Max-plus algebra

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Ustálený stav

Motivácia:

Manažéri DDS by chceli dosiahnuť stav, aby systém bežal spôsobom, že medzi ukončením dvoch po sebe idúcich etáp je konštantný interval dĺžky λ, t.j.

$$x_i(r+1) = \lambda + x_i(r) \quad \forall i, \forall r$$

v max-plus algebre

$$x_i(r+1) = \lambda \otimes x_i(r) \quad \forall i, \forall r$$

Ustálený stav a priemerná rýchlosť systému

Definícia

Hovoríme, že DDS je v ustálenom stave, ak existuje také $\lambda \in \mathbb{R}$, že pre každé $r \in \mathbb{N}$

$$x(r+1) = \lambda \otimes x(r)$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{Ak} & x(r+1) & = & \lambda \otimes x(r) \\ \Longrightarrow & x(M+1) & = & \lambda^M \otimes x(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} T(M) & = & \xi\,(x(M+1),\, x(1)) = \\ & = & \xi\left(\lambda^M \otimes x(1),\, x(1)\right) = \\ & = & x(1)' \otimes \left(\lambda^M \otimes x(1)\right) = \\ & = & \lambda^M \otimes x(1)' \otimes x(1) = \\ & = & \lambda^M \\ \frac{T(M)}{M} & = & \lambda \end{array}$$

Vlastný problém

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Riešiť rovnicu

$$A \otimes x = \lambda \otimes x$$

t. j. hľadať vektor $x \in \mathbb{R}^\star(n)$ a skalár $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ také, že účinok matice A na vektor x je rovnaký ako účinok konštanty λ na vektor x, nazývame riešiť vlastný problém pre maticu A. Hodnotu λ nazývame vlastnou hodnotou a príslušný vektor x vlastným vektorom matice A.

Definícia

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$. Hovoríme, že problém vlastnej hodnoty a vlastného vektora má konečné riešenie, ak existujú konečné hodnoty λ a x také, že $A \otimes x = \lambda \otimes x$.

Vlastná hodnota - jednoznačnosť

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ je ireducibilná matica. Potom platí, že $\lambda(A)$ je jediná vlastná hodnota matice A. Navyše ak $n > 1$, tak má vlastný problém konečné riešenie.

Výpočet vlastnej hodnoty umocňovaním matice pre $A \in F(n, n)$

Algoritmus výpočtu vlastnej hodnoty pre $A \in F(n, n)$

1. Vypočítame postupnosť mocnín matice A, A^2, ..., A^n.
2. Diagonálne prvky reprezentujú maximálne váhy cyklov dĺžky $r = 1, 2, \ldots, n$. Predelíme váhy cyklov ich dĺžkou a dostaneme priemerné váhy cyklov.
3. Vyberieme maximálny priemer

Výpočtovej zložitosti dominuje výpočet mocnín matice. Algoritmus pracuje v čase $O(n^4)$.

Aplikácia - výrobná linka - Príklad

Príklad:

Majme výrobnú linku pozostávajúcu zo 4 strojov, ktorú sme predstavili v predošlých príkladoch. Nech A je matica prechodu daného DDS. Aká je priemerná rýchlosť systému, ak sa nachádza v ustálenom stave?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 5 & 2 & \varepsilon \\ 4 & 6 & 3 & 4 \\ \varepsilon & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Riešenie: Keďže $A \in F(4,4)$, existuje konečné riešenie vlastného-problému. Vypočítame postupnosť A, A^2, A^3, A^4 a na jej základe určíme $\lambda(A)$. Priemerná rýchlosť v ustálenom stave je preto $\lambda(A) = 6$.

Výpočet vlastnej hodnoty ireducibilnej matice pomocou Karpovho algoritmu

Veta (Karpov algoritmus)

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$ a $\mathcal{G}(A)$ je silne súvislý. Nech a_i^k je prvok v i-tom riadku a prvom stĺpci matice A^k pre $k = 1, 2, \ldots, n$. Potom platí

$$\lambda(A) = \max_i \left\{ \min_k \left\{ \frac{a_i^{n+1} - a_i^k}{n+1-k} \right\} \right\}$$

pre konečné a_i^{n+1} a a_i^k.

Výpočet vlastnej hodnoty ireducibilnej matice - Príklad

Príklad

Pre danú maticu A vypočítajme vlastnú hodnotu $\lambda(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon & 4 \\ 5 & 3 & \varepsilon \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Riešenie: Potrebujeme len prvé stĺpce mocnín matice A, t. j. na základe stĺpcového princípu vlastne orbit pre vektor $x(1)$ rovný prvému stĺpcu matice A pre $r = 1, 2, \ldots, n+1$:

$$x(r) : \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Výpočet vlastnej hodnoty ireducibilnej matice - Príklad

$$x(r): \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- $i = 1$ $\quad \min \left\{ \frac{20-14}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-4}{3} \right\} = 5$
- $i = 2$ $\quad \min \left\{ \frac{19-15}{1}, \frac{19-9}{2}, \frac{19-5}{3} \right\} = 4$
- $i = 3$ $\quad \min \left\{ \frac{20-16}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-6}{3} \right\} = 4$

$$\lambda(A) = \max_i \{5, 4, 4\} = 5$$

Výpočet vlastnej hodnoty ireducibilnej matice - Príklad

$$x(r):\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\9\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\15\\16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\19\\20\end{pmatrix}$$

- $i=1$ $\quad \min\left\{\frac{20-14}{1},\frac{20-10}{2},\frac{20-4}{3}\right\}=5$
- $i=2$ $\quad \min\left\{\frac{19-15}{1},\frac{19-9}{2},\frac{19-5}{3}\right\}=4$
- $i=3$ $\quad \min\left\{\frac{20-16}{1},\frac{20-10}{2},\frac{20-6}{3}\right\}=4$

$$\lambda(A)=\max_i\{5,4,4\}=5$$

Výpočet vlastnej hodnoty ireducibilnej matice - Príklad

$$x(r): \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- $i = 1$ $\quad \min\left\{\frac{20-14}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-4}{3}\right\} = 5$
- $i = 2$ $\quad \min\left\{\frac{19-15}{1}, \frac{19-9}{2}, \frac{19-5}{3}\right\} = 4$
- $i = 3$ $\quad \min\left\{\frac{20-16}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-6}{3}\right\} = 4$

$$\lambda(A) = \max_i \{5, 4, 4\} = 5$$

Výpočet vlastnej hodnoty ireducibilnej matice - Príklad

$$x(r):\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\9\\10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\15\\16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\19\\20\end{pmatrix}$$

- $i=1$ $\quad \min\left\{\frac{20-14}{1},\frac{20-10}{2},\frac{20-4}{3}\right\}=5$
- $i=2$ $\quad \min\left\{\frac{19-15}{1},\frac{19-9}{2},\frac{19-5}{3}\right\}=4$
- $i=3$ $\quad \min\left\{\frac{20-16}{1},\frac{20-10}{2},\frac{20-6}{3}\right\}=4$

$$\lambda(A)=\max_i\{5,4,4\}=5$$

Výpočet vlastnej hodnoty ireducibilnej matice - Príklad

$$x(r): \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- $i = 1$ $\quad \min\left\{\frac{20-14}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-4}{3}\right\} = 5$
- $i = 2$ $\quad \min\left\{\frac{19-15}{1}, \frac{19-9}{2}, \frac{19-5}{3}\right\} = 4$
- $i = 3$ $\quad \min\left\{\frac{20-16}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-6}{3}\right\} = 4$

$$\lambda(A) = \max_i \{5, 4, 4\} = 5$$

Výpočet vlastnej hodnoty ireducibilnej matice - Príklad

$$x(r):\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- $i=1$ $\quad \min\left\{\frac{20-14}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-4}{3}\right\} = 5$
- $i=2$ $\quad \min\left\{\frac{19-15}{1}, \frac{19-9}{2}, \frac{19-5}{3}\right\} = 4$
- $i=3$ $\quad \min\left\{\frac{20-16}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-6}{3}\right\} = 4$

$$\lambda(A) = \max_i \{5, 4, 4\} = 5$$

Výpočet vlastnej hodnoty ireducibilnej matice - Príklad

$$x(r): \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- $i = 1$ $\quad \min\left\{\frac{20-14}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-4}{3}\right\} = 5$
- $i = 2$ $\quad \min\left\{\frac{19-15}{1}, \frac{19-9}{2}, \frac{19-5}{3}\right\} = 4$
- $i = 3$ $\quad \min\left\{\frac{20-16}{1}, \frac{20-10}{2}, \frac{20-6}{3}\right\} = 4$

$$\lambda(A) = \max_i \{5, 4, 4\} = 5$$

Výpočtová zložitosť Karpovho algoritmu

Veta

Nech $A \in F(n,n)$ je ireducibilná matica. Potom Karpov algoritmus vypočíta $\lambda(A)$ s výpočtovou zložitosťou $O(n^3)$.

D: Výpočtu dominuje výpočet orbitu.

Definitné matice

Definícia

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Vrchol j, ktorý leží na kritickom cykle v $\mathcal{G}(D)$ nazývame vlastný vrchol.

Definícia

Nech $D \in \mathbb{R}^{\star}(n,n)$. Maticu D nazývame definitnou, ak

1. $\lambda(D) = 0$
2. $\mathcal{G}(D)$ je silne súvislý

Definitné matice - zhrnutie

Veta

Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je definitná s digrafom $\mathcal{G}(D)$. Potom platí

1. $D \in F(n,n)$, $\Delta(D)$ existuje a je konečná (ak $n > 1$) a δ_{ij} pre $i \neq j$ reprezentuje nejakú dráhu maximálnej váhy z vrchola i do vrchola j dĺžky nepresahujúcej $n-1$
2. každý diagonálny prvok δ_{ii} reprezentuje nejaký cyklus maximálnej váhy zo všetkých cyklov obsahujúcich vrchol i dĺžky nepresahujúcej n
3. $\mathcal{G}(D)$ obsahuje aspoň jeden elementárny cyklus váhy 0 a žiaden s kladnou váhou
4. $\mathcal{G}(D)$ obsahuje aspoň jeden vlastný vrchol, pre každý vlastný vrchol j je $\delta_{jj} = 0$, pre každý iný vrchol k je $\delta_{kk} < 0$

Transformácia ireducibilnej matice na definitnú maticu

Lemma

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je ireducibilná. Potom matica D, pre ktorú

$$A = \lambda(A) \otimes D$$

je definitná.

D:

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{R}^\star(n,n) &\implies \lambda(A) \text{ je konečné} \\ &\implies \lambda(D) = 0 \text{ and } \mathcal{G}(D) \text{ ostane silne súvislá} \\ &\implies D \text{ je definitná} \end{aligned}$$

Poznámka: Matica D vznikne z matice A odčítaním konštanty $\lambda(A)$ od každého prvku a_{ij}.

Konečné vlastné vektory

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je definitná. Nech j je vlastný vrchol. Nech d je j-tý stĺpec $\Delta(D)$. Potom d je konečný vlastný vektor matice D (s vlastnou hodnotou $\lambda(D) = 0$).

D: Máme dokázať, že $D \otimes d = d$. Ukážeme, že platia nerovnosti

- $D \otimes d \leq d$
- $D \otimes d \geq d$

Konečné vlastné vektory

$$A \in \mathbb{R}^{\star}(n,n) \quad \wedge \lambda(D) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad D \text{ je } p\text{-regulárna s } \Delta(D)$$

$$\Gamma(D) = E \oplus \underbrace{D \oplus D^2 \oplus \ldots \oplus D^p}_{\Delta(D)}$$

$$\Gamma(D) = E \oplus \Delta(D)$$

$$\Longrightarrow \quad \Gamma(D) \geq \Delta(D)$$

$$\Gamma(D) \geq \Delta(D)$$

$$D \geq D$$

$$\overset{\text{izotónnosť}}{\Longrightarrow} \quad D \otimes \Gamma(D) \geq D \otimes \Delta(D)$$

$$\Delta(D) \geq D \otimes \Delta(D)$$

$$d \text{ je stĺpec } \Delta(D) \quad \Longrightarrow \quad d \geq D \otimes d$$

Konečné vlastné vektory

Ukážeme, že platí aj opačná nerovnosť.

Platí: Nech j je vlastný index. Pre každý riadkový index i existuje index k taký, že

$$\delta_{ij} = d_{ik} + \delta_{kj}$$

$$D \otimes d = \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ d_{i1} & d_{i2} & \cdots & d_{in} \\ & & \vdots & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \forall i & d_{i1} \otimes \delta_{1j} \oplus d_{i2} \otimes \delta_{2j} \oplus \cdots \oplus d_{in} \otimes \delta_{nj} & \geq & d_{ik} \otimes \delta_{kj} = \delta_{ij} \\ \Longrightarrow & d & \leq & D \otimes d \\ & & & \\ \Longrightarrow & d & = & D \otimes d \end{array}$$

Fundamentálne vlastné vektory definitnej matice

Definícia

Nech $D \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je definitná. Stĺpce $\Delta(D)$ zodpovedajúce vlastným vrcholom nazývame fundamentálne vlastné vektory D.

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet vlastných vektorov definitnej matice

Algoritmus pre výpočet vlastných vektorov definitnej matice

1. Vypočítame $\Delta(D)$
   - pomocou Floydovho-Warshallovho algoritmu alebo
   - $\Gamma(D) = (E \oplus D)^{n-1}$ a $\Delta(D) = D \otimes \Gamma(D)$
2. Vlastné vektory sú stĺpce matice $\Delta(D)$, pre ktoré $\delta_{jj} = 0$.

Výpočet vlastných vektorov definitnej matice - Príklad 1

Príklad 1

Pre definitnú maticu D nájdime fundamentálne vlastné vektory.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & -1 \\ 0 & -2 & \varepsilon \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$\Gamma(D) = (E \oplus D)^2$ a $\Delta(D) = D \otimes \Gamma(D)$.

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastnými vektormi sú stĺpce 1 a 3 v $\Delta(D)$, pre ktoré $\delta_{jj} = 0$:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet vlastných vektorov definitnej matice - Príklad 2

Príklad 2

Pre definitnú maticu D nájdime fundamentálne vlastné vektory.

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$\Gamma(D) = (E \oplus D)^2$ and $\Delta(D) = D \otimes \Gamma(D)$.

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastným vektorom je stĺpec 3 v $\Delta(D)$, pre ktorý $\delta_{jj} = 0$:

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet vlastných vektorov definitnej matice - Príklad 3

Príklad 3

Pre definitnú maticu D nájdime fundamentálne vlastné vektory.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & 0 \\ -2 & \varepsilon & -3 \end{pmatrix}$$

Riešenie:
$\Gamma(D) = (E \oplus D)^2$ and $\Delta(D) = D \otimes \Gamma(D)$.

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastnými vektormi sú stĺpce 1, 2 (3) v $\Delta(D)$, pre ktoré $\delta_{jj} = 0$:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \Delta_2$$

Výpočet vlastných vektorov definitnej matice - Príklad 4

Príklad 4

Pre definitnú maticu D nájdime fundamentálne vlastné vektory.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ -1 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$\Gamma(D) = (E \oplus D)^2$ and $\Delta(D) = D \otimes \Gamma(D)$.

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastnými vektormi sú stĺpce 1 a 3 v $\Delta(D)$, pre ktoré $\delta_{jj} = 0$:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie vlastného problému pre ireducibilnú maticu

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ je ireducibilná matica. Potom má vlastný problém pre maticu A konečné riešenie, ktoré sa dá nájsť v čase $O(n^3)$.

Riešenie vlastného problému pre ireducibilnú maticu

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je ireducibilná matica. Potom má vlastný problém pre maticu A konečné riešenie, ktoré sa dá nájsť v čase $O(n^3)$.

D: Ak $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ ireducibilná $\Longrightarrow$ D definitná pre

$$A = \lambda(A) \otimes D$$

- Nájdeme $\lambda(A)$ a vlastné vektory matice D v čase $O(n^3)$.
- Nech d je vlastný vektor D, t. j.

$$D \otimes d = \lambda(D) \otimes d = d$$

Ukážeme, že d je vlastný vektor A

$$\begin{aligned} A \otimes d &= \lambda(A) \otimes D \otimes d = \\ &= \lambda(A) \otimes d \end{aligned}$$

Riešenie vlastného problému pre ireducibilnú maticu - Algoritmus

Algoritmus riešenia vlastného problému pre ireducibilnú maticu:

1. Pre danú ireducibilnú maticu vypočítame pomocou Karpovho algoritmu vlastnú hodnotu $\lambda(A)$.
2. Vytvoríme definitnú maticu $D = \lambda(A)^{-1} \otimes A$.
3. Vypočítame $\Delta(D)$
   - pomocou Floydovho-Warshallovho algoritmu alebo
   - $\Gamma(D) = (E \oplus D)^{n-1}$ a $\Delta(D) = D \otimes \Gamma(D)$
4. Nájdeme fundamentálne vlastné vektory pre maticu D (stĺpce $\Delta(D)$ s $\delta_{jj} = 0$) prislúchajúce vlastnej hodnote $\lambda(D) = 0$.
5. Fundamentálne vlastné vektory matice D sú fundamentálnymi vlastnými vektormi matice A prislúchajúce vlastnej hodnote $\lambda(A)$.

Riešenie vlastného problému pre ireducibilnú maticu - Príklad 1*

Príklad 1*

Pre ireducibilnú maticu A riešme vlastný problém

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ 2 & 0 & \varepsilon \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

Riešenie vlastného problému pre ireducibilnú maticu - Príklad 1*

Príklad 1*

Pre ireducibilnú maticu A riešme vlastný problém

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ 2 & 0 & \varepsilon \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

- Karpov algoritmus

$$x(r): \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda(A) = 2$$

Riešenie vlastného problému pre ireducibilnú maticu - Príklad 1*

- Nájdeme zodpovedajúcu definitnú maticu

$$D = -\lambda(A) \otimes A = -2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ 2 & 0 & \varepsilon \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & -1 \\ 0 & -2 & \varepsilon \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Riešenie vlastného problému pre ireducibilnú maticu - Príklad 1*

- Nájdeme zodpovedajúcu definitnú maticu

$$D = -\lambda(A)\otimes A = -2\otimes\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ 2 & 0 & \varepsilon \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & -1 \\ 0 & -2 & \varepsilon \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

- Vypočítame $\Gamma(D) = (E \oplus D)^2$ a $\Delta(D) = D \otimes \Gamma(D)$

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie vlastného problému pre ireducibilnú maticu - Príklad 1*

- Nájdeme zodpovedajúcu definitnú maticu

$$D = -\lambda(A) \otimes A = -2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 1 \\ 2 & 0 & \varepsilon \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & -1 \\ 0 & -2 & \varepsilon \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

- Vypočítame $\Gamma(D) = (E \oplus D)^2$ a $\Delta(D) = D \otimes \Gamma(D)$

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vlastné vektory D ako aj A sú stĺpce 1 a 3 v $\Delta(D)$, pre ktoré $\delta_{jj} = 0$:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vlastné vektory slabého tranzitívneho uzáveru definitnej matice

Platí: $A \otimes x = \lambda \otimes x \quad \Longrightarrow \quad A^p \otimes x = \lambda^p \otimes x$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad & (A \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^n) \otimes x = \\
= \quad & A \otimes x \oplus A^2 \otimes x \oplus \ldots \oplus A^n \otimes x = \\
= \quad & \lambda \otimes x \oplus \lambda^2 \otimes x \oplus \ldots \oplus \lambda^n \otimes x = \\
= \quad & (\lambda \oplus \lambda^2 \oplus \ldots \oplus \lambda^n) \otimes x
\end{aligned}
$$

Veta

Ak D je definitná a y je jej konečný vlastný vektor, tak

$$\Delta(D) \otimes y = y$$

Ekvivalentné vlastné vektory

Definícia

Dvojicu vlastných vrcholov (vlastných indexov, vlastných vektorov) nazývame ekvivalentnými vlastnými vrcholmi (vlastnými indexmi, vlastnými vektormi), ak existuje spoločný kritický cyklus, ktorý ich obsahuje.

Zápis: $i \approx j$, resp. $\Delta_i \approx \Delta_j$

Ekvivalentné vlastné vektory - Príklad 1*

Príklad 1*

Rozhodnite, či sú vlastné vektory definitnej matice D ekvivalentné

$$D = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & -1 \\ 0 & -2 & \varepsilon \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ekvivalentné vlastné vektory - Príklad 1*

Príklad 1*

Rozhodnite, či sú vlastné vektory definitnej matice D ekvivalentné

$$D = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & -1 \\ 0 & -2 & \varepsilon \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie: $d_{13} + d_{31} = -1 + 1 = 0$

$\Longrightarrow$ existuje kritický cyklus, ktorý obsahuje vrcholy 1 a 3

$$\Longrightarrow \quad \Delta_1 \approx \Delta_3$$

Ekvivalentné vlastné vektory - Príklad 4*

Príklad 4*

Rozhodnite, či sú vlastné vektory definitnej matice D ekvivalentné

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ -1 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ekvivalentné vlastné vektory - Príklad 4*

Príklad 4*

Rozhodnite, či sú vlastné vektory definitnej matice D ekvivalentné

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ -1 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie: $\delta_{13} + \delta_{31} = 0 - 1 = -1$

$\Longrightarrow$ neexistuje kritický cyklus, ktorý obsahuje vrcholy 1 a 3

$$\Delta_1 \not\approx \Delta_3$$

Nutná a postačujúca podmienka ekvivalentnosti vlastných vektorov

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ s $\lambda(A) > \varepsilon$. Nech $D = \lambda(A)^{-1} \otimes A$. Nech i a j sú vlastné indexy a Δ_i a Δ_j sú zodpovedajúce stĺpce $\Delta(D)$. Potom existuje konečné α také, že $\Delta_i = \alpha \otimes \Delta_j$ vtedy a len vtedy, ak $i \approx j$.

D:

$\Longrightarrow$ Nech $\exists\, \alpha$ konečné také, že $\Delta_i = \alpha \otimes \Delta_j$

$\Longrightarrow$ pre riadky i a j platí

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \alpha \otimes \delta_{ij} \\ \delta_{ji} &= \alpha \otimes \delta_{jj} \end{aligned}$$

sčítame $\qquad \delta_{ii} + \alpha + \delta_{jj} = \alpha + \delta_{ij} + \delta_{ji}$

$\delta_{ii} = \delta_{jj} = 0 \qquad \delta_{ij} + \delta_{ji} = 0$

$\Longrightarrow \qquad i \approx j$

Nutná a postačujúca podmienka ekvivalentnosti vlastných vektorov

$\Longleftarrow$ Nech $i \approx j$ a r je ľubovoľný riadkový index

$$\begin{aligned} \delta_{ri} + \delta_{ij} &\leq \delta_{rj} \qquad (1) \\ \delta_{rj} + \delta_{ji} &\leq \delta_{ri} \qquad (2) \end{aligned}$$

uvažujme ostrú nerovnosť v (2)

$$\delta_{rj} + \delta_{ji} < \delta_{ri} \qquad (2')$$

sčítame (1) a (2') $\quad \delta_{ri} + \delta_{ij} + \delta_{rj} + \delta_{ji} < \delta_{rj} + \delta_{ri}$

$\delta_{ij} + \delta_{ji} = 0 \quad \delta_{ri} + \delta_{rj} < \delta_{rj} + \delta_{ri}$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \forall r \quad \delta_{rj} + \delta_{ji} = \delta_{ri}$

$\Longrightarrow \quad$ pre $\alpha = \delta_{ji} \quad \Delta_i = \alpha \otimes \Delta_j$

Nutná a postačujúca podmienka ekvivalentnosti vlastných vektorov - Príklad 1*

Príklad 1*

Pomocou nutnej a postačujúcej podmienky zistime, či sú vlastné vektory matice D ekvivalentné.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & \varepsilon & -1 \\ 0 & -2 & \varepsilon \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\Delta_1 = \delta_{31} \otimes \Delta_3 = 1 \otimes \Delta_3$$

$\Longrightarrow$

$$\Delta_1 \approx \Delta_3$$

Nutná a postačujúca podmienka ekvivalentnosti vlastných vektorov - Príklad 4*

Príklad 4*

Pomocou nutnej a postačujúcej podmienky zistime, či sú vlastné vektory matice D ekvivalentné.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -2 \\ -1 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

$$\nexists\, \alpha : \quad \Delta_1 = \alpha \otimes \Delta_3$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Delta_1 \not\sim \Delta_3$$

Báza vlastného priestoru matice

Definícia

Množinu všetkých vlastných vektorov matice $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ nazývame vlastným priestorom a označujeme $V(A)$. Množinu všetkých vlastných vektorov matice $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ prislúchajúcich vlastnej hodnote λ označujeme $V(A, \lambda)$.

Pre ireducibilnú maticu platí

$$V(A) = V(A, \lambda).$$

Definícia

Bázou $\mathcal{B}$ vlastného priestoru $V(A)$ danej ireducibilnej matice $A \in \mathbb{R}^{\star}(n, n)$ nazývame maximálnu množinu neekvivalentných fundamentálnych vlastných vektorov.

Vlastný priestor matice

Veta

Nech $A \in \mathbb{R}^\star(n,n)$ je ireducibilná matica. Potom pre všetky $x, y \in V(A)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

1. $x \oplus y \in V(A)$
2. $\alpha \otimes x \in V(A)$

$$V(A) = \left\{ \sum_i^{\oplus} \alpha_i \otimes \Delta_i \, ; \; \alpha_i \in \mathbb{R}^\star, \; \Delta_i \in \mathcal{B} \right\} \tag{1}$$

Vlastný priestor matice

D:

1.
$$\begin{aligned} A \otimes (x \oplus y) &= A \otimes x \oplus A \otimes y = \\ &= \lambda \otimes x \oplus \lambda \otimes y = \\ &= \lambda \otimes (x \oplus y) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} A \otimes (\alpha \otimes x) &= \alpha \otimes (A \otimes x) = \\ &= \alpha \otimes (\lambda \otimes x) = \\ &= \lambda \otimes (\alpha \otimes x) \end{aligned}$$

Báza vlastného priestoru - Príklad

Príklad

Nech A je ireducibilná matica prechodu nejakého DDS. Nájdime bázu vlastného priestoru matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ \varepsilon & 4 & 6 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Riešenie:

1. Vypočítame pomocou Karpovho algoritmu $\lambda(A) = 6$.
2. Vytvoríme definitnú maticu $D = -6 \otimes A$.

Báza vlastného priestoru - Príklad

3. Vypočítame slabý tranzitívny uzáver

$$\Delta(D) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & -2 \\ -9 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Na základe núl na hlavnej diagonále určíme fundamentálne vlastné vektory

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Báza vlastného priestoru - Príklad

5. Vyberieme bázu priestoru $V(A)$:

$$\Delta_2 = 3 \otimes \Delta_1 \Longrightarrow \Delta_2 \approx \Delta_1$$

$\Longrightarrow$ Δ_1 a Δ_3, resp. Δ_2 a Δ_3

Teda

$$\begin{aligned} V(A) &= \left\{\alpha_1 \otimes \Delta_1 \oplus \alpha_3 \otimes \Delta_3;\ \alpha_1,\, \alpha_3 \in \mathbb{R}^\star\right\} \\ &= \left\{\alpha_2 \otimes \Delta_2 \oplus \alpha_3 \otimes \Delta_3;\ \alpha_2,\, \alpha_3 \in \mathbb{R}^\star\right\} \end{aligned}$$

Ustálený stav - generovanie vlastného vektora - Príklad

Príklad

Nech A je matica prechodu DDS z predchádzajúceho príkladu. Majme 5-stavový projekt, ktorý štartuje na všetkých strojoch v čase 0.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ \varepsilon & 4 & 6 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Zistime, či sa systém dostane do ustáleného stavu hneď na začiatku (či $x(1)$ je vlastným vektorom matice A)?

Ustálený stav - generovanie vlastného vektora - Príklad

Príklad

Nech A je matica prechodu DDS z predchádzajúceho príkladu. Majme 5-stavový projekt, ktorý štartuje na všetkých strojoch v čase 0.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 3 & \varepsilon \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ \varepsilon & 4 & 6 & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad x(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Zistime, či sa systém dostane do ustáleného stavu hneď na začiatku (či $x(1)$ je vlastným vektorom matice A)?
2. Ak nie, nahraďme $x(1)$ Čebyševovou najlepšou aproximáciou z priestoru $V(A)$ a nájdime zodpovedajúci vektor štartových časov.

Ustálený stav - generovanie vlastného vektora - Príklad

Riešenie:

1.

$$A \otimes x(1) = x(2) = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \otimes x(1) = 6 \otimes x(1) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes x(1) \neq \lambda \otimes x(1)$$

$\Longrightarrow$ $x(1)$ nie je vlastným vektorom matice A

$\Longrightarrow$ systém sa na začiatku nedostane do ustáleného stavu

Ustálený stav - generovanie vlastného vektora - Príklad

2. Nájdeme Čebyševovu najlepšiu aproximáciu vektora $x(1)$ nejakým vlastným vektorom matice A:

$$\alpha_1 \otimes \Delta_1 \oplus \alpha_3 \otimes \Delta_3 = x(1)$$

Ustálený stav - generovanie vlastného vektora - Príklad

2. Nájdeme Čebyševovu najlepšiu aproximáciu vektora $x(1)$ nejakým vlastným vektorom matice A:

$$\alpha_1 \otimes \Delta_1 \oplus \alpha_3 \otimes \Delta_3 = x(1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \\ -5 & 0 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ustálený stav - generovanie vlastného vektora - Príklad

2. Nájdeme Čebyševovu najlepšiu aproximáciu vektora $x(1)$ nejakým vlastným vektorom matice A:

$$\alpha_1 \otimes \Delta_1 \oplus \alpha_3 \otimes \Delta_3 = x(1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \\ -5 & 0 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \otimes' \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ustálený stav - generovanie vlastného vektora - Príklad

$$4 \otimes \Delta_1 \oplus 4 \otimes \Delta_2 = 4 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix} \oplus 4 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = x_v \neq x(1)$$

Ustálený stav - generovanie vlastného vektora - Príklad

$$\xi(x_v,\, x(1)) = \max\{0, 3, 2, 4\} = 4 = \mu^2 \quad \Longrightarrow \quad \mu = 2$$

$$\Longrightarrow \quad x(1)' = 2 \otimes x_v = 2 \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

so štartovými časmi

$$t = x(1)' - x(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ďakujem za pozornosť.