DETERMINANTY A SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Nech je daná štvorcová matica $A = (a_{ij})$ n-tého stupňa. Matici A môžeme priradiť číslo, ktoré nazývame determinant matice A a označujeme ho det A, resp. $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definícia

Nech je daná štvorcová matica $A = (a_{ij})$ n-tého stupňa. Subdeterminant (minor) D_{ij} vzhľadom na prvok a_{ij} matice A je determinant matice, ktorá vznikne vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca matice A.

Definícia

Nech je daná štvorcová matica $A = (a_{ij})$ n-tého stupňa. Matici A môžeme priradiť číslo, ktoré nazývame determinant matice A a označujeme ho det A, resp. $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definícia

Nech je daná štvorcová matica $A = (a_{ij})$ n-tého stupňa. Subdeterminant (minor) D_{ij} vzhľadom na prvok a_{ij} matice A je determinant matice, ktorá vznikne vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca matice A.

- Determinant 2. stupňa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

- Determinant 3. stupňa - Sarrusovo pravidlo
- Determinant n-tého stupňa, $n \geq 4$
  1. rozvoj podľa i-teho riadku

$$|A| = a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \ldots + a_{in}\, A_{in},$$

  2. rozvoj podľa j-teho stĺpca

$$|A| = a_{1j}\, A_{1j} + a_{2j}\, A_{2j} + \ldots + a_{nj}\, A_{nj},$$

kde A_{ij} je algebraický doplnok prvku a_{ij}, pre ktorý platí

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

kde D_{ij} je subdeterminant (minor) vzhľadom na prvok a_{ij} matice A

- Determinant 2. stupňa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

- Determinant 3. stupňa - Sarrusovo pravidlo
- Determinant n-tého stupňa, $n \geq 4$
  1. rozvoj podľa i-teho riadku

$$|A| = a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \ldots + a_{in}\, A_{in},$$

  2. rozvoj podľa j-teho stĺpca

$$|A| = a_{1j}\, A_{1j} + a_{2j}\, A_{2j} + \ldots + a_{nj}\, A_{nj},$$

kde A_{ij} je algebraický doplnok prvku a_{ij}, pre ktorý platí

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

kde D_{ij} je subdeterminant (minor) vzhľadom na prvok a_{ij} matice A

- Determinant 2. stupňa

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

- Determinant 3. stupňa - Sarrusovo pravidlo
- Determinant *n*-tého stupňa, $n \geq 4$
  1. rozvoj podľa *i*-teho riadku

$$|A| = a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \ldots + a_{in}\, A_{in},$$

  2. rozvoj podľa *j*-teho stĺpca

$$|A| = a_{1j}\, A_{1j} + a_{2j}\, A_{2j} + \ldots + a_{nj}\, A_{nj},$$

kde A_{ij} je algebraický doplnok prvku a_{ij}, pre ktorý platí

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

kde D_{ij} je subdeterminant (minor) vzhľadom na prvok a_{ij} matice A

Definícia

Štvorcová matica A sa nazýva regulárna, ak $|A| \neq 0$.
Štvorcová matica A sa nazýva singulárna, ak $|A| = 0$.

- $|A^T| = |A|$
- Ak determinant obsahuje nulový riadok, tak $|A| = 0$.
- Ak v deteminante vymeníme dva riadky (stĺpce) navzájom, tak sa zmení znamienko determinantu.
- Ak v matici A je jeden riadok (stĺpec) lineárnou kombináciou jej ostatných riadkov (stĺpcov), $|A| = 0$.
- Ak pripočítame k niektorému riadku (stĺpcu) determinantu násobok iného riadku (stĺpca), determinant sa nezmení.
- Ak jeden riadok (stĺpec) determinantu vynásobíme nenulovou konštantou k, tak hodnota determinantu sa k-krát zväčší (zmenší).

Definícia

Štvorcová matica A sa nazýva regulárna, ak $|A| \neq 0$.
Štvorcová matica A sa nazýva singulárna, ak $|A| = 0$.

- $|A^T| = |A|$
- Ak determinant obsahuje nulový riadok, tak $|A| = 0$.
- Ak v deteminante vymeníme dva riadky (stĺpce) navzájom, tak sa zmení znamienko determinantu.
- Ak v matici A je jeden riadok (stĺpec) lineárnou kombináciou jej ostatných riadkov (stĺpcov), $|A| = 0$.
- Ak pripočítame k niektorému riadku (stĺpcu) determinantu násobok iného riadku (stĺpca), determinant sa nezmení.
- Ak jeden riadok (stĺpec) determinantu vynásobíme nenulovou konštantou k, tak hodnota determinantu sa k-krát zväčší (zmenší).

Definícia

Štvorcová matica A sa nazýva regulárna, ak $|A| \neq 0$.
Štvorcová matica A sa nazýva singulárna, ak $|A| = 0$.

- $|A^T| = |A|$
- Ak determinant obsahuje nulový riadok, tak $|A| = 0$.
- Ak v deteminante vymeníme dva riadky (stĺpce) navzájom, tak sa zmení znamienko determinantu.
- Ak v matici A je jeden riadok (stĺpec) lineárnou kombináciou jej ostatných riadkov (stĺpcov), $|A| = 0$.
- Ak pripočítame k niektorému riadku (stĺpcu) determinantu násobok iného riadku (stĺpca), determinant sa nezmení.
- Ak jeden riadok (stĺpec) determinantu vynásobíme nenulovou konštantou k, tak hodnota determinantu sa k-krát zväčší (zmenší).

Definícia

Štvorcová matica A sa nazýva regulárna, ak $|A| \neq 0$.
Štvorcová matica A sa nazýva singulárna, ak $|A| = 0$.

- $|A^T| = |A|$
- Ak determinant obsahuje nulový riadok, tak $|A| = 0$.
- Ak v deteminante vymeníme dva riadky (stĺpce) navzájom, tak sa zmení znamienko determinantu.
- Ak v matici A je jeden riadok (stĺpec) lineárnou kombináciou jej ostatných riadkov (stĺpcov), $|A| = 0$.
- Ak pripočítame k niektorému riadku (stĺpcu) determinantu násobok iného riadku (stĺpca), determinant sa nezmení.
- Ak jeden riadok (stĺpec) determinantu vynásobíme nenulovou konštantou k, tak hodnota determinantu sa k-krát zväčší (zmenší).

Definícia

Štvorcová matica A sa nazýva regulárna, ak $|A| \neq 0$.
Štvorcová matica A sa nazýva singulárna, ak $|A| = 0$.

- $|A^T| = |A|$
- Ak determinant obsahuje nulový riadok, tak $|A| = 0$.
- Ak v deteminante vymeníme dva riadky (stĺpce) navzájom, tak sa zmení znamienko determinantu.
- Ak v matici A je jeden riadok (stĺpec) lineárnou kombináciou jej ostatných riadkov (stĺpcov), $|A| = 0$.
- Ak pripočítame k niektorému riadku (stĺpcu) determinantu násobok iného riadku (stĺpca), determinant sa nezmení.
- Ak jeden riadok (stĺpec) determinantu vynásobíme nenulovou konštantou k, tak hodnota determinantu sa k-krát zväčší (zmenší).

Definícia

Štvorcová matica A sa nazýva regulárna, ak $|A| \neq 0$.
Štvorcová matica A sa nazýva singulárna, ak $|A| = 0$.

- $|A^T| = |A|$
- Ak determinant obsahuje nulový riadok, tak $|A| = 0$.
- Ak v deteminante vymeníme dva riadky (stĺpce) navzájom, tak sa zmení znamienko determinantu.
- Ak v matici A je jeden riadok (stĺpec) lineárnou kombináciou jej ostatných riadkov (stĺpcov), $|A| = 0$.
- Ak pripočítame k niektorému riadku (stĺpcu) determinantu násobok iného riadku (stĺpca), determinant sa nezmení.
- Ak jeden riadok (stĺpec) determinantu vynásobíme nenulovou konštantou k, tak hodnota determinantu sa k-krát zväčší (zmenší).

Definícia

Štvorcová matica A sa nazýva regulárna, ak $|A| \neq 0$*.*
Štvorcová matica A sa nazýva singulárna, ak $|A| = 0$*.*

- $|A^T| = |A|$
- Ak determinant obsahuje nulový riadok, tak $|A| = 0$.
- Ak v deteminante vymeníme dva riadky (stĺpce) navzájom, tak sa zmení znamienko determinantu.
- Ak v matici A je jeden riadok (stĺpec) lineárnou kombináciou jej ostatných riadkov (stĺpcov), $|A| = 0$.
- Ak pripočítame k niektorému riadku (stĺpcu) determinantu násobok iného riadku (stĺpca), determinant sa nezmení.
- Ak jeden riadok (stĺpec) determinantu vynásobíme nenulovou konštantou k, tak hodnota determinantu sa k-krát zväčší (zmenší).

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Označme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Potom riešenie danej sústavy je

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = b_1$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 = b_2$$
$$a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 = b_3$$

Označme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Potom riešenie danej sústavy je

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Označme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Potom riešenie danej sústavy je

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Označme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Potom riešenie danej sústavy je

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Označme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Potom riešenie danej sústavy je

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 &= b_1\\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 &= b_2\\
a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

Označme

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}
$$

Potom riešenie danej sústavy je

$$
x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}
$$

Veta

Nech je daná sústava n rovníc o n neznámych. Nech D je determinant matice A a D_i, pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je determinant odvodený z determinantu D tak, že i-ty stĺpec nahradíme pravou stranou. Potom pre každú i-tu zložku riešenia platí

$$x_i = \frac{D_i}{D}.$$