Max-plus algebra

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

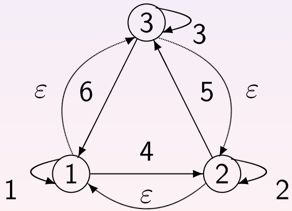
Obsah

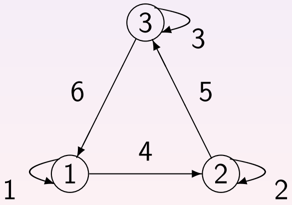
Kompletný digraf

Matica prechodu DDS

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 5 \\ 6 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$$

kompletný digraf $\mathcal{G}_c(A)$ zodpovedajúci konečný digraf $\mathcal{G}(A)$





Konečný digraf

Definícia

Pre maticu $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ definujeme digraf $\mathcal{G}(A) = (V, E)$ s množinou vrcholov $V = \{1, 2, ..., n\}$ a hranami (i, j) s konečnou váhou a_{ij}. Ak usporiadanej dvojici (i, j) zodpovedá hodnota $a_{ij} = \varepsilon$, tak digraf $\mathcal{G}(A)$ neobsahuje hranu z vrchola i do vrchola j.

Dráhy a cykly

Definícia

Dráha v digrafe $\mathcal{G}(A) = (V, E)$ je taká postupnosť vrcholov $p = (i_1, i_2, ..., i_{r+1})$ s $r \geq 0$, že $(i_t, i_{t+1}) \in E$ pre každé $t \in \{1, 2, ..., r\}$. Číslo r nazývame dĺžkou dráhy a označujeme $|p|$. Ak $i_1 = i_{r+1}$, tak p nazývame cyklom. Elementárna dráha je dráha bez opakovaní vrcholov. Elementárny cyklus je dráha, v ktorej sa vyskytuje jediné zopakovanie vrchola $i_1 = i_{r+1}$.

Váha dráhy

Definícia

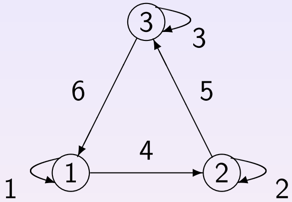
Váhou dráhy (cyklu) nazývame sumu váh jej hrán a označujeme $w(p)$ ($w(c)$). Ak c je cyklus s kladnou dĺžkou, tak podiel váhy cyklu a dĺžky cyklu nazývame priemernou váhou cyklu a označujeme $\bar{w}(c)$. Maximálnu priemernú váhu cyklu zo všetkých elementárnych cyklov v $\mathcal{G}(A)$ označujeme $\lambda(A)$. Cyklus s priemernou váhou rovnou $\lambda(A)$ nazývame kritickým cyklom.

Poznámka: Priemerná váha cyklu nemôže presiahnuť hodnoty priemerných váh elementárnych cyklov, ktoré obsahuje. Keďže je v digrafe konečný počet elementárnych cyklov, $\lambda(A)$ stále existuje. Ak v digrafe nie je cyklus s kladnou dĺžkou, tak $\lambda(A) = \varepsilon$.

Maximálna priemerná váha cyklu - Príklad

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 5 \\ 6 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$$



- $c = (1, 2, 3, 1)$
- $w(c) = 15$
- $|c| = 3$
- $\lambda(A) = \bar{w}(c) = \frac{w(c)}{|c|} = 5$

Digraf pre $A \in F(n, n)$

Veta

Nech $A \in F(n, n)$. Potom digraf $\mathcal{G}(A)$ obsahuje aspoň jeden cyklus konečnej váhy.

D: Z každého vrchola sa dá ísť do nejakého. Konečný počet vrcholov, t.j. musí sa niektorý zopakovať.

Maximálna váha dráh

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Maximálna váha zo všetkých dráh z vrchola i do vrchola j dĺžky r, pre $r = 1, 2, \ldots$ je daná hodnotou $a_{ij}^{(r)}$.

D:

- uvažujme dráhy $p = (i, k, j)$ dĺžky 2 vychádzajúce z vrchola i a končiace vo vrchole j

$$\max\{a_{ik} + a_{kj}\} = \sum_k^{\oplus} a_{ik} \otimes a_{kj} = a_{ij}^{(2)}$$

Slabý tranzitívny uzáver matice

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Slabým tranzitívnym uzáverom matice A v max-plus algebre nazývame sumu jej mocnín

$$\Delta(A) = A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \cdots$$

Poznámka: Ak $\Delta(A) = (\delta_{ij})$, tak δ_{ij} reprezentuje maximálnu váhu dráhy z vrchola i do vrchola j nezávisle na dĺžke dráhy.

Maximálna rýchlosť DDS - odhad

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\mathcal{G}(A)$ obsahuje kritický cyklus dĺžky L. Potom pre ľubovoľný vektor $x \in F(n,1)$ a $t \geq 1$ platí

$$\xi(x,\, A^{Lt} \otimes x) \geq (\lambda(A))^{Lt}$$

D:

- c je kritický cyklus dĺžky L

$$\max_i a_{ii}^{(L)} = (\lambda(A))^L$$

-

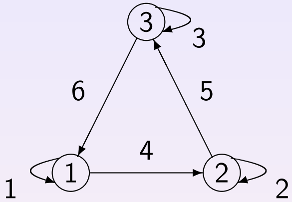
$$\xi(x(1),\, C^t \otimes x(1)) \geq \left(\sum_i^{\oplus} c_{ii} \right)^t$$

- položíme $C = A^L$

Maximálna rýchlosť DDS - Príklad

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 5 \\ 6 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$$



- $c = (1, 2, 3, 1)$
- $w(c) = 15$
- $|c| = 3$
- $\lambda(A) = \bar{w}(c) = \frac{w(c)}{|c|} = 5$

Maximálna rýchlosť DDS - Príklad

$$x(r): \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 23 \\ 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \\ 27 \end{pmatrix}$$

- $\xi(x(1), x(4)) \geq (\lambda(A))^3 = 5^3 = 15$
- $\xi(x(2), x(5)) \geq (\lambda(A))^3 = 5^3 = 15$
- ...

Vrcholy kritického cyklu

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Nech $\mathcal{G}(A)$ obsahuje kritický cyklus dĺžky L $c = (i_1, i_2, \ldots, i_L, i_1)$. Potom pre všetky násobky q čísla L (prirodzeným číslom) platí

$$a_{i_s i_s}^{(q)} = (\lambda(A))^q \quad \forall s = 1, 2, \ldots, L$$

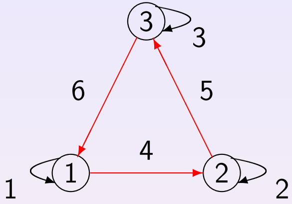
D:

- priemerná váha každého cyklu je menšia alebo rovná ako maximálna
$$a_{i_s i_s}^{(q)} \leq (\lambda(A))^q$$
- q je násobok L, môžeme c namotať a dostať dĺžku q
$$a_{i_s i_s}^{(q)} \geq (\lambda(A))^q$$

Vrcholy kritického cyklu - Príklad 1

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 5 \\ 6 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$$



všetky vrcholy ležia na kritickom cykle $c = (1, 2, 3, 1)$

$$a_{ii}^{(3)} = (\lambda(A))^3 = 5^3 = 15 \qquad i = 1,\ 2,\ 3$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 12 \\ 14 & 15 & 11 \\ 12 & 13 & 15 \end{pmatrix}$$

Vrcholy kritického cyklu - Príklad 1

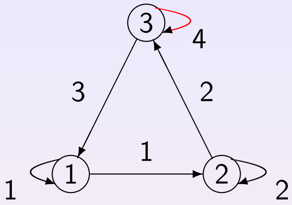
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 5 \\ 6 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix},\ A^2=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 11 & 4 & 8 \\ 9 & 10 & 6 \end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} \color{red}{15} & 8 & 12 \\ 14 & \color{red}{15} & 11 \\ 12 & 13 & \color{red}{15} \end{pmatrix},$$

$$A^4=\begin{pmatrix} 18 & 19 & 15 \\ 17 & 18 & 20 \\ 21 & 16 & 18 \end{pmatrix},\ A^5=\begin{pmatrix} 21 & 22 & 24 \\ 26 & 21 & 23 \\ 24 & 25 & 21 \end{pmatrix},\ A^6=\begin{pmatrix} \color{red}{30} & 25 & 27 \\ 29 & \color{red}{30} & 26 \\ 27 & 28 & \color{red}{30} \end{pmatrix}\ldots$$

Vrcholy kritického cyklu - Príklad 2

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \\ 3 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix}$$



kritický cyklus $c = (3, 3)$

$$a_{33}^{(k)} = (\lambda(A))^k = 4^k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 10 \\ 11 & 8 & 12 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 11 \\ 13 & 10 & 14 \\ 15 & 12 & 16 \end{pmatrix} \ldots$$

p-regulárnosť

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Nech $\Delta_p = A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \cdots \oplus A^p$. Maticu A nazývame p-regulárnou v max-plus algebre, ak

$$\Delta(A) = \Delta_p = \Delta_{p+1} = \Delta_{p+2} = \dots$$

Veta

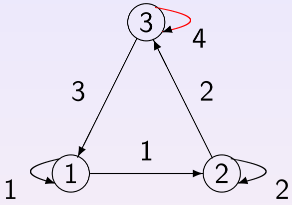
Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Potom platí

1. Ak $\lambda(A) \leq 0$, tak existuje $p \leq n$, že je matica A p-regulárna.
2. Ak $\lambda(A) > 0$, tak neexistuje p, aby bola matica A p-regulárna.

p-regulárnosť - Príklad 1

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \\ 3 & \varepsilon & 4 \end{pmatrix}$$



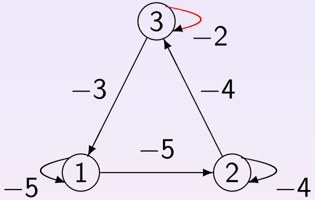
kritický cyklus $c = (3,3)$ $\quad a_{33} = \lambda(A) = 4$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 15 \\ 17 & 14 & 18 \\ 19 & 16 & 20 \end{pmatrix}, A^6 = \begin{pmatrix} 18 & 15 & 19 \\ 21 & 18 & 22 \\ 26 & 20 & 24 \end{pmatrix}, A^7 = \begin{pmatrix} 22 & 19 & 23 \\ 25 & 22 & 26 \\ 27 & 24 & 28 \end{pmatrix} \dots$$

p-regulárnosť - Príklad 2

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & \varepsilon \\ \varepsilon & -4 & -4 \\ -3 & \varepsilon & -2 \end{pmatrix}$$



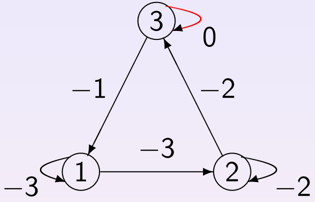
kritický cyklus $c = (3,3)$ $\qquad a_{33} = \lambda(A) = -2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -10 & -9 & -9 \\ -7 & -8 & -6 \\ -5 & -8 & -4 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} -12 & -13 & -11 \\ -9 & -12 & -8 \\ -7 & -10 & -6 \end{pmatrix} A^4 = \begin{pmatrix} -14 & -17 & -13 \\ -11 & -14 & -10 \\ -9 & -12 & -8 \end{pmatrix}$$

p-regulárnosť - Príklad 3

Príklad:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & -2 \\ -1 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$



kritický cyklus $c = (3,3)$ $\quad a_{33} = \lambda(A) = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & -5 & -5 \\ -3 & -4 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -6 & -7 & -5 \\ -3 & -6 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -5 \\ -3 & -6 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^5 = A^6 \ldots$$

Silný tranzitívny uzáver

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Silným tranzitívnym uzáverom matice A v max-plus algebre nazývame sumu

$$\Gamma(A) = E \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \cdots$$

Poznámka: $\Gamma(A) = E \oplus \Delta(A)$

neuskutočnenie žiadneho úkonu $\Longrightarrow \Gamma(D) = E \Longrightarrow 0$ na hlavnej diagonále

- nulový zisk (strata)
- $\ln 1$, t.j. logaritmus pravdepodobnosti javu istého ...

Model dopravného systému - pravdepodobnosť dostupnosti

Popis modelu:

Majme dopravný systém v horskej oblasti, ktorý zabezpečuje spojenie obcí N_1, N_2, ... N_n. Nech p_{ij} udáva pravdepodobnosť, že cesta z obce N_i do N_j ostane v zime otvorená. Nájdime pravdepodobnosť najspoľahlivejšej trasy z N_i do N_j.

Riešenie

trasa

$$(N_i, N_{i+1}, \ldots, N_{j-1}, N_j)$$

pravdepodobnosť priechodnosti

$$p_{i,i+1} \cdots p_{j-1,j}$$

Model dopravného systému - pravdepodobnosť dostupnosti

Prechod na max-plus model:

$$\ln(p_{i,i+1} \cdots p_{j-1,j}) = \ln p_{i,i+1} + \cdots + \ln p_{j-1,j}$$

Riešenie:

- položíme $a_{ij} = \ln p_{ij}$
- nájdeme $\Gamma(A) \Longrightarrow \gamma_{ij}$ reprezentuje pravdepodobnosť najspoľahlivejšej trasy (logaritmus)
- $\gamma_{ii} = \ln 1 = 0$ dostupnosť obce N_i z obce N_i je zaručená

Vlastnosti $\Gamma(D)$

Veta

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Nech D je p-regulárna pre nejaké $p \geq 1$, tak silný tranzitívny uzáver existuje a platí

$$\Gamma(D) = (E \oplus D)^p.$$

D: binomická veta

$$\Gamma(D) = E \oplus D \oplus D^2 \oplus D^3 \oplus \cdots D^p = (E \oplus D)^p$$

Výpočet silného tranzitívneho uzáveru - metóda postupného umocňovania

Veta

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Potom platí

$$D^n \leq E \oplus \Delta_{n-1}.$$

D:

- diagonálne prvky $d_{ii}^{(n)} \leq e_{ii} = 0$ (váhy cyklov)
- ostatné prvky $d_{ij}^{(n)}$ váhy dráh dĺžky $n \Longrightarrow$ obsahujú cyklus $\Longrightarrow d_{ij}^{(n)} \leq (\Delta_{n-1})_{ij}$

Dôsledok

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Potom pre ľubovoľné $p \geq n-1$ platí

$$\Gamma(D) = (E \oplus D)^p.$$

Výpočet silného tranzitívneho uzáveru - Príklad

Príklad:

Majme maticu $D \in \mathbb{R}^{\star}(16, 16)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Vypočítajme $\Gamma(D)$.

Riešenie:

$$\Gamma(D) = (E \oplus D)^p \quad p \geq n - 1 = 15$$

$$\Gamma(D) = (E \oplus D)^{15} = (E \oplus D)^{16} = (E \oplus D)^{2^4}$$

Veta

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Potom $\Gamma(D)$ vieme vypočítať metódou postupného umocňovania v čase $O(n^3 \ln n)$.

Výpočet slabého tranzitívneho uzáveru - Príklad

Príklad:

Majme maticu $D \in \mathbb{R}^\star(16,16)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Vypočítajme $\Delta(D)$.

Riešenie:

$$\Delta(D) = D \otimes \Gamma(D) = D \otimes (E \oplus D)^{2^4}$$

Veta

Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Potom $\Delta(D)$ vieme vypočítať metódou postupného umocňovania v čase $O(n^3 \ln n)$.

Silná súvislosť - overenie pomocou $\Delta(D)$

Definícia

Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n, n)$. Digraf $\mathcal{G}(D)$ nazývame silne súvislý, ak pre ľubovoľnú dvojicu rôznych vrcholov i, j existuje dráha z vrchola i do vrchola j.

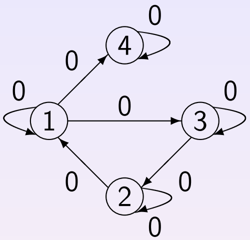
Algoritmus overenia silnej súvislosti:

- každá hrana v digrafe dostane váhu 0
- $\lambda(D) \leq 0 \implies$ vieme vypočítať $\Delta(D)$ a
- ak sú všetky prvky $\Delta(D)$ konečné, digraf je silne súvislý

Overenie silnej súvislosti - Príklad 1

Príklad:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$



Riešenie:

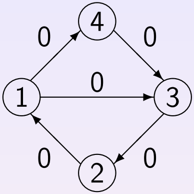
$$\Gamma(D) = (E \oplus D)^3 = D^3 = D^4$$

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Overenie silnej súvislosti - Príklad 2

Príklad:

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$



Riešenie:

$$\Gamma(D) = (E \oplus D)^3 = (E \oplus D)^4$$

$$\Gamma(D) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta(D)$$

Výpočet slabého tranzitívneho uzáveru - Floyd-Warshallov algoritmus

Floyd-Warshallov algoritmus

Pre $D \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$

- zostrojíme postupnosť $D^{\{1\}}$, $D^{\{2\}}$, ..., $D^{\{n+1\}}$
- pre $k = 1, 2, \ldots, n$

$$d_{ij}^{\{k+1\}} = \begin{cases} d_{ij}^{\{k\}} \oplus d_{ik}^{\{k\}} \otimes d_{kj}^{\{k\}} & \text{pre} \quad i \neq k \wedge j \neq k \\ d_{ij}^{\{k\}} & \text{pre} \quad i = k \vee j = k \end{cases}$$

$d_{ij}^{\{k\}}$ reprezentuje maximálnu váhu dráhy z vrchola i do vrchola j, ktorá neprechádza cez žiadny vnútorný vrchol r pre $r \geq k$

Výpočet slabého tranzitívneho uzáveru - Floyd-Warshallov algoritmus

Veta

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Potom

$$\Delta(D) = D^{\{n+1\}},$$

čo Floyd-Warshallov algoritmus vypočíta v čase $O(n^3)$.

Dôsledok

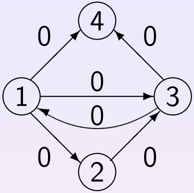
Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Nech $\lambda(D) \leq 0$. Potom Floyd-Warshallov algoritmus vypočíta $\Gamma(D)$ v čase $O(n^3)$.

D: $\Gamma(D) = E \oplus \Delta(D)$

Floyd-Warshallov algoritmus - Príklad

Príklad:

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$



Riešenie: $D^{\{1\}} = D$

$$D^{\{2\}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$d_{ij}^{\{1+1\}} = \begin{cases} d_{ij}^{\{1\}} \oplus d_{i1}^{\{1\}} \otimes d_{1j}^{\{1\}} & \text{pre} \quad i \neq 1 \wedge j \neq 1 \\ d_{ij}^{\{1\}} & \text{pre} \quad i = 1 \vee j = 1 \end{cases}$$

Floyd-Warshallov algoritmus - Príklad

$$D^{\{3\}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad D^{\{4\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\Delta(D) = D^{\{5\}} = D^{\{4\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\Gamma(D) = E \oplus \Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Silne súvislé komponenty

Veta

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. $\mathcal{G}(D)$ je silne súvislý práve vtedy, ak pre každé dva rôzne vrcholy existuje cyklus, ktorý ich obsahuje.

Definícia

Nech $\mathcal{G}(D) = (V, E)$ je digraf. Poddigraf $\mathcal{K} = (K, E \cap K^2)$ generovaný neprázdnou podmnožinou $K \subseteq V$ s vlastnosťami

1. pre každé dva rôzne vrcholy existuje cyklus, ktorý ich obsahuje
2. K je maximálna podmnožina s touto vlastnosťou

nazývame silne súvislý komponent $\mathcal{G}(D)$.

Určenie silne súvislých komponentov pomocou $\Delta(D)$

Algoritmus na určenie silne súvislých komponentov:

1. zvoľme i a nájdime v i-tom riadku $\Delta(D)$ všetky konečné hodnoty δ_{ij}, pre ktoré aj δ_{ji} je konečné $\Longrightarrow$ tieto vrcholy ležia v spoločnom silne súvislom komponente
2. odstránime všetky riadky a stĺpce, ktoré zodpovedali vrcholom spoločného silne súvislého komponentu
3. opakujeme kroky 1 a 2, kým sme neprešli všetky vrcholy

Určenie silne súvislých komponentov pomocou $\Delta(D)$ - Príklad

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

vynecháme 1. a 5. riadok aj stĺpec

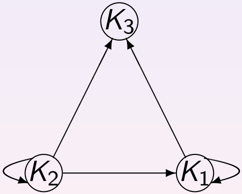
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{1, 5\} \\ K_2 &= \{2, 3, 4\} \\ K_3 &= \{6\} \end{aligned}$$

Kondenzovaný digraf

Kondenzovaný digraf

- vrcholy K_1, K_2, K_3 reprezentujú silne súvislé komponenty



- kondenzovaný digraf je acyklický

Acyklické digrafy - súvislé číslovanie

Definícia

Digraf neobsahujúci okrem slučiek žiadne cykly nazývame acyklický.

Definícia

Acyklický digraf je súvisle očíslovaný, ak pre každú hranu (i, j) platí $i \leq j$.

Veta

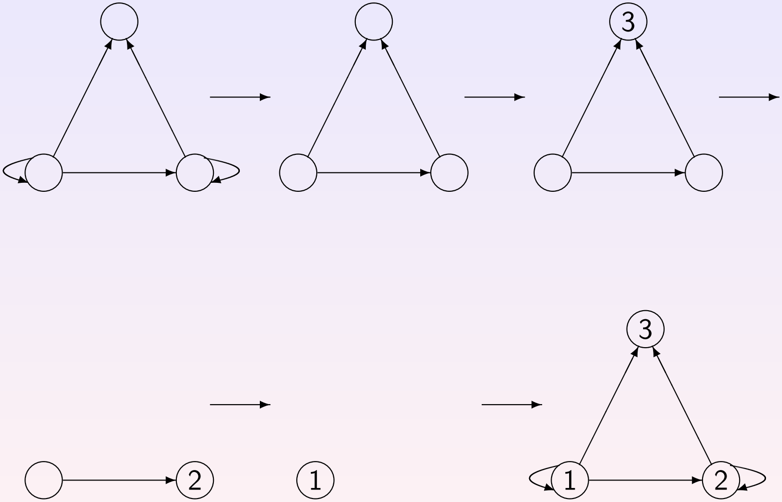
Každý acyklický digraf je možné súvisle (pre)číslovať.

Súvislé očíslovanie acyklického digrafu

Algoritmus na súvislé očíslovanie acyklického digrafu:

1. odstránime slučky
2. priradíme terminálnym vrcholom najvyššie čísla
3. odstránime ich aj s incidentnými hranami
4. opakujeme body 2-3, kým neprejdeme všetky vrcholy

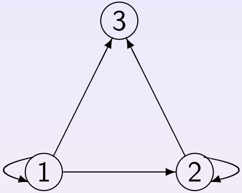
Súvislé očíslovanie acyklického digrafu - Príklad



Matica súvisle očíslovaného acyklického digrafu

Príklad:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$



Veta

Nech $T(n,n)$ je trieda horných trojuholníkových matíc. Potom $T(n,n)$ je uzavretá vzhľadom na $\oplus$ a $\otimes$, t. j. $\forall A, B \in T(n,n)$

1. $A \oplus B \in T(n,n)$
2. $A \otimes B \in T(n,n)$

Ireducibilné a reducibilné matice

Definícia

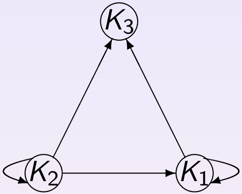
Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Maticu D nazývame ireducibilnou, ak $\mathcal{G}(D)$ je silne súvislý. Maticu D, ktorá nie je ireducibilná nazývame reducibilnou.

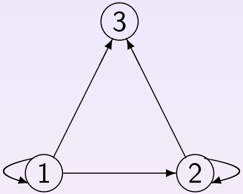
Definícia

Digraf reducibilnej matice je súvisle očíslovaný, ak pre každú hranu (i,j) pre vrcholy i a j z rôznych silne súvislých komponentov platí $i < j$.

Poznámka: Matica súvisle očíslovaného acyklického digrafu má tvar hornej trojuholníkovej matice. Matica súvisle očíslovaného digrafu má tvar hornej blokovo-trojuholníkovej matice.

Súvisle očíslovaného ľubovoľného digrafu





- $K_3 = \{6\}$ $\longleftrightarrow$ 3. v poradí $\longrightarrow \{6\}$
- $K_1 = \{1, 5\}$ $\longleftrightarrow$ 2. v poradí $\longrightarrow \{4, 5\}$
- $K_2 = \{2, 3, 4\}$ $\longleftrightarrow$ 1. v poradí $\longrightarrow \{1, 2, 3\}$

Permutácia vrcholov

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

permutačná matica $P \quad \longrightarrow \quad \exists P^{-1} : \; P \otimes P^{-1} = P^{-1} \otimes P = E$

$$P = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \to P^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{com} = P^{-1} \otimes D \otimes P$$

Permutácia riadkov

$$P^{-1} \otimes D = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Permutácia stĺpcov

$$P^{-1}\otimes D\otimes P=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Matica súvisle očíslovaného digrafu

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \longrightarrow D_{com} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} \color{red}{0} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \color{red}{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \Delta(D_{com}) = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

Horná blokovo-trojuholníková matica

Horná blokovo-trojuholníková matica

$$D_{com} = \left(\begin{array}{c|c|c} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ \hline \varepsilon & D_{22} & D_{23} \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & D_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array}\right)$$

Floyd-Warshallov algoritmus - zhrnutie

Na základe Floyd-Warshallovho algoritmu vieme v čase $O(n^3)$

1. nájsť silne súvislé komponenty
2. vrcholy súvisle očíslovať
3. nájsť hornú blokovo trojuholníkovú maticu

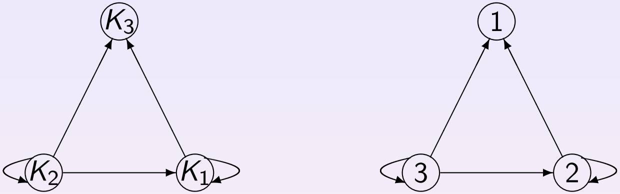
Dolná blokovo-trojuholníková matica

Definícia

Digraf reducibilnej matice je súvisle očíslovaný, ak pre každú hranu (i, j) pre vrcholy i a j z rôznych silne súvislých komponentov platí $i > j$.

Poznámka: Matica súvisle očíslovaného acyklického digrafu má tvar dolnej trojuholníkovej matice. Matica súvisle očíslovaného digrafu má tvar dolnej blokovo-trojuholníkovej matice.

Súvisle očíslovaného ľubovoľného digrafu



- $K_3 = \{6\}$ $\longleftrightarrow$ 1. v poradí $\longrightarrow \{1\}$
- $K_1 = \{1, 5\}$ $\longleftrightarrow$ 2. v poradí $\longrightarrow \{2, 3\}$
- $K_2 = \{2, 3, 4\}$ $\longleftrightarrow$ 3. v poradí $\longrightarrow \{4, 5, 6\}$

Permutácia vrcholov

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutačná matica $P \longrightarrow \exists P^{-1}: \ P \otimes P^{-1} = P^{-1} \otimes P = E$

$$P = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \to P^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$D_{com} = P^{-1} \otimes D \otimes P$$

Matica súvisle očíslovaného digrafu

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \longrightarrow D_{com} = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{array}\right)$$

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \to \Delta(D_{com}) = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dolná blokovo-trojuholníková matica

Dolná blokovo-trojuholníková matica

$$D_{com} = \left(\begin{array}{c|c|c} D_{11} & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline D_{21} & D_{22} & \varepsilon \\ \hline D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{array}\right)$$

Definitné matice

Definícia

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Vrchol j, ktorý leží na kritickom cykle v $\mathcal{G}(D)$ nazývame vlastný vrchol.

Definícia

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. Maticu D nazývame definitnou, ak

1. $\lambda(D) = 0$
2. $\mathcal{G}(D)$ je silne súvislý

Definitné matice - zhrnutie

Veta

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$ je definitná s digrafom $\mathcal{G}(D)$. Potom platí

1. $D \in F(n,n)$, $\Delta(D)$ existuje a je konečná (ak $n > 1$) a δ_{ij} pre $i \neq j$ reprezentuje nejakú dráhu maximálnej váhy z vrchola i do vrchola j dĺžky nepresahujúcej $n-1$
2. každý diagonálny prvok δ_{ii} reprezentuje nejaký cyklus maximálnej váhy zo všetkých cyklov obsahujúcich vrchol i dĺžky nepresahujúcej n
3. $\mathcal{G}(D)$ obsahuje aspoň jeden elementárny cyklus váhy 0 a žiaden s kladnou váhou
4. $\mathcal{G}(D)$ obsahuje aspoň jeden vlastný vrchol, pre každý vlastný vrchol j je $\delta_{jj} = 0$, pre každý iný vrchol k je $\delta_{kk} < 0$

Vlastné vrcholy definitnej matice

Veta

Nech $D \in F(n,n)$ je definitná a $\Delta = \Delta(D)$. Ak j je vlastný vrchol, potom pre každý vrchol i existuje vrchol k taký, že $\delta_{ij} = d_{ik} + \delta_{kj}$.

Veta

Nech $D \in F(n,n)$ je definitná a $\Delta = \Delta(D)$. Pre každý vrchol j existuje vlastný vrchol i taký, že δ_{ij} reprezentuje váhu nejakej dráhy z vrchola i do vrchola j dĺžky $n+1$.

Veta

Nech $D \in F(n,n)$ je definitná, tak $\lambda(D^p) = 0$ (pre $p > 1$) a $\mathcal{G}(D)$ a $\mathcal{G}(D^p)$ majú tie isté vlastné vrcholy.

Tranzitívne uzávery definitných matíc s vlastnosťou rastúcosti

Veta

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$. DES s maticou prechodu D je rastúci vtedy a len vtedy ak $D \geq E$ a potom $D \in F(n, n)$. Ak D je definitná a DES je rastúci, tak

1. $d_{ii} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$
2. $\Gamma(D) = D^{n-1} = \Delta(D)$ a $D \otimes \Delta(D) = \Delta(D)$

Ďakujem za pozornosť.