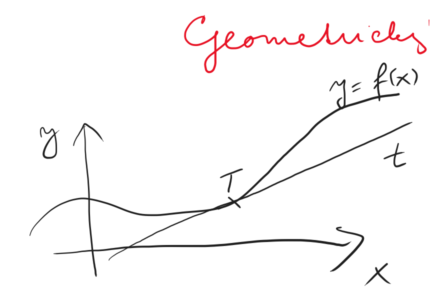
Geometrický význam derivácie



$T[x_0, y_0]$

$t: \; y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x) = x^3 + 3x$ $\quad T[2, ?]$ $\quad ? = f(2)$, $\; ? = 2^3 + 3.2$, $\; ? = 14$

$f'(x) = 3x^2 + 3$ $\quad T[2, 14]$ $\quad x_0 = 2$, $y_0 = 14$

$f'(2) = 3.2^2 + 3$

$f'(2) = 15$

$t: \; y - 14 = 15(x - 2)$

$y = 15x - 30 + 14$

$t: \; \boxed{y = 15x - 16}$

Limity – doplnok

$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = ?$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{x} = e^k$ $\quad$ 1^∞ – neurčitý výraz

$\circledast \to \infty$ až $x \to \infty$ $\quad$ ($\frac{k}{x} \to 0$)

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = e^5$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{7}{x}\right)^x = e^{-7}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2+1}\right)^{x^2+1} = e^3$ $\qquad x \to \infty$ aj $x^2 + 1 \to \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+1} [1^\infty] = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{(x+1)+1}{x+1}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1} = e$ $\quad$ ($\frac{x+2}{x+1} \to 1$)

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^{x^2} [1^\infty] = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^{x^2} = e^{-2}$ $\quad$ $x^2 \to \infty$ až $x \to \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+7}{x-1}\right)^{x-1} [2^\infty] = \infty$ $\quad$ ($\to 2$; $2 > 1$)

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{3x+8}\right)^{3x} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^\infty\right] = 0$ $\quad$ ($\to \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} < 1$)

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{7x^2+11x}{5x^2-13}\right)^x \left[\left(\frac{7}{5}\right)^\infty\right] = \infty$ $\quad$ ($\to \frac{7}{5} > 1$)

L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(musí existovať)

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

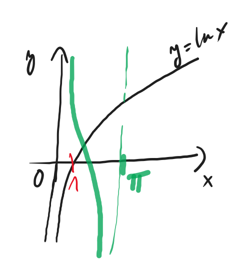
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \cdot 2^x}{2^x - 1} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x + x \cdot 2^x \ln 2}{2^x \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x - 4^x}{x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x \ln 3 - 4^x \cdot \ln 4}{1} = \ln 3 - \ln 4 = \ln \frac{3}{4}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{5^x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{5^x \cdot \ln 5} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{5^x \cdot \ln 5 \cdot \ln 5} \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} [e^\infty] = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{-x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$



$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{-1} = 0$

$\frac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{0}{0}$ $\qquad$ L'H

$\infty - \infty$, $\; 0 \cdot \infty$, $\; 1^\infty, \infty^0, 0^0$ $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}$ $\quad$ L'H

neurčité výrazy

$\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1) \cdot \ln x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$ $\quad$ ($\ln x \to 0^+$, $x - 1 \to 0^+$)

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x - 1}{x \cdot \ln x + x - 1} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x \cdot \sin x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x - x \cdot \sin x - \cos x}{\sin x + x \cdot \cos x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x \cdot \sin x}{\sin x + x \cdot \cos x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\sin x - x \cdot \cos x}{\cos x + \cos x + x \cdot (-\sin x)} = \frac{0}{2} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{(e^x - 1) + x \cdot e^x} \left[\frac{0}{0}\right]$

$x \to 0^+: \; \frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+} = \infty - \infty$

$x \to 0^-: \; \frac{1}{0^-} - \frac{1}{0^-} = -\infty - (-\infty) = \infty - \infty$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x \cdot e^x} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} \cdot \ln x \; [0 \cdot (-\infty)] = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} \circledequal$

$\sqrt{x} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\ln x)^{-1}}$ $\qquad x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$a \cdot b = \frac{a}{b^{-1}} = \frac{b}{a^{-1}}$

$\circledequal \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -2x^{-1+\frac{3}{2}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} -2\sqrt{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \operatorname{cotg} x \; [0 \cdot (\pm\infty)] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{(\operatorname{cotg} x)^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1} = 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} \; [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} \; [1^\infty] = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2} \cdot \ln \cos 2x} =$

$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln [f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln \cos 2x} \; [\infty \cdot 0] = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2}} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-2 \operatorname{tg} 2x}{2x}} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2}{1}} = e^{-2}$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \; [\infty^0] = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln x} \; [0 \cdot \infty] =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1$ $\quad$ ($\frac{1}{x} \to 0$)