Monotónnosť, lokálne extrémy, konvexnosť/konkávnosť

utorok 21. novembra 2023 10:25

MONOTÓNNOSŤ FUNKCIE

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 \qquad D(f) = R$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

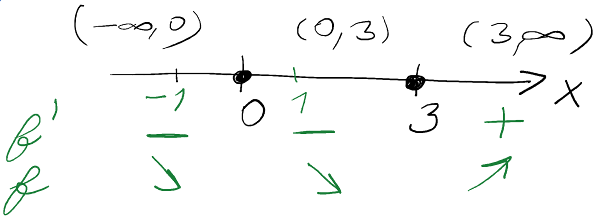
$f'(x) > 0$ RASTÚCA

$f'(x) < 0$ KLESAJÚCA

METÓDA NULOVÝCH BODOV

$4x^2(x-3) = 0$ ✓

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 3$



x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	−	0	−	0	+
f	↘		↘		↗

FUNKCIA JE KLESAJÚCA NA: $(-\infty,0) \cup (0,3)$

FUNKCIA JE RASTÚCA NA: $(3,\infty)$

2) $f(x) = x \cdot \ln x \qquad x > 0 \qquad D(f) = (0,\infty) = R^+$

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$\ln x^n = n \ln x$

$f'(x) = 0$

$\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1 \quad / e^{(\ )}$

$e^{\ln x} = e^{-1}$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\ln e = 1$

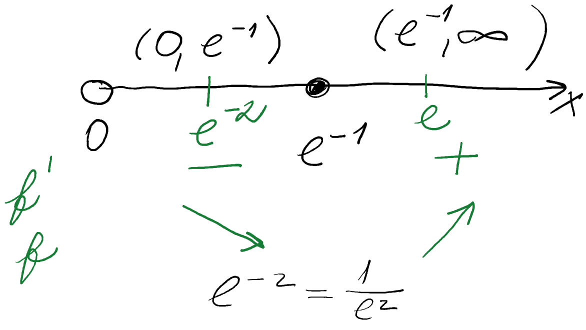
$\ln x = (-1) \cdot \ln e = -1$

$\ln x = \ln e^{-1}$

$x = e^{-1}$

✓ $f'(e^{-2}) = \ln e^{-2} + 1 = -2 + 1 = -1$

✓ $f'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$



x	$(0,e^{-1})$	e^{-1}	(e^{-1},∞)
f'	−	0	+
f	↘		↗

FUNKCIA JE KLESAJÚCA NA: $(0, e^{-1})$

FUNKCIA JE RASTÚCA NA: (e^{-1}, ∞)

STACIONÁRNE BODY

STACIONÁRNE BODY

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 \qquad D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

$\boxed{S.B.}$ $\quad f'(x) = 0 \qquad$ STACIONÁRNE BODY S.B.

$4x^2(x-3)$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

2) $f(x) = x \cdot \ln x \quad D(f) = \mathbb{R}^+$

$f'(x) = \ln x + 1$

S.B. $\quad f'(x) = 0$

$\ln x + 1 = 0$

$x = e^{-1}$

3) $f(x) = x^2 \qquad D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x$

S.B. $\quad f'(x) = 0$

$2x = 0$

$x = 0$

4) $f(x) = |x| \quad D(f) = \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(0) = 1 \\ f'_-(0) = -1 \end{array}\right\} \nexists f'(0)$$

$f'_+(0) = x' = 1$

$f'_-(0) = -x' = -1$

LOKÁLNE EXTRÉMY POMOCOU MONOTÓNNOSTI

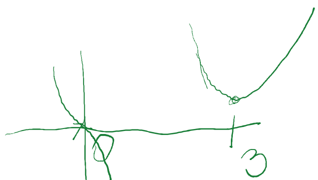
1) $f(x) = x^4 - 4x^3 \qquad D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$

S.B. $\quad f'(x) = 0$

$4x^2(x-3) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$



$f'(x) > 0 \quad \nearrow$

$f'(x) < 0 \quad \searrow$

	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\nexists$ extrém	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

FUNKCIA NEMÁ V BODE $x=0$ LOKÁLNY EXTRÉM

FUNKCIA MÁ V BODE $x=3$ LOKÁLNE MINIMUM

$f(3)=3^4-4\cdot 3^3=3^3(3-4)=-27$

2) $f(x)=x\cdot\ln x$ $\quad D(f)=\mathbb{R}^+$

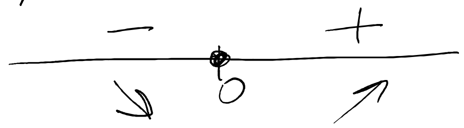
	$(0,e^{-1})$	e^{-1}	(e^{-1},∞)
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

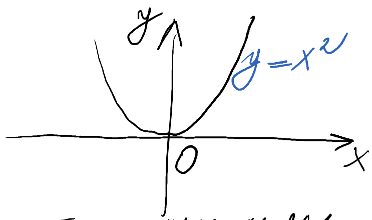
FUNKCIA NADOBÚDA V BODE $x=e^{-1}$ LOKÁLNE MINIMUM

$f(e^{-1})=e^{-1}\cdot\ln e^{-1}=-e^{-1}$

3) $f(x)=x^2$ $\quad D(f)=\mathbb{R}$

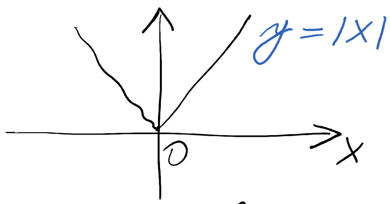
$f'(x)=2x$





FUNKCIA NADOBÚDA V BODE $x=0$ LOKÁLNE MINIMUM $f(0)=0$

4) $f(x)=|x|$



$x=0$ $\quad\nexists$ DERIVÁCIA (KRITICKÝ BOD)

v $x=0$ MÁ FUNCIA LOKÁLNE MINIMUM $f(0)=0$

OVERENIE LOK. EXTRÉMU POMOCOU VYŠŠÍCH DERIVÁCIÍ

1) $f(x)=x^4-4x^3$

$f'(x)=\boxed{4x^3-12x^2}=4x^2(x-3)$

S.B. $f'(x)=0$

$4x^2(x-3)=0$

$x_1=0 \quad x_2=3$ ✓

$f''(x)=12x^2-24x$

$f''(3)=12\cdot 9-24\cdot 3=36>0 \Rightarrow$ LOKÁLNE MINIMUM

PÁRNA V BODE $x=3$ MÁ EXTRÉM

$f''(0)=0$

$f'''(x)=24x-24$

$f'''(0)=-24\neq 0$

$f'''(x) = 24x - 24$

$f^{III}(0) = -24 \neq 0$

NEPÁRNA $\Longrightarrow$ $\nexists$ EXTRÉM V BODE $x=0$

2) $f(x) = x^5 - 5x^4 \qquad D(f) = R$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3$

S.B. $\quad f'(x) = 0$

$5x^3(x-4) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

$f''(x) = 20x^3 - 60x^2$

$f''(0) = 0$ ✓

$f'''(x) = 60x^2 - 120x$

$f'''(0) = 0$ ✓

$f^{IV}(x) = 120x - 120$

$f^{IV}(0) = -120 < 0 \Longrightarrow$ LOKÁLNE MAXIMUM

PÁRNA $\Longrightarrow$ V BODE $x=0$ LOKÁLNY EXTRÉM

PÁRNA $\Longrightarrow$ $\exists$ EXTRÉM

$f^{II}(4) = 320 > 0$

V BODE $x=4$ MÁ LOKÁLNE MINIMUM

3) $f(x) = x \cdot \ln x \qquad D(f) = R^+$

$f'(x) = \ln x + 1$ ✓

S.B. $\quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

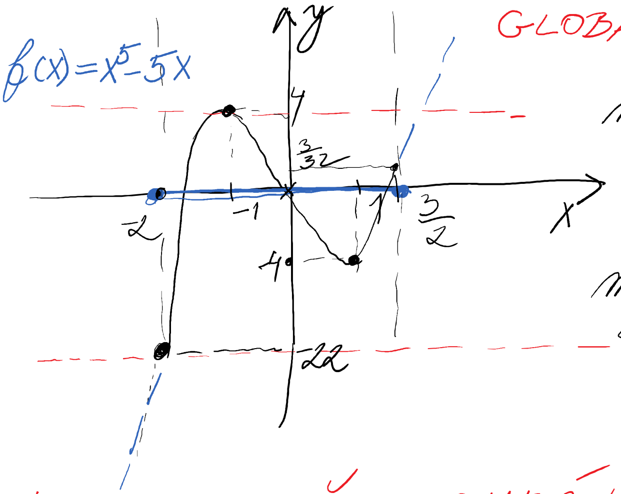
$f''(x) = \frac{1}{x}$

$f^{II}(x) = e > 0$

PÁRNA

MÁ V BODE $x = e^{-1}$ LOKÁLNE MINIMUM $\quad f(e^{-1}) = e^{-1}\ln e^{-1} = -e^{-1}$

GLOBÁLNE EXTRÉMY



$\min\limits_{\langle -2, \frac{3}{2}\rangle} f(x) = \min\{f(-1), f(1), f(-2), f(\tfrac{3}{2})\}$

$= \min\{4, -4, -22, \tfrac{3}{32}\} = -22$

$\max\limits_{\langle -2, \frac{3}{2}\rangle} f(x) = \max\{f(-1), f(1), f(-2), f(\tfrac{3}{2})\}$

$= \max\{4, -4, -22, \tfrac{3}{32}\} = 4$

KONVEXNOSŤ - KONKÁVNOSŤ

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 \qquad D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ ✓

NULOVÉ BODY: $12x^2 - 24x = 0$

$12x(x-2) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
x	-1	1	3
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	∪	∩	∪

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
f''	+	0	−	0	+
f	∪	I.B	∩	I.B.	∪

$x = 0,\ x = 2$ SÚ INFLEXNÉ BODY

FUNKCIA JE R. KONVEXNÁ NA $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

FUNKCIA JE R. KONKÁVNA NA $(0, 2)$

2) $f(x) = x^5 - 5x^4 \qquad D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3$

$f''(x) = 20x^3 - 60x^2$

N.B. $\quad 20x^{2}(x-3) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 3$

	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
x	-1		
$f''(x)$	−	−	+
$f(x)$	∩	∩	∪

	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,\infty)$
f''	−	0	−	0	+
f	∩	X	∩	I.B	∪

$x=0$ NIE JE INFLEXNÝ BOD

$x=3$ JE INFLEXNÝ BOD

FUNKCIA JE KONKÁVNA NA $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

FUNKCIA JE KONVEXNÁ NA $(3, \infty)$

3) $f(x) = x \cdot \ln x \qquad D(f) = \mathbb{R}^+ = \boxed{(0, \infty)}$

$f'(x) = \ln x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in D(f)$

$f''(x) = \frac{1}{x} \neq 0$

FUNKCIA JE KONVEXNÁ NA CELOM $D(f)$

FUNKCIA NEMÁ INFLEXNÉ BODY