Z-transformácia

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Z-transformáciou postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = f(n)$, $a_n \in C$*, ktorá spĺňa podmienku* $|a_n| \leq Me^{\alpha n}$ $(M > 0, \alpha \in R)$*, nazývame komplexnú funkciu* $F(z)$*, kde*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \textit{pre } |z| > e^{\alpha}.$$

Funkciu $F(z)$ nazývame obrazom predmetu $f(n)$ pri Z-transformácii. Vzťah, korešpondenciu, medzi predmetom a obrazom zapisujeme

$$f(n) \div F(z).$$

1. Lineárnosť
   Ak $f(n) \div F(z)$, $g(n) \div G(z)$, $c_1, c_2 \in R$, tak
   $$c_1 f(n) + c_2 g(n) \div c_1 F(z) + c_2 G(z).$$
2. Tlmenie, alebo veta o substitúcii nezávislej premennej v obraze
   Ak $f(n) \div F(z)$, $a \in C$, $a \neq 0$, tak
   $$a^n f(n) \div F\left(\frac{z}{a}\right).$$
3. Veta o predstihu
   Ak $f(n) \div F(z)$, $k \in N$, tak
   $$f(n+k) \div z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f(n)}{z^n}\right].$$

1. Veta o oneskorení
   Ak $f(n) \div F(z)$, $k \in N$, tak
   $$f(n-k) \div z^{-k}F(z).$$
2. Veta o derivovaní obrazu
   Ak $f(n) \div F(z)$, $k \in N$, tak
   $$nf(n) \div -zF'(z),$$
   $$n(n+1)f(n) \div z^2F''(z),$$
   $$n(n+1)\dots(n+k-1)f(n) \div (-1)^k z^k F^{(k)}(z).$$
3. Veta o obraze diferencie
   Ak $f(n) \div F(z)$, $k \in N$, tak
   $$\Delta f(n) \div (z-1)F(z) - zf(0),$$
   $$\Delta^k f(n) \div (z-1)^k F(z) - z\sum_{r=0}^{k-1}(z-1)^{k-r-1}\Delta^r f(0), k > 1.$$

predmet (vzor) $f(n)$	obraz $F(z)$
1	$\frac{z}{z-1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
e^{an}	$\frac{z}{z-e^a}$
$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
$\cos \omega n$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$

Definícia

Inverzná Z-transformácia Z^{-1} je definovaná pre všetky $n \in N$ vzťahom

$$f(n) = a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K F(z) z^{n-1}\, dz,$$

kde krivka K je kladne orientovaná kružnica taká, že vo svojom vnútri obsahuje všetky singulárne body funkcie $F(z)$ a leží v prstencovom okolí bodu ∞.

Ak funkcia $F(z)$ má práve k-izolovaných singulárnych bodov $z_1, z_2, \ldots, z_k$ vo vnútri krivky K, potom môžeme na výpočet integrálu použiť Cauchyho integrálnu vetu

$$f(n) = \sum_{j=1}^{k} res[F(z)z^{n-1}]_{z_j}.$$

Ak z_1 je jednoduchý pól funkcie $F(z)$ potom reziduum v tomto bode počítame podľa nasledujúceho vzťahu

$$res[F(z)z^{n-1}]_{z_1} = \lim_{z \to z_1} \left[(z - z_1)F(z)z^{n-1} \right].$$

Ak z_1 je pól násobnosti m funkcie $F(z)$ potom reziduum v tomto bode počítame podľa nasledujúceho vzťahu

$$res[F(z)z^{n-1}]_{z_1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_1} \left[(z - z_1)^m F(z)z^{n-1} \right]^{(m-1)}.$$