Katedra matematiky a teoretickej informatiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Technická univerzita v Košiciach

KATEDRA MATEMATIKY A TEORETICKEJ INFORMATIKY

MATEMATIKA III

a jej využitie v ekonómii

Anna Grinčová

Košice 2022

RECENZOVALI: prof. RNDr. Jozef Džurina, CSc.
RNDr. Monika Molnárová, PhD.

1. vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedá autor.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN

OBSAH

5 DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE DVOCH PREMENNÝCH

6 APLIKÁCIE FUNKCIE DVOCH PREMENNÝCH

7 DVOJNÝ INTEGRÁL A JEHO APLIKÁCIE

8 NEKONEČNÉ RADY

1 NEURČITÝ INTEGRÁL

1.1 Otázky

- Definujte pojem primitívna funkcia.
- Definujte pojem neurčitý integrál.
- Sformulujte vetu o lineárnosti pri neurčitom integrále.
- Sformulujte vetu o substitučnej metóde pri neurčitom integrále.
- Sformulujte vetu o metóde per partes pri neurčitom integrále.
- Uveďte základné vzorce integrovania.

1.2 Primitívna funkcia

Definícia 1.1 Funkcia F sa nazýva ***primitívna funkcia k funkcii*** f ***na intervale*** J, ak pre všetky $x \in J$ je $F'(x) = f(x)$ (v krajných bodoch intervalu uvažujeme jednostranné derivácie).

Veta 1.1 Nech funkcia F ***je primitívna*** funkcia k funkcii f na intervale J a $C \in R$, potom aj funkcia $G = F + C$ ***je primitívnou*** funkciou k funkcii f na intervale J.

Príklad 1.1 Funkcia $F(x) = \frac{x^2}{2}$ je primitívna k funkcii $f(x) = x$,

lebo $\underline{\underline{F'(x)}} = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = \underline{\underline{f(x)}}$.

Príklad 1.2 Takisto aj funkcia $F(x) = \frac{x^2}{2} - 6$ je primitívna k funkcii $f(x) = x$,

lebo $\underline{\underline{F'(x)}} = \left(\frac{x^2}{2} - 6\right)' = x = \underline{\underline{f(x)}}$.

Poznámka Ak teda k danej funkcii f existuje primitívna funkcia F na intervale J, existuje ich nekonečne veľa.

Definícia 1.2 Množinu $\{F + C; C \in R\}$ všetkých primitívnych funkcií k funkcii f, označujeme symbolom $\int f(x)dx$ nazývame ***neurčitý integrál***. Píšeme $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Poznámka Platí $\int f'(x)dx = f(x) + C$, $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$.

Proces hľadania primitívnej funkcie k danej funkcii nazývame ***integrovaním*** alebo ***integráciou funkcie***, argument x nazývame ***integračnou premennou***, konštantu C nazývame ***integračnou konštantou***.

1.3 Výpočet primitívnej funkcie

Veta 1.2 Nech funkcia f je spojitá na intervale *J*, potom k nej na intervale *J* existuje primitívna funkcia F .

Veta 1.3 (**Veta o lineárnosti**) Nech k funkciám *f* a *g* existujú primitívne funkcie na intervale *J* a aspoň jedna z reálnych konštánt *a*, *b* je rôzna od nuly. Potom existuje primitívna funkcia k funkcii $af + bg$ na intervale *J* a platí

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x))\, dx = a\int f(x)\, dx + b\int g(x)\, dx .$$

Niektoré základné vzorce integrovania (vzorce platia na intervaloch, na ktorých sú funkcie definované)

$\int a\, dx = ax + C$ pre $a \in R$,

$\int x^a\, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$ pre $a \neq -1$,

$\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C,$

$\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ pre $a > 0, a \neq 1$,

$\int e^x\, dx = e^x + C,$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C,$

$\int \dfrac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C ,$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C ,$

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C .$

1.4 Substitučná metóda

Veta 1.4 Nech $\varphi : (a,b) \to (\alpha, \beta)$ má spojitú deriváciu. Nech F je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na (α, β). Potom funkcia $F[\varphi(x)]$ je primitívna k $f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$ na (a,b).

Túto vetu je možné prepísať pomocou integrálov, čo nás privedie k substitučnej metóde.

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = \left| \begin{array}{c} \varphi(x)=t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{array} \right| = \int f(t)dt .$$

Príklad 1.3 Vypočítajme integrál $\int 2x\cdot e^{x^2+3}\,dx$.

Riešenie:

$$\int 2x\cdot e^{x^2+3}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+3=t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right| = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{x^2+3} + C .$$

1.5 Metóda per partes

Veta 1.5 Nech funkcie $u(x), v(x)$ majú spojité derivácie na intervale *J*.

Potom na intervale *J* platí $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

Príklad 1.4 Vypočítajme integrál $\int (3x-5)\cdot e^x\,dx$.

Riešenie:

$$\int (3x-5)\cdot e^x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = 3x-5 & v' = e^x \\ u' = 3 & v = e^x \end{array} \right| = (3x-5)\cdot e^x - 3\int e^x\,dx = (3x-5)\cdot e^x - 3e^x + C .$$

Výsledok platí na intervale $(-\infty,\infty)$.

1.6 Integrovanie racionálnych funkcií

V tejto kapitole ukážeme, ako sa integrujú racionálne funkcie, ktoré majú v menovateli polynómy s výlučne reálnymi a rýdzo imaginárnymi koreňmi.

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, teda integrál z racionálnej funkcie počítame zvyčajne tak, že po predelení polynómu $P(x)$ z čitateľa polynómom $Q(x)$ z menovateľa (v prípade, že funkcia nie je rýdzo racionálna), dostaneme vo výsledku súčet polynómu a rýdzo racionálnej funkcie. Takto získanú rýdzo racionálnu funkciu rozložíme na elementárne zlomky (Matematika I a jej využitie v ekonómii) a nájdeme ich neurčité integrály pomocou nasledujúcich vzťahov.

- $\int \frac{1}{x-\alpha}dx = \ln|x-\alpha| + C$,
- $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + C$ pre $k \neq 1$, $x \neq \alpha$,

resp. v niektorých prípadoch využijeme integračný vzťah

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$.

Príklad 1.5 Vypočítajme integrál $\int \frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1} dx$.

Riešenie:

Funkcia $\frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1}$ je rýdzoracionálna (stupeň polynómu v čitateli je nižší ako stupeň polynómu v menovateli). Polynóm v menovateli je potrebné rozložiť na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad) a celú rýdzoracionálnu funkciu potom rozložiť na elementárne zlomky.

$$\frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Platí

$$\int \frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1} dx = 2\int \frac{1}{(x-1)^2} dx - 2\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx.$$

Pomocou vzťahu $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + C$ je $\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{x-1} + C$,

pomocou vzťahu $\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \ln|x-\alpha| + C$ je $\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$

a $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C$.

Teda $\int \frac{-x^2+5}{x^3-x^2-x+1} dx = -\frac{2}{x-1} - 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C = -\frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x+1}{(x-1)^2}\right| + C$.

Príklad 1.6 Vypočítajme integrál $\int \frac{5x^3-3x^2-x-9}{x^4+2x^2-3} dx$.

Riešenie:

Funkcia $\frac{5x^3-3x^2-x-9}{x^4+2x^2-3}$ je rýdzoracionálna (stupeň polynómu v čitateli je nižší ako stupeň polynómu v menovateli). Polynóm v menovateli je potrebné rozložiť na súčin koreňových činiteľov (kanonický rozklad) a celú rýdzoracionálnu funkciu potom rozložiť na elementárne zlomky.

$$\frac{5x^3-3x^2-x-9}{x^4+2x^2-3} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{4x}{x^2+3}.$$

Pomocou vzťahu $\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \ln|x-\alpha| + C$ je $\int \frac{2}{x+1} dx = 2\ln|x+1| + C$

a $\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$.

Pomocou vzťahu $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ je $\int \frac{4x}{x^2+3} dx = 2\ln|x^2+3| + C$.

Preto $\int \frac{5x^3-3x^2-x-9}{x^4+2x^2-3}\,dx = 2\ln|x+1| - \ln|x-1| + 2\ln|x^2+3| + C = \ln\left|\frac{(x+1)^2(x^2+3)^2}{x-1}\right| + C$.

1.7 Integrovanie iracionálnych funkcií

V tejto kapitole sa budeme venovať integrálom niektorých typov iracionálnych funkcií.

Lineárna iracionalita

Integrál typu $\int R[x, \sqrt[k_1]{Ax+B}, \sqrt[k_2]{Ax+B}, \ldots, \sqrt[k_n]{Ax+B}]\,dx$, kde R je racionálna funkcia a $k_1, k_2, \cdots, k_n$ sú prirodzené čísla, riešime pomocou substitúcie

$$Ax+B=t^k,$$

pričom k je najmenší spoločný násobok čísel $k_1, k_2, \cdots, k_n$. Pomocou tejto substitúcie prevedieme daný integrál na integrál z racionálnej funkcie.

Príklad 1.7 Vypočítajme integrál $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$

Riešenie:

Integrál riešime použitím substitúcie $x=t^6$, čím prevedieme iracionálnu funkciu na racionálnu.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{t^6+t^5}6t^5dt = 6\int \frac{t^2}{t+1}dt = 6\int (t-1+\frac{1}{t+1})dt =$$

$$= 6(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|) + C = 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

Príklad 1.8 Vypočítajme integrál $\int \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt[4]{x-2}}{4x-8}\,dx.$

Riešenie:

Integrál riešime použitím substitúcie $x-2=t^4$, čím prevedieme iracionálnu funkciu na racionálnu.

$$\int \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt[4]{x-2}}{4x-8}\,dx = \left| \begin{array}{l} x-2=t^4 \\ dx=4t^3dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2-t}{4t^4}4t^3dt = \int \frac{t^2-t}{t}\,dt = \int (t+-1)\,dt = \frac{t^2}{2} - t + C =$$

$$\frac{\sqrt{x-2}}{2} - \sqrt[4]{x-2} + C.$$

Kvadratická iracionalita

Integrál typu $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$, kde $A>0$,

riešime úpravou výrazu pod odmocninou na štvorec a následnou substitúciou nájdeme riešenie tohto integrálu pomocou integračného vzorca

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Príklad 1.9 Vypočítajme integrál $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}}\,dx.$

Riešenie:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{4})^2+\frac{23}{16}}} = \left| \begin{array}{c} x-\frac{1}{4}=t \\ dx=dt \end{array} \right| =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{t^2+\frac{23}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{23}{16}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\right| + C.$$

Integrál typu $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx$, $A \neq 0$, počítame pomocou tzv. Ostrogradského metódy (metódy neurčitých koeficientov), pričom vytvoríme nasledujúcu rovnosť, kde $P_n(x)$ je polynóm n-tého stupňa, $Q_{n-1}(x)$ je polynóm stupňa $n-1$ a k je neznáma konštanta

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{Ax^2+Bx+C} + k\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}.$$

Uvedenú rovnosť zderivujeme a následne vynásobíme výrazom $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, čím sa zbavíme integrálov a odmocnín. Metódou porovnávania koeficientov vypočítame koeficienty neznámeho polynómu $Q_{n-1}(x)$ a koeficient k.

Príklad 1.10 Vypočítajme integrál $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^2-4x+1}}\,dx.$

Riešenie:

Daný integrál budeme riešiť pomocou metódy neurčitých koeficientov, t.j.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^2-4x+1}}\,dx = (ax+b)\sqrt{2x^2-4x+1} + k\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}}\,.$$

Derivovaním oboch strán dostávame

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x^2-4x+1}} = a\sqrt{2x^2-4x+1} + \frac{(ax+b)(4x-4)}{2\sqrt{2x^2-4x+1}} + \frac{k}{\sqrt{2x^2-4x+1}}\,.$$

Vynásobením oboch strán výrazom $\sqrt{2x^2-4x+1}$ máme

$$x^2 = a(2x^2-4x+1) + (ax+b)(2x-2) + k$$
$$x^2 = 4ax^2 - 6ax + 2bx + a - 2b + k$$

Porovnaním polynómov na oboch stranách rovnice vypočítame koeficienty

$$a = \frac{1}{4},\ \ b = \frac{3}{4},\ \ k = \frac{5}{4}.$$

Integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}}$ vypočítame úpravou menovateľa na štvorec (Príklad 1.9), potom

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{1}{2}}\right| + C\,.$$

Teda

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^2-4x+1}}\,dx = (\frac{1}{4}x+\frac{3}{4})\sqrt{2x^2-4x+1} + \frac{5}{4\sqrt{2}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{1}{2}}\right| + C\,.$$

1.8 Integrovanie exponenciálnych funkcií

V tejto kapitole ukážeme, ako sa počítajú integrály s exponenciálnymi funkciami.

$\int R(e^x)\,dx$ vypočítame pomocou substitúcie $e^x = t$.

Príklad 1.11 Vypočítajme integrál $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-4}}\,dx$.

Riešenie:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-4}}\,dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-4}\right| + C = \ln\left|e^x+\sqrt{e^{2x}-4}\right| + C\,.$$

Po použití substitúcie sme dostali integrál, ktorý patrí medzi integračné vzorce.

Príklad 1.12 Vypočítajme integrál $\int \frac{1}{e^x+2}\,dx$.

Riešenie:

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, použijeme rovnakú substitúciu, kde je ale výhodné premennú x zo substitúcie najprv vyjadriť a potom derivovať. Po substitúcii dostaneme integrál z rýdzoracionálnej funkcie, kde využijeme rozklad na parciálne zlomky a následné integrovanie.

$$\int \frac{1}{e^x+2}\,dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t(t+2)}\,dt = \left(\frac{\frac{1}{2}}{t} - \frac{\frac{1}{2}}{t+2}\right) dt = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t+2| + C =$$

$$= \ln\sqrt{\left|\frac{e^x}{e^x+2}\right|} + C.$$

1.9 Integrovanie goniometrických funkcií

V tejto kapitole sa budeme venovať niektorým typom integrálov, ktoré obsahujú goniometrické funkcie.

Integrál typu $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ vypočítame pomocou substitúcie $\sin x = t$.

Príklad 1.13 Vypočítajme integrál $\int \frac{(1+\sin x)\cos x}{\sin^6 x}\,dx$.

Riešenie:

$$\int \frac{(1+\sin x)\cos x}{\sin^6 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{(1+t)}{t^6}\,dt = \int (t^{-6}+t^{-5})\,dt = -\frac{1}{5t^5} - \frac{1}{4t^4} + C =$$

$$= -\frac{1}{5\sin^5 x} - \frac{1}{4\sin^4 x} + C.$$

Po substitúcii sme dostali integrál, v ktorom integračnú funkciu stačí pred integrovaním rozložiť a upraviť.

Integrál typu $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ vypočítame pomocou substitúcie $\cos x = t$.

Príklad 1.14 Vypočítajme integrál $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$.

Riešenie:

V tomto príklade je potrebné integračnú funkciu najprv upraviť a po substitúcii potupovať podobne ako v príklade 1.13.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cdot \sin x}{\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t^2-1}{t^2}\,dt =$$

$$= \int (1-t^{-2})\,dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

1.10 Úlohy

V úlohách 1 – 42 vypočítajte neurčité integrály:

		Výsledky:
1.	$\int (x^2 - 8x + 2)\,dx$	$\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 2x + C$
2.	$\int (16x^3 + 9x^2 - 4x - 1)\,dx$	$4x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + C$
3.	$\int (5x^5 + 6x^2 - 7x + 12)\,dx$	$\frac{5}{6}x^6 + 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 12x + C$
4.	$\int (\frac{1}{3}x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{5})\,dx$	$\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{5}x + C$
5.	$\int (\frac{1}{3x^2} - \frac{1}{5x})\,dx$	$-\frac{1}{3x} - \frac{1}{5}\ln\lvert x\rvert + C$
6.	$\int (\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{3x^3})\,dx$	$2\ln\lvert x\rvert + \frac{3}{x} - \frac{1}{3x^2} + C$
7.	$\int (\frac{5}{x^6} - \frac{7}{8x^8})\,dx$	$-\frac{1}{x^5} + \frac{1}{8x^7} + C$
8.	$\int (\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^5})\,dx$	$\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^9} + C$
9.	$\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + C$
10.	$\int (\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} + 3x^2\cdot\sqrt{x})\,dx$	$\frac{1}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{6}{7}\sqrt{x^7} + C$
11.	$\int (\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}})\,dx$	$\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} + C$
12.	$\int (5e^x - \sqrt{3}\cdot x^5 + \frac{3}{1-x^2})\,dx$	$5e^x - \frac{\sqrt{3}}{6}x^6 + \frac{3}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$

13.	$\int (\sqrt[3]{x} + 3^x - 2x^3)\, dx$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{2}x^4 + C$
14.	$\int x^2(2x-3)\, dx$	$\frac{1}{2}x^4 - x^3 + C$
15.	$\int x(x+1)(x-2)\, dx$	$\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$
16.	$\int (x+3)^2\, dx$	$\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + C$
17.	$\int (x-\frac{1}{x})^2\, dx$	$\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x} + C$
18.	$\int (3\sqrt{x} - 2x)^2\, dx$	$\frac{9}{2}x^2 - \frac{24}{5}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}x^3 + C$
19.	$\int \frac{6-x}{x^2}\, dx$	$-\frac{6}{x} - \ln\lvert x\rvert + C$
20.	$\int \frac{x^5 - 7x^3 + 5}{x^3}\, dx$	$\frac{1}{3}x^3 - 7x - \frac{5}{2x^2} + C$
21.	$\int \frac{(x+1)^2}{x^3}\, dx$	$\ln\lvert x\rvert - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$
22.	$\int \frac{x^2 - 2x + 6}{\sqrt{x}}\, dx$	$\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 12\sqrt{x} + C$
23.	$\int \frac{\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x} + x^2 - 2}{x^2}\, dx$	$-\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{\sqrt{x}} + x + \frac{2}{x} + C$
24.	$\int \frac{x(\sqrt[3]{x} - x^3 \cdot \sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}\, dx$	$\frac{12}{25}\sqrt[12]{x^{25}} - \frac{4}{21}\sqrt[4]{x^{21}} + C$
25.	$\int \frac{x^2 - 1}{x+1}\, dx$	$\frac{1}{2}x^2 - x + C$
26.	$\int \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2}\, dx$	$\frac{1}{2}x^2 - 3x + C$
27.	$\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x+1}\, dx$	$\frac{1}{2}x^2 + x + C$

28.	$\int \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x}\,dx$	$\frac{1}{2}x^2-3x+C$
29.	$\int \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$	$\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$
30.	$\int \frac{x^4-4}{x^2-2}\,dx$	$\frac{1}{3}x^3+2x+C$
31.	$\int e^x\cdot 2^x\,dx$	$\frac{e^x\cdot 2^x}{1+\ln 2}+C$
32.	$\int e^x(2-\frac{e^{-x}}{x})\,dx$	$2e^x-\ln\lvert x\rvert+C$
33.	$\int \frac{dx}{4-2x^2}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right\rvert+C$
34.	$\int \frac{5}{8x^2-32}\,dx$	$\frac{5}{32}\ln\left\lvert\frac{2-x}{2+x}\right\rvert+C$
35.	$\int \frac{3}{9-3x^2}\,dx$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right\rvert+C$
36.	$\int \frac{2x}{x^2-3}\,dx$	$\ln\lvert x^2-3\rvert+C$
37.	$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$	$\frac{1}{3}\ln\lvert x^3+1\rvert+C$
38.	$\int \frac{3x^3}{2-x^4}\,dx$	$-\frac{3}{4}\ln\lvert 2-x^4\rvert+C$
39.	$\int \frac{e^x}{3+e^x}\,dx$	$\ln\lvert 3+e^x\rvert+C$
40.	$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$	$\ln\lvert\ln x\rvert+C$
41.	$\int \frac{1}{x(4+\ln x)}\,dx$	$\ln\lvert 4+\ln x\rvert+C$

42. $\int \operatorname{cotg} x \, dx$ $\qquad$ $\ln|\sin x| + C$

43. $\int \operatorname{tg} x \, dx$ $\qquad$ $-\ln|\cos x| + C$

V úlohách 44 – 73 vypočítajte pomocou substitúcií neurčité integrály:

Výsledky:

44. $\int (x+3)^{20} dx$ $\qquad$ $\frac{1}{21}(x+3)^{21} + C$

45. $\int (4x-2)^{13} dx$ $\qquad$ $\frac{1}{56}(4x-2)^{14} + C$

46. $\int (1-x)^{-3} dx$ $\qquad$ $\frac{1}{2(1-x)^2} + C$

47. $\int \frac{2}{(x+17)^5} dx$ $\qquad$ $-\frac{1}{2(x+17)^4} + C$

48. $\int \sqrt{x+7} dx$ $\qquad$ $\frac{2}{3}\sqrt{(x+7)^3}$ +C

49. $\int \sqrt{3x-2} \, dx$ $\qquad$ $\frac{2}{9}\sqrt{(3x-2)^3} + C$

50. $\int \sqrt[3]{(2x+1)^4} \, dx$ $\qquad$ $\frac{3}{14}\sqrt[3]{(2x+1)^7} + C$

51. $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \, dx$ $\qquad$ $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C$

52. $\int 2x(x^2+2)^3 \, dx$ $\qquad$ $\frac{1}{4}(x^2+2)^4 + C$

53. $\int x^2 \cdot (x^3+4)^6 \, dx$ $\qquad$ $\frac{1}{21}(x^3+4)^7 + C$

54. $\int x \cdot \sqrt{x^2+5} \, dx$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C$

55. $\int x \cdot \sqrt[3]{x^2+2} \, dx$ $\qquad$ $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2)^4} + C$

56. $\int x^2 \cdot \sqrt[6]{x^3+2} \, dx$ $\qquad$ $\frac{2}{7}\sqrt[6]{(x^3+2)^7} + C$

57.	$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$	$\sqrt{1+x^2}+C$
58.	$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,dx$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-2)^2}+C$
59.	$\int \frac{x}{\sqrt{4-5x^2}}\,dx$	$-\frac{1}{5}\sqrt{4-5x^2}+C$
60.	$\int e^{4x}\,dx$	$\frac{1}{4}e^{4x}+C$
61.	$\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$	$3e^{\frac{x}{3}}+C$
62.	$\int x e^{1+x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}e^{1+x^2}+C$
63.	$\int 5x^2 e^{x^3-2}\,dx$	$\frac{5}{3}e^{x^3-2}+C$
64.	$\int (x+2)e^{x^2+4x+5}\,dx$	$\frac{1}{2}e^{x^2+4x+5}+C$
65.	$\int \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$	$2e^{1+\sqrt{x}}+C$
66.	$\int \frac{\ln x}{x}\,dx$	$\frac{1}{2}\ln^2 x+C$
67.	$\int \frac{\ln^4 x}{x}\,dx$	$\frac{1}{5}\ln^5 x+C$
68.	$\int \frac{dx}{x(3+\ln x)^2}$	$-\frac{1}{3+\ln x}+C$
69.	$\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\,dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{(2+\ln x)^3}+C$
70.	$\int \frac{\ln x-2}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}-4\sqrt{\ln x}+C$
71.	$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln x}}\,dx$	$-2\sqrt{1-\ln x}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-\ln x)^3}+C$

72. $\int \frac{1}{x} e^{3+\ln x}\, dx$ $\qquad$ $e^{3+\ln x} + C$

73. $\int \frac{\ln x}{x} e^{\ln^2 x - 1}\, dx$ $\qquad$ $\frac{1}{2} e^{\ln^2 x - 1} + C$

V úlohách 74 – 105 vypočítajte pomocou metódy per partes neurčité integrály:

Výsledky:

74. $\int x e^x\, dx$ $\qquad$ $xe^x - e^x + C$

75. $\int (x-2) e^x\, dx$ $\qquad$ $(x-2)e^x - e^x + C$

76. $\int (3x-1) e^x\, dx$ $\qquad$ $(3x-1)e^x - 3e^x + C$

77. $\int (2-5x) e^x\, dx$ $\qquad$ $(2-5x)e^x + 5e^x + C$

78. $\int x e^{2x} dx$ $\qquad$ $\frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$

79. $\int (3x+1) e^{3x}\, dx$ $\qquad$ $\frac{1}{3}(3x+1)e^{3x} - \frac{1}{3} e^{3x} + C$

80. $\int (1-x) e^{-x}\, dx$ $\qquad$ $(x-1)e^{-x} + e^{-x} + C$

81. $\int (2x+3) e^{\frac{x}{4}}\, dx$ $\qquad$ $(8x+12)e^{\frac{x}{4}} - 32 e^{\frac{x}{4}} + C$

82. $\int (x^2+2)\, e^x\, dx$ $\qquad$ $(x^2+2)\, e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

83. $\int (x^2-4x)\, e^x\, dx$ $\qquad$ $(x^2-6x+6)\, e^x + C$

84. $\int x^2\, e^{2x} dx$ $\qquad$ $\frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - x + \frac{1}{2}) + C$

85. $\int (3x-4) \sin x\, dx$ $\qquad$ $(4-3x)\cos x + 3\sin x + C$

86. $\int (5x+2) \cos x\, dx$ $\qquad$ $(5x+2)\sin x + 5\cos x + C$

87. $\int (x+5) \sin 2x\, dx$ $\qquad$ $-\frac{1}{2}(x+5)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

88.	$\int (4x-8)\sin 2x\,dx$	$(4-2x)\cos 2x+\sin 2x+C$
89.	$\int (x-3)\cos 4x\,dx$	$\frac{1}{4}(x-3)\sin 4x+\frac{1}{16}\cos 4x+C$
90.	$\int (2x+3)\cos 3x\,dx$	$\frac{1}{3}(2x+3)\sin 3x+\frac{2}{9}\cos 3x+C$
91.	$\int (3-x)\sin\frac{x}{2}\,dx$	$(2x-6)\cos\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}+C$
92.	$\int (2-2x)\cos\frac{x}{4}\,dx$	$(8-8x)\sin\frac{x}{4}-32\cos\frac{x}{4}+C$
93.	$\int (x^2+1)\sin x\,dx$	$-(x^2+1)\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$
94.	$\int (x^2+2x)\cos x\,dx$	$(x^2+2x)\sin x+(2x+2)\cos x-$ $-2\sin x+C$
95.	$\int x^2\sin 2x\,dx$	$-\frac{x^2}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$
96.	$\int (x^2-x+1)\cos 3x\,dx$	$\frac{1}{3}(x^2-x+1)\sin 3x+$ $+\frac{1}{9}(2x-1)\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+C$
97.	$\int \ln x\,dx$	$x\ln x-x+C$
98.	$\int x\ln x\,dx$	$\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$
99.	$\int x^2\ln x\,dx$	$\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$
100.	$\int x\ln^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}x^2(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2})+C$
101.	$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$	$\ln x\cdot\ln(\ln x)-\ln x+C$
102.	$\int x\ln(x^2+3)\,dx$	$\frac{1}{2}(x^2+3)\left[\ln(x^2+3)-1\right]+C$
103.	$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$	$-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$

104. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$ $\quad -\frac{1}{x}\ln^2 x-\frac{2}{x}\ln x-\frac{2}{x}+C$

105. $\int (x^2+\frac{2}{3}x)\ln(x+1)\,dx$ $\quad \frac{1}{3}(x^3+x^2)\ln(x+1)-\frac{1}{9}x^3+C$

V úlohách 106 – 126 vypočítajte neurčité integrály z racionálnej funkcie:

Výsledky:

106. $\int \frac{5-x}{x^2-1}\,dx$ $\quad \ln\frac{(x-1)^2}{|x+1|^3}+C$

107. $\int \frac{4x+2}{x^2-2x-8}\,dx$ $\quad \ln\left|(x+2)(x-4)^3\right|+C$

108. $\int \frac{7x+7}{x^2+x-12}\,dx$ $\quad \ln\left|(x-3)^4(x+4)^3\right|+C$

109. $\int \frac{-x-1}{x^2-7x+10}\,dx$ $\quad \ln\frac{|x-2|}{(x-5)^2}+C$

110. $\int \frac{2x+13}{x^2+9x+20}\,dx$ $\quad \ln\left|\frac{(x+4)^5}{(x+5)^3}\right|+C$

111. $\int \frac{4x^2+8x-8}{x^3-4x}\,dx$ $\quad \ln\left|\frac{x^2(x-2)^3}{x+2}\right|+C$

112. $\int \frac{6x^2-22x+18}{(x-1)(x^2-5x+6)}\,dx$ $\quad \ln\left|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\right|+C$

113. $\int \frac{2x^2+3x+3}{(x+2)(x^2-9)}\,dx$ $\quad \ln\left|\frac{(x-3)(x+3)^2}{x+2}\right|+C$

114. $\int \frac{-2x+12}{(x-2)(x^2-4)}\,dx$ $\quad \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|-\frac{2}{x-2}+C$

115. $\int \frac{-2x^2+3x-9}{x^3-3x^2}\,dx$ $\quad -\frac{3}{x}-2\ln|x-3|+C$

116. $\int \frac{x^2+4x-2}{x^3-x^2}\,dx$ $\quad \ln\left|\frac{(x-1)^3}{x^2}\right|-\frac{2}{x}+C$

117. $\displaystyle\int \frac{4x^2+6x+4}{x^3+2x^2+x}\,dx$ $\qquad 4\ln|x|+\frac{2}{x+1}+C$

118. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx$ $\qquad \ln\left|\frac{x^2+1}{x}\right|+C$

119. $\displaystyle\int \frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)}\,dx$ $\qquad \ln\left|(x-1)(x^2+2)^2\right|+C$

120. $\displaystyle\int \frac{3x^2+6}{x^3+3x}\,dx$ $\qquad \ln\left|x^2\sqrt{x^2+3}\right|+C$

121. $\displaystyle\int \frac{2x^3-x^2-3x+6}{x^2-1}\,dx$ $\qquad x^2-x+\ln\left|\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}\right|+C$

122. $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2-3x-17}{x^2+x-12}\,dx$ $\qquad \frac{x^2}{2}+2x+\ln\left|(x-3)^4(x+4)^3\right|+C$

123. $\displaystyle\int \frac{x^2+11x+33}{x^2+9x+20}\,dx$ $\qquad x+\ln\left|\frac{(x+4)^5}{(x+5)^3}\right|+C$

124. $\displaystyle\int \frac{x^4+8x-8}{x^3-4x}\,dx$ $\qquad \frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^3}{(x+2)}\right|+C$

125. $\displaystyle\int \frac{-x^3+12x+21}{(x+2)(x^2-9)}\,dx$ $\qquad -x+\ln\left|\frac{(x-3)(x+3)^2}{x+2}\right|+C$

126. $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^3+4x^2+3x-9}{x^3-3x^2}\,dx$ $\qquad \frac{x^2}{2}-2x-\frac{3}{x}-2\ln|x-3|+C$

V úlohách 127 – 140 vypočítajte neurčité integrály s lineárnou iracionalitou:

Výsledky:

127. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ $\qquad \frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$

128. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ $\qquad \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}-3\sqrt[3]{(x+1)^2}+C$

129. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt[3]{3x-2}}\,dx$ $\qquad \frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x-2)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(3x-2)^2}+C$

130. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$ $\qquad 2\sqrt{x+1} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\right| + C$

131. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$ $\qquad 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right| + C$

132. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$ $\qquad 6\ln\left|\sqrt[6]{x}\right| - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C$

133. $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{3-\sqrt{2x-1}}\,dx$ $\qquad \frac{1}{2}(1-2x) - 3\sqrt{2x-1} -$
$- 9\ln\left|\sqrt{2x-1}-3\right| + C$

134. $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,dx$ $\qquad \frac{1}{3}(3x+4) - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+4)^2} + \sqrt[3]{3x+4} -$
$- \ln\left|\sqrt[3]{3x+4}+1\right| + C$

135. $\int \frac{4x+5\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}\,dx$ $\qquad 3\sqrt[3]{(x+2)^4} + 6\sqrt[6]{(x+2)^5} -$
$- 24\sqrt[3]{x+2} + C$

136. $\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$

137. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\,dx$ $\qquad 4\ln\left|\sqrt{x}+1\right| - 2\sqrt{x} + C$

138. $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\qquad \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right| + C$

139. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$ $\qquad 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C$

140. $\int \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$ $\qquad \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + C$

V úlohách 141 – 155 vypočítajte neurčité integrály s kvadratickou iracionalitou:

Výsledky:

141. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$ $\qquad \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C$

142. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}\,dx$ $\qquad \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right| + C$

143. $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-8x+12}}dx$ $\qquad \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$

144. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+10x-5}}dx$ $\qquad \ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x-5}\right|+C$

145. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+3}}dx$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}\right|+C$

146. $\int \frac{x+7}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$ $\qquad \sqrt{x^2+4x+5}+$
$+5\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$

147. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$ $\qquad 3\sqrt{x^2-2x+4}+$
$+\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right|+C$

148. $\int \frac{3-x}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$ $\qquad -\sqrt{x^2-2x+3}+$
$+2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$

149. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+10x-5}}dx$ $\qquad 2\sqrt{x^2+10x-5}-$
$-5\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x-5}\right|+C$

150. $\int \frac{4x^2-x}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$ $\qquad (2x-13)\sqrt{x^2+4x+5}+$
$+16\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C$

151. $\int \frac{2x^2-3x+5}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$ $\qquad x\sqrt{x^2-2x+4}+$
$+\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}\right|+C$

152. $\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$ $\qquad (\frac{1}{2}x+\frac{7}{2})\sqrt{x^2-2x+3}+$
$+3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$

153. $\int \frac{-2x^2-20x+30}{\sqrt{x^2+10x-5}}dx$ $\qquad (-x-5)\sqrt{x^2+10x-5}+$
$+50\ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x-5}\right|+C$

154. $\int \frac{x^3+2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ $\quad (\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3})\sqrt{x^2+1}+ + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$

155. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$ $\quad (\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})\sqrt{x^2-2x-1}- -\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C$

V úlohách 156 – 195 vypočítajte neurčité integrály:

Výsledky:

156. $\int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx$ $\quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+e^x}{1-e^x}\right|+C$

157. $\int \frac{2e^x}{e^{2x}-9}\,dx$ $\quad \frac{1}{3}\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right|+C$

158. $\int e^x\,\frac{5-e^x}{e^{2x}-1}\,dx$ $\quad \ln\left|\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^3}\right|+C$

159. $\int \frac{2e^{2x}+13e^x}{e^{2x}+9e^x+20}\,dx$ $\quad \ln\left|\frac{(e^x+4)^5}{(e^x+5)^3}\right|+C$

160. $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx$ $\quad \frac{1}{2}e^{2x}-e^x+\ln\left|e^x+1\right|+C$

161. $\int \frac{e^{4x}-e^{2x}}{e^{2x}-16}\,dx$ $\quad \frac{1}{2}e^{2x}+\frac{15}{2}\ln\left|e^{2x}-16\right|+C$

162. $\int \frac{4}{e^x+2}\,dx$ $\quad 2x-2\ln\left|e^x+2\right|+C$

163. $\int \frac{1}{e^x-7}\,dx$ $\quad -\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}\ln\left|e^x-7\right|+C$

164. $\int \frac{1}{(e^x-3)(e^x-2)}\,dx$ $\quad \frac{1}{6}x+\ln\left|\frac{\sqrt[3]{e^x-3}}{\sqrt{e^x-2}}\right|+C$

165. $\int \frac{1}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$ $\quad x-\ln\left|e^x+1\right|+\frac{1}{e^x+1}+C$

166. $\int (3-2\sin x+3\sin^2 x)\cos x\,dx$ $\quad 3\sin x-\sin^2 x+\sin^3 x+C$

167. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - 4}}\, dx$ $\qquad \ln\left|\sin x + \sqrt{\sin^2 x - 4}\right| + C$

168. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 3}}\, dx$ $\qquad -\ln\left|\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 3}\right| + C$

169. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - 6}\, dx$ $\qquad \ln\left|\sin^2 x - 6\right| + C$

170. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx$ $\qquad \sin x - \cos x + C$

171. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\, dx$ $\qquad -\operatorname{cotg} x - 2x + C$

172. $\int \frac{\sin x - 5}{\sin^2 x} \cos x\, dx$ $\qquad \ln\left|\sin x\right| + \frac{5}{\sin x} + C$

173. $\int \cos x \sqrt{2 + \sin x}\, dx$ $\qquad \frac{2}{3}\sqrt{(2 + \sin x)^3} + C$

174. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 8\sin x + 6}\, dx$ $\qquad -\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{\sqrt{10} + 4 + \sin x}{\sqrt{10} - 4 - \sin x}\right| + C$

175. $\int (2 - \cos x)^4 \sin x\, dx$ $\qquad \frac{(2 - \cos x)^5}{5} + C$

176. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4\cos x + 3}\, dx$ $\qquad \frac{1}{2} \ln\left|\frac{-1 + \cos x}{3 - \cos x}\right| + C$

177. $\int \frac{\sin 2x}{1 - \sin^2 x}\, dx$ $\qquad -\ln\left|1 - \sin^2 x\right| + C$

178. $\int \frac{\cos x \sin 2x}{6 - 2\cos x}\, dx$ $\qquad \frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 9\ln\left|\cos x - 3\right| + C$

179. $\int \frac{9 - \cos^2 x}{3 + \cos x} \sin 2x dx$ $\qquad \frac{2}{3}\cos^3 x - 3\cos^2 x + C$

180. $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x}\, dx$ $\qquad \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x + C$

181. $\int \cos^3 x\, dx$ $\qquad \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

182. $\int \cos^5 x \, dx$ $\quad$ $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$

183. $\int \operatorname{cotg} x \cdot \ln \sin x \, dx$ $\quad$ $\frac{\ln^2 \sin x}{2} + C$

184. $\int \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x \, dx$ $\quad$ $-\frac{\ln^2 \cos x}{2} + C$

185. $\int \frac{5 - \sin x}{\sin^2 x - 1} \cos x \, dx$ $\quad$ $\ln\left|\frac{(\sin x - 1)^2}{(\sin x + 1)^3}\right| + C$

186. $\int \frac{2\cos x}{\sin^2 x - 9} \, dx$ $\quad$ $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sin x - 3}{\sin x + 3}\right| + C$

187. $\int \frac{2\sin x}{\cos^2 x - 9} \, dx$ $\quad$ $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos x - 3}{\cos x + 3}\right| + C$

188. $\int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} \, dx$ $\quad$ $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right| + C$

189. $\int \frac{2 + 4\sin x}{\sin^2 x - 2\sin x - 8} \cos x \, dx$ $\quad$ $\ln\left|(\sin x + 2)(\sin x - 4)^3\right| + C$

190. $\int \frac{-\cos x - 1}{\cos^2 x - 7\cos x + 10} \sin x \, dx$ $\quad$ $\ln\left|\frac{(\cos x - 5)^2}{\cos x - 2}\right| + C$

191. $\int \frac{2\cos x + 13}{\cos^2 x + 9\cos x + 20} \sin x \, dx$ $\quad$ $\ln\left|\frac{(\cos x + 5)^3}{(\cos x + 4)^5}\right| + C$

192. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2\sin x + 1}} \cos x \, dx$ $\quad$ $\frac{1}{6}\sqrt{(2\sin x + 1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{2\sin x + 1} + C$

193. $\int \frac{3\sin x + 1}{\sqrt[3]{3\sin x - 2}} \cos x \, dx$ $\quad$ $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3\sin x - 2)^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(3\sin x - 2)^2} + C$

194. $\int \frac{\sqrt{\cos x + 1}}{\cos x} \sin x \, dx$ $\quad$ $-2\sqrt{\cos x + 1} + \ln\left|\frac{1 + \sqrt{\cos x + 1}}{1 - \sqrt{\cos x + 1}}\right| + C$

195. $\int \frac{1}{\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{\cos x}} \sin x \, dx$ $\quad$ $-2\sqrt{\cos x} + 4\sqrt[4]{\cos x} - 4\ln\left|\sqrt[4]{\cos x} + 1\right| + C$

2 URČITÝ INTEGRÁL

2.1 Otázky

- Definujte pojem integrálny súčet.
- Definujte pojem určitý integrál.
- Definujte pojem stredná hodnota funkcie na uzavretom intervale.
- Sformulujte vetu *Newton-Leibnizov vzorec*.
- Sformulujte vetu o substitučnej metóde pri určitom integrále.
- Sformulujte vetu o metóde per partes pri určitom integrále.
- Napíšte vlastnosti určitého integrálu.
- Integrál z funkcie na neohraničenom intervale.

2.2 Definícia určitého integrálu

Majme spojitú a nezápornú funkciu *f*: $\langle a,b\rangle \to R$. Rozdelíme interval $\langle a,b\rangle$ na podintervaly $\langle x_0,x_1\rangle,\langle x_1,x_2\rangle,\ldots\langle x_{n-1},x_n\rangle$, kde $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

Každý takýto systém podintervalov nazveme ***delenie intervalu*** $\langle a,b\rangle$, body x_i, $i=1,2,\ldots,n$ nazývame ***deliace body*** delenia intervalu $\langle a,b\rangle$. Dĺžku i-tého čiastočného intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle$, $i=1,2,\ldots,n$ označujeme $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

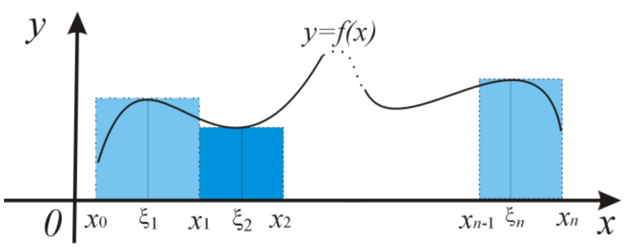
Ak pre každé prirodzené číslo n je dané jedno delenie D_n intervalu $\langle a,b\rangle$, hovoríme o ***postupnosti delení*** intervalu $\langle a,b\rangle$.

Číslo $\|D\|=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n\}$ nazývame ***normou delenia*** *D*.

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $\langle a,b\rangle$ sa nazýva ***normálna***, ak platí $\lim\limits_{n\to\infty}\|D_n\|=0$.

Nech ξ_i, $i=1,2,\ldots,n$ je ľubovoľný bod z intervalu $\langle x_{i-1},x_i\rangle$. ***Integrálnym súčtom*** funkcie *f* pre delenie *D* intervalu $\langle a,b\rangle$ a pre danú voľbu čísel $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ nazývame číslo

$$S(f,D)=f(\zeta_1)\Delta x_1+f(\zeta_2)\Delta x_2+\ldots+f(\zeta_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta x_i\,.$$



Definícia 2.1 ***Určitým integrálom*** funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$ nazývame číslo $S=\lim\limits_{n\to\infty} S(f,D_n)$ a označujeme ho znakom $\int\limits_a^b f(x)dx$. (Ak uvedená limita nezáleží od zvoleného delenia a voľby čísel ζ_i). Zároveň hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$.

Číslo a nazývame ***dolná hranica***, číslo b nazývame ***horná hranica*** určitého integrálu.

Veta 2.1 **(Newtonov-Leibnizov vzorec)** Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech má na intervale $\langle a,b\rangle$ primitívnu funkciu F. Potom platí

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a).$$

Príklad 2.1 Vypočítajme integrál $\int\limits_1^2 (4x^3+2x)\,dx$.

Riešenie:

Integrál vypočítame využitím Newton-Leibnizovho vzorca

$$\int\limits_1^2 (4x^3+2x)\,dx=\left[x^4+x^2\right]_1^2=(2^4+2^2)-(1^4+1^2)=18.$$

2.3 Vlastnosti určitého integrálu

Určitý integrál $\int\limits_a^b f(x)dx$ sme definovali pre $a<b$.

- Ak je funkcia integrovateľná na $\langle a,b\rangle$, platí:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=-\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx=0.$$

- Ak aspoň jedno z čísel k_1, k_2 je nenulové, platí:

$$\int\limits_a^b (k_1 f(x)+k_2 g(x))\,dx=k_1\int\limits_a^b f(x)\,dx+k_2\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

- Nech $c \in (a,b)$, potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

- Nech $f(x)$ je spojitá párna funkcia na intervale $\langle -a, a\rangle$. Potom

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\ .$$

- Nech $f(x)$ je spojitá nepárna funkcia na intervale $\langle -a, a\rangle$. Potom

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\ .$$

2.4 Substitučná metóda

Veta 2.2 Nech $\varphi : \langle a,b\rangle \to \langle \alpha,\beta\rangle$ má spojitú deriváciu. Nech F je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na $\langle \alpha,\beta\rangle$. Potom funkcia $F[\varphi(x)]$ je primitívna k $f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ na $\langle a,b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt.$$

Príklad 2.2 Vypočítajme integrál $\int_1^e \frac{3+\ln x}{x}\,dx.$

Riešenie:

$$\int_1^e \frac{3+\ln x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} 3+\ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \\ a = 1 \to \alpha = 3+\ln 1 = 3 \\ b = e \to \beta = 3+\ln e = 4 \end{array} \right| = \int_3^4 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_3^4 = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}\ .$$

2.5 Metóda per partes

Veta 2.3 Nech funkcie $u(x), v(x)$ majú spojité derivácie na intervale $\langle a,b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx.$$

Príklad 2.3 Vypočítajme integrál $\int_0^1 (x+1)\, e^{2x} dx.$

Riešenie:

$$\int_0^1 (x+1)\, e^{2x}\, dx = \begin{vmatrix} u = x+1 & v' = e^{2x} \\ u' = 1 & v = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{vmatrix} = \left[(x+1)\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\, dx =$$

$$= \left[(x+1)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{4}.$$

2.6 Stredná hodnota spojitej funkcie na uzavretom intervale

Majme spojitú funkciu $f(x)$ na intervale $\langle a,b\rangle$. Rozdeľme interval $\langle a,b\rangle$ na n rovnakých intervalov dĺžky $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$.

Číslo $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ nazývame ***aritmetickým priemerom*** hodnôt $f(x_1),\ldots, f(x_n)$.

Aritmetický priemer počítame z konečného počtu hodnôt. V prípade, že sa jedná o spojitú funkciu s nekonečným počtom funkčných hodnôt, počítame tzv. strednú hodnotu funkcie pomocou určitého integrálu.

Definícia 2.2 ***Stredná hodnota SH*** spojitej ***funkcie*** $f(x)$ na intervale $\langle a,b\rangle$ je číslo

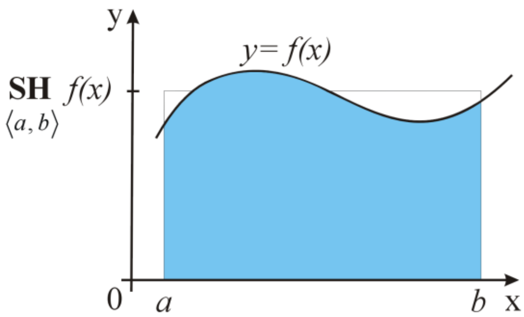
$$\underset{\langle a,b\rangle}{\mathbf{SH}}\, f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot \Delta x_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx.$$

Z posledného vzťahu vyplýva

$$(b-a)\cdot \underset{\langle a,b\rangle}{\mathbf{SH}}\, f(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

Ak je funkcia $f(x)$ na intervale $\langle a,b\rangle$ nezáporná, potom pravá strana predchádzajúcej rovnosti vyjadruje obsah časti roviny ohraničenej funkciou $f(x)$, osou o_x a priamkami $x=a$ a $x=b$.

Ľavá strana vyjadruje obsah obdĺžnika, ktorého jedna strana má dĺžku rovnú strednej hodnote funkcie a druhá strana má dĺžku $b-a$.



Príklad 2.4 Vypočítajme strednú hodnotu funkcie $f(x)=x^3-x+1$ na intervale $\langle -1,2\rangle$.

Riešenie:

$$\underset{\langle a,b\rangle}{\mathbf{SH}}\, f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\underset{\langle -1,2\rangle}{\mathbf{SH}}\, f(x)=\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(x^3-x+1)dx=\frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{2}=\frac{21}{12}.$$

2.7 Integrál z funkcie na neohraničenom intervale

Určitý integrál sme definovali z ohraničenej funkcie f na uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$.

1. Ak je interval neohraničený, t.j. $a=-\infty$ alebo $b=\infty$ alebo
2. funkcia f nie je ohraničená, tak definícia integrálu pomocou integrálnych súčtov nie je možná.

Pre ďalšie potreby sa budeme venovať len 1. typu integrálov.

Definícia 2.3 Nech funkcia f je integrovateľná na každom konečnom intervale $\langle a,b\rangle$. Potom, ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, hovoríme, že ***integrál*** $\int_a^\infty f(x)dx$ ***existuje (konverguje).***

Ak limita $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ neexistuje alebo je nevlastná, hovoríme, že ***integrál*** $\int_a^\infty f(x)dx$ ***neexistuje (diverguje).***

Definícia 2.4 Nech funkcia f je integrovateľná na každom konečnom intervale $\langle a,b\rangle$. Potom, ak existuje vlastná limita $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$, hovoríme, že ***integrál*** $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ***existuje (konverguje).***

Ak limita $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ neexistuje alebo je nevlastná, hovoríme, že ***integrál*** $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ ***neexistuje (diverguje).***

Definícia 2.5 Nech $-\infty < a < \infty$. Ak konvergujú obidva integrály $\int\limits_a^\infty f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx$, hovoríme, že konverguje integrál $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ a jeho hodnota je $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^a f(x)dx + \int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Príklad 2.5 Vypočítajme integrál $\int\limits_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}dx$, ak existuje.

Riešenie:

Počítame nevlastný integrál

$$\int\limits_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln|x| - \frac{1}{3x^3}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln(b - \frac{1}{3b^3}) + \frac{1}{3} = \infty$$

Keďže limita je nevlastná, daný integrál neexistuje (diverguje).

2.8 Úlohy

V úlohách 1 – 17 vypočítajte určité integrály:

		Výsledky:
1.	$\int\limits_0^1 (x^2+x+1)\, dx$	$\frac{11}{6}$
2.	$\int\limits_1^4 (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx$	$\frac{8}{3}$
3.	$\int\limits_{-1}^1 \frac{x^2-5x+6}{x-2}\, dx$	-6
4.	$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{3+e^x}\, dx$	$\ln\frac{3+e}{4}$
5.	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\sin x + 3\sin^2 x)\cos x\, dx$	3
6.	$\int\limits_2^3 (1-x)^{-3}\, dx$	$-\frac{3}{8}$

7.	$\int_0^1 2x(x^2+2)^3\,dx$	$\frac{65}{4}$
8.	$\int_0^1 x e^{1+x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}(e^2-e)$
9.	$\int_1^e \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}\,dx$	$\frac{2}{3}(\sqrt{27}-\sqrt{8})$
10.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-\cos x)^4 \sin x\,dx$	$\frac{31}{5}$
11.	$\int_1^2 (3x-1)e^x\,dx$	$2e^2+e$
12.	$\int_2^e x\ln x\,dx$	$\frac{1}{4}e^2-\ln 4+1$
13.	$\int_5^6 \frac{4x+2}{x^2-2x-8}\,dx$	$\ln\frac{64}{7}$
14.	$\int_0^7 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$	$\frac{48}{5}$
15.	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$	$\ln\frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}$
16.	$\int_1^2 \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx$	$\frac{1}{2}\ln\frac{1+e^2}{(1+e)^2}$
17.	$\int_0^1 \frac{4}{2+e^x}\,dx$	$2-2\ln\frac{2+e}{3}$

V úlohách 18 – 23 vypočítajte strednú hodnotu funkcie na danom intervale:

		Výsledky:
18.	$f(x)=x;\quad x\in\langle 0,4\rangle$	2
19.	$f(x)=2x-x^2;\quad x\in\langle 0,2\rangle$	$\frac{2}{3}$
20.	$f(x)=\frac{1}{x};\quad x\in\langle 1,2\rangle$	$\ln 2$
21.	$f(x)=(x+1)e^{3x};\quad x\in\langle 0,4\rangle$	$\frac{1}{18}(7e^{12}-1)$
22.	$f(x)=x\ln x;\quad x\in\langle 1,4\rangle$	$\frac{16}{3}\ln 2-\frac{5}{4}$

23. $f(x) = \cos^3 x; \quad x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ $\qquad \frac{4}{3\pi}$

24. Podľa záznamov bola t hodín po polnoci teplota vzduchu $T(t) = -0{,}3t^2 + 4t + 10$ stupňov Celzia. Aká bola priemerná teplota vzduchu medzi 9:00 a 12:00 hod.?

18,7 ^{0}C

25. Návštevnosť x dní po otvorení cukrárne bola $N(x) = x \sin x + 50$ návštevníkov. Aká bola priemerná denná návštevnosť medzi 10-tym a 20-tym dňom?

cca 49 návštevníkov

26. Po t mesiacoch vyrába robotník tempom $V(t) = 700 - 400e^{-0{,}5t}$ výrobkov za hodinu. Akou priemernou rýchlosťou pracoval robotník počas prvých troch mesiacov v práci?

cca 493 výrobkov

27. Podľa záznamov, t mesiacov po začiatku roka bola cena určitého tovaru v obchode $P(t) = 0{,}06t^2 - 0{,}2t + 1{,}2$ eur za kus. Aká bola priemerná cena tohto tovaru za obdobie prvých šesť mesiacov roka?

1,32 €

28. Podľa záznamov dispečera bola od začiatku do konca mája v dopravnom podniku denná spotreba nafty $S(t) = 0{,}8t^3 - 0{,}5t^2 + 8t + 6$ litrov. Aká bola priemerná denná spotreba za mesiac máj?

cca 5 928 litrov

29. Denný predaj tovaru x dní po začiatku reklamnej kampane je odhadovaný na $Q(x) = 100xe^{-x^2} + 100$ kusov. Vypočítajte priemerný denný predaj počas prvých 10 dní reklamnej kampane.

105 ks

30. Po t mesiacoch od nástupu do práce vie poštový úradník triediť poštu tempom $Q(t) = 300 - 120e^{-0{,}3t}$ listov za hodinu. Akou priemernou rýchlosťou triedil úradník poštu počas prvých dvoch mesiacov v práci?

cca 210 listov

31. Počas t hodín od začiatku merania je v automobile zaznamenávaná rýchlosť $v(t) = -0{,}32t^2 + 3{,}2t + 40$ kilometrov za hodinu. Akou priemernou rýchlosťou sa pohyboval automobil počas 10 hodín od začiatku merania?

cca 45,33 km/hod

V úlohách 32 – 48 vypočítajte nevlastný integrál:

Výsledky:

32. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ $\qquad \frac{1}{2}$

33.	$\int_2^{\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^2 dx$	$\frac{37}{6}$
34.	$\int_2^{\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right) dx$	∞
35.	$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\, dx$	∞
36.	$\int_1^{\infty}\frac{x^3+1}{x^4}\, dx$	∞
37.	$\int_3^{\infty}\frac{1}{(x-2)}\, dx$	∞
38.	$\int_3^{\infty}\frac{1}{(x-2)^2}\, dx$	1
39.	$\int_0^{\infty}e^{-3x}\, dx$	$\frac{1}{3}$
40.	$\int_1^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$	$e-1$
41.	$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x}\, dx$	∞
42.	$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}\, dx$	∞
43.	$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\, dx$	$\frac{1}{\ln 2}$
44.	$\int_5^{\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}\, dx$	$\frac{1}{2\ln^2 5}$
45.	$\int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+1}\, dx$	∞
46.	$\int_1^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$	∞
47.	$\int_1^{\infty}\frac{x}{e^x}\, dx$	$2e^{-1}$
48.	$\int_0^{\infty}x\,e^{-x^2}\, dx$	$\frac{1}{2}$

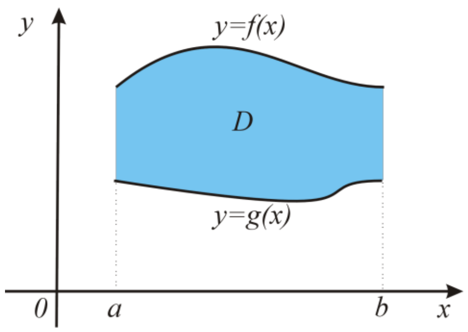
3 APLIKÁCIE URČITÉHO INTEGRÁLU

3.1 Otázky

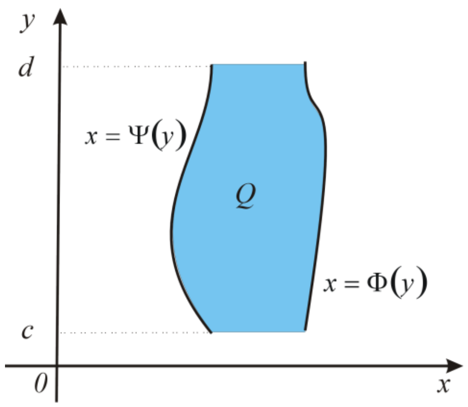
- Definujte pojem elementárna oblasť vzhľadom na os o_x.
- Definujte pojem elementárna oblasť vzhľadom na os o_y.
- Definujte pojem spotrebiteľská úspora. Ilustrujte graficky.
- Definujte pojem podnikateľský prebytok. Ilustrujte graficky.
- Definujte pojem súčasná hodnota príjmového toku.
- Definujte pojem budúca hodnota príjmového toku.
- Napíšte ako vypočítate plošný obsah rovinných útvarov. Ilustrujte graficky.
- Napíšte ako vypočítate objem rotačného telesa. Ilustrujte graficky.
- Napíšte ako vypočítate čistý prebytok zisku. Ilustrujte graficky.
- Napíšte ako vypočítate zisk z výrobného zariadenia. Ilustrujte graficky.
- Napíšte ako vypočítate celkový príjem. Ilustrujte graficky.

3.2 Elementárna oblasť

Definícia 3.1 Nech funkcie $f:\langle a,b\rangle \to R$, $g:\langle a,b\rangle \to R$ sú spojité a nech pre každé $x\in\langle a,b\rangle$ je $g(x)\le f(x)$. Potom množinu $D=\left\{(x,y)\in R^2,\, a\le x\le b,\, g(x)\le y\le f(x)\right\}$ nazývame ***elementárnou oblasťou*** v R^2 ***vzhľadom na os*** o_x (elementárnou oblasťou typu $[x,y]$).



Definícia 3.2 Nech funkcie $\Phi:\langle c,d\rangle \to R$, $\Psi:\langle c,d\rangle \to R$ sú spojité a nech pre každé $y\in\langle c,d\rangle$ je $\Psi(y)\le\Phi(y)$. Potom množinu $Q=\left\{(x,y)\in R^2,\, c\le y\le d,\, \Psi(y)\le x\le\Phi(y)\right\}$ nazývame ***elementárnou oblasťou*** v R^2 ***vzhľadom na os*** o_y (elementárnou oblasťou typu $[y,x]$).



3.3 Geometrické aplikácie určitého integrálu

Plošný obsah rovinných útvarov

Plošný obsah elementárnej oblasti D typu $[x,y]$ vypočítame podľa vzorca

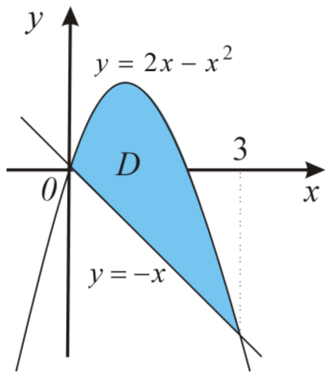
$$P=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx.$$

Plošný obsah elementárnej oblasti Q typu $[y,x]$ vypočítame podľa vzorca

$$P=\int_c^d [\Phi(y)-\Psi(y)]dy.$$

Príklad 3.1 Vypočítajme obsah časti roviny ohraničenej krivkami $y=-x$ a $y=2x-x^2$.

Riešenie:
Načrtneme dané krivky a množinu nimi určenú označme D.



Aby sme množinu D popísali, potrebujeme vypočítať priesečníky daných kriviek:

$$-x=2x-x^2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3.$$

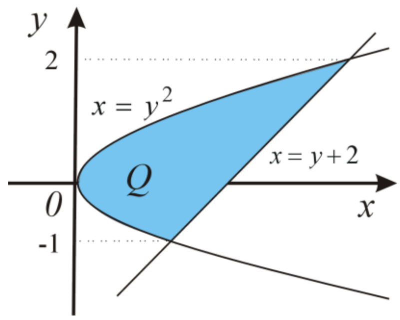
Množina D je elementárna oblasť typu $[x,y]$ a preto ju môžeme vyjadriť nerovnosťami:

$$0\le x\le 3$$
$$-x\le y\le 2x-x^2.$$

Pre obsah množiny D platí: $P=\int_0^3 (2x-x^2-(-x))\,dx=\int_0^3 (3x-x^2)\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{9}{2}.$

Príklad 3.2 Vypočítajme obsah časti roviny ohraničenej krivkami $y=x-2$ a $x=y^2$.

Riešenie:
Načrtneme dané krivky a nimi ohraničenú oblasť označme Q.



Aby sme množinu Q popísali, potrebujeme vypočítať priesečníky daných kriviek:

$$y^2 = y + 2 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2 .$$

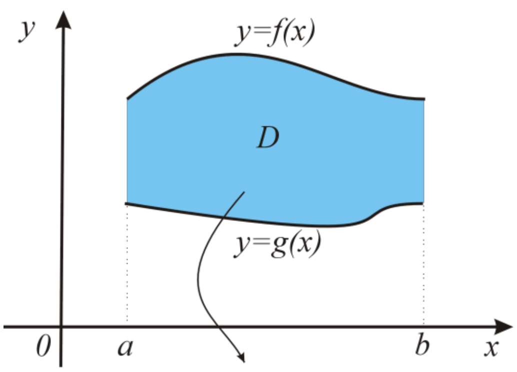
Množina Q je elementárna oblasť typu $[y, x]$ a preto ju môžeme popísať nerovnosťami:

$$-1 \le y \le 2$$
$$y^2 \le x \le y + 2.$$

Pre obsah množiny Q platí: $P = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\, dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$.

Objem rotačného telesa

Majme danú elementárnu oblasť vzhľadom na os o_x
$D = \left\{ (x, y) \in R^2, \ a \le x \le b, \quad 0 \le g(x) \le y \le f(x) \right\}$.

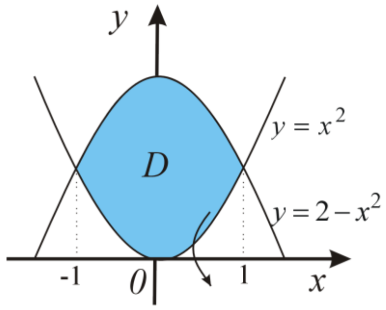


Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou tejto oblasti okolo osi o_x, vypočítame podľa vzorca

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx.$$

Príklad 3.3 Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkami $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ okolo osi o_x.

Riešenie:
Načrtneme dané krivky a nimi ohraničenú oblasť označme napr. D.



Aby sme množinu D popísali, potrebujeme vypočítať priesečníky daných kriviek:

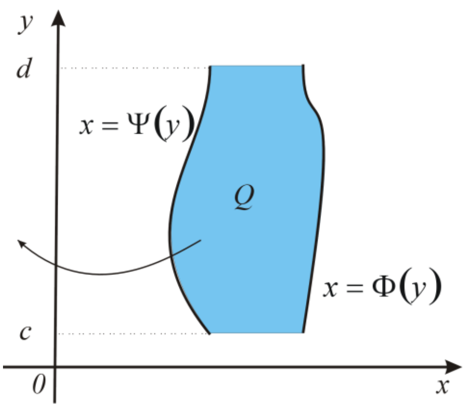
$$x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1.$$

Množina D je elementárna oblasť typu $[x, y]$ a preto ju môžeme popísať nerovnosťami:

$$-1 \leq x \leq 1$$
$$x^2 \leq y \leq 2 - x^2.$$

Pre objem telesa platí: $V = \pi \int_{-1}^{1} \left[(2 - x^2)^2 - (x^2)^2\right] dx = \pi \int_{-1}^{1} (4 - 4x^2)\, dx = 4\pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}\pi$.

Majme danú elementárnu oblasť vzhľadom na os o_y
$Q = \left\{(x, y) \in R^2, c \leq y \leq d, 0 < \Psi(y) \leq x \leq \Phi(y)\right\}$.



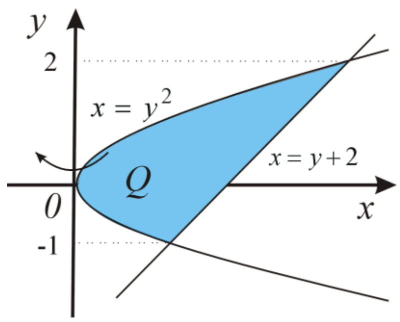
Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou tejto oblasti okolo osi o_y, vypočítame podľa vzorca

$$V = \pi \int_{c}^{d} \left[\Phi^2(y) - \Psi^2(y)\right] dy.$$

Príklad 3.4 Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkami $x = y^2$, $y = x - 2$ okolo osi o_y.

Riešenie:

Načrtneme dané krivky a nimi ohraničenú oblasť označme Q.



Pre ohraničenie elementárnej oblasti použijeme postup ako v Príklade 3.2

Pre objem telesa platí:

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[(y+2)^2 - (y^2)^2\right] dy = \pi \int_{-1}^{2} (y^2 + 4y + 4 - y^4)\, dy = \pi \left[\frac{y^3}{3} + 2y^2 + 4y - \frac{y^5}{5}\right]_{-1}^{2} = \frac{72}{5}\pi .$$

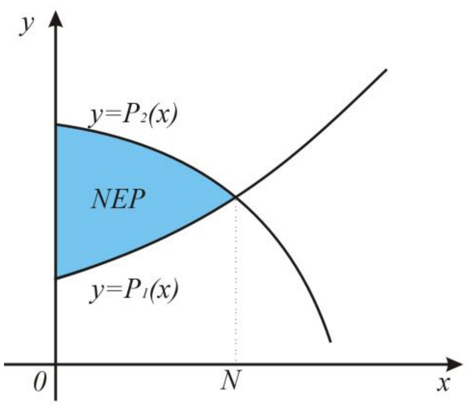
3.4 Ekonomické aplikácie určitého integrálu

Čistý prebytok zisku

Nech $P_1(x)$ je funkcia rýchlosti zisku pre 1. projekt a $P_2(x)$ je funkcia rýchlosti zisku pre 2. projekt, kde x je počet rokov odteraz a nech $P_2(x) > P_1(x)$ počas nasledujúcich N rokov odteraz.

Čistý prebytok zisku *NEP* za N rokov vypočítame podľa vzorca

$$NEP = \int_0^N [P_2(x) - P_1(x)]\, dx$$



Príklad 3.5 Predpokladá sa, že o x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x) = 100 + x^2$ tis. dolárov za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x) = 220 + 2x$ tis. dolárov za rok.

1. Koľko rokov by bol druhý investičný plán ziskovejší ako prvý?
2. O koľko väčší zisk by sme dosiahli pomocou druhého plánu v porovnaní s prvým za uvažované obdobie?

Riešenie:

Priesečník N funkcií $P_1(x) = 100 + x^2$ a $P_2(x) = 220 + 2x$ vypočítame riešením rovnice

$$100 + x^2 = 220 + 2x \Leftrightarrow x = -10 \vee x = 12$$

$$N = 12.$$

Čistý prebytok zisku za 12 rokov je

$$NEP = \int_0^{12} \left[220 + 2x - (100 + x^2)\right] dx = \int_0^{12} (120 + 2x - x^2)\, dx = \left[120x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{12} = 1\ 008 \text{ tis.}$$

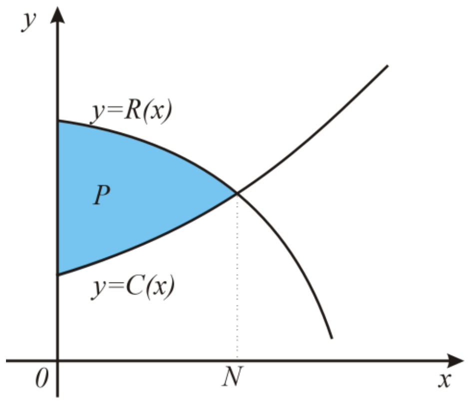
dolárov.

Zisk z výrobného zariadenia

Predpokladajme, že výrobné zariadenie vytvára príjem rýchlosťou $R(x)$ a jeho náklady na prevádzku rastú rýchlosťou $C(x)$, pričom x je počet rokov odteraz. Je zrejmé, že zariadenie je ziskové dovtedy, kým platí $R(x) > C(x)$.

Zisk z výrobného zariadenia za N rokov vypočítame podľa vzorca

$$P = \int_0^N [R(x) - C(x)]\, dx$$



Príklad 3.6 Predpokladá sa, že výrobné zariadenie po x rokoch používania vytvára príjem $R(x) = -x^2 + 17x + 44$ tis. dolárov za rok náklady na jeho údržbu rastú tempom $C(x) = x^2 + x + 4$ tis. dolárov za rok. Vypočítajme

1. Koľko rokov by bolo dané zariadenie ziskové?
2. Aký by bol zisk za uvažované obdobie?

Riešenie:

Priesečník N funkcií $R(x) = -x^2 + 17x + 44$ a $C(x) = x^2 + x + 4$ vypočítame riešením rovnice

$$-x^2 + 17x + 44 = x^2 + x + 4 \Leftrightarrow (x = -2) \vee (x = 10)$$

$$N = 10.$$

Zisk za 10 rokov je

$$P(x)=\int_0^{12}[(-x^2+17x+44)-(x^2+x+4)]\,dx=\int_0^{12}(-2x^2+16x+40)\,dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+8x^2+40x\right]_0^{12}=$$

$$=\frac{1600}{3}\text{ tis . dolárov .}$$

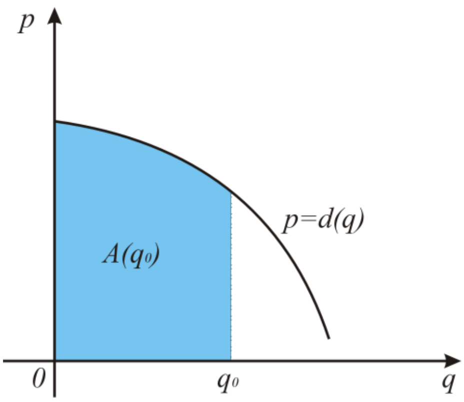
Krivka spotrebiteľského dopytu a ochota nakupovať

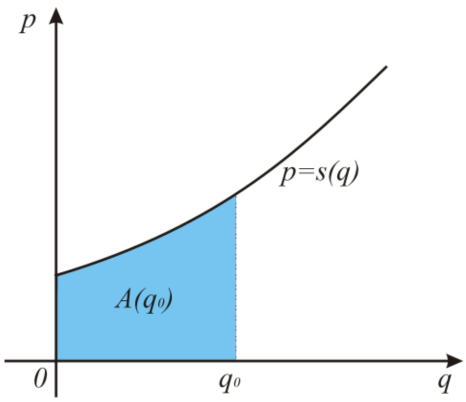
Nech je daná funkcia dopytu $p=d(q)$. Celkové množstvo peňazí, ktoré sú spotrebitelia ochotní zaplatiť za q_0 jednotiek tovaru určíme podľa vzorca

$$A(q_0)=\int_0^{q_0}d(q)\,dq\,.$$

Analogicky pre podnikateľskú ponuku a ochotu predávať: Nech je daná funkcia ponuky $p=s(q)$. Celkové množstvo peňazí, za ktoré je výrobca ochotný predať q_0 jednotiek tovaru určíme podľa vzorca

$$A(q_0)=\int_0^{q_0}s(q)\,dq\,.$$





Poznámka V obidvoch prípadoch je celkové množstvo peňazí dané plochou ohraničenou funkciami $q=0,\ q=q_0,\ p=0,\ p=d(q)$, resp. $q=0,\ q=q_0,\ p=0,\ p=s(q)$.

Príklad 3.7 Je daná funkcia dopytu $d(q)=\dfrac{300}{(0{,}1q+1)^2}$. Vypočítajme celkovú sumu peňazí, ktorú sú spotrebitelia ochotní minúť za 5 jednotiek tovaru.

Riešenie:

Za $q_0=5$ jednotiek tovaru sú spotrebitelia ochotní minúť

$$A(q_0) = \int_0^{q_0} d(q)\,dq = A(5) = \int_0^5 \frac{300}{(0{,}1q+1)^2}\,dq = \left| \begin{array}{c} 0{,}1q+1=t \\ 0{,}1dq = dt \\ 0 \to 1 \\ 5 \to 1{,}5 \end{array} \right| = 3\,000 \int_1^{1{,}5} \frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= 3\,000 \int_1^{1{,}5} \frac{1}{t^2}\,dt = 3\,000 \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{1{,}5} = 1000 \text{ cenových jednotiek}.$$

Príklad 3.8 Je daná funkcia ponuky $s(q) = 3q^2 + 4q + 5$. Vypočítajme celkovú sumu peňazí, za ktorú je predávajúci ochotný predať 10 jednotiek tovaru.

Riešenie:

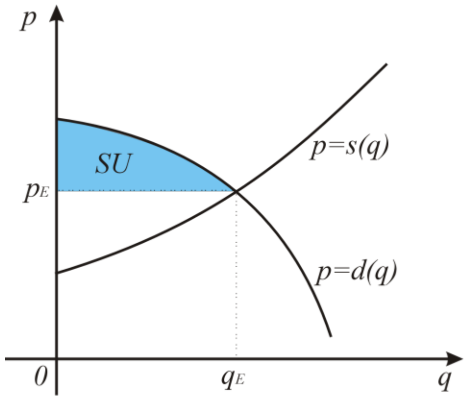
$q_0 = 10$ jednotiek tovaru je predávajúci ochotný predať za

$$A(q_0) = \int_0^{q_0} s(q)\,dq = A(10) = \int_0^{10} (3q^2 + 4q + 5)\,dq = \left[q^3 + 2q^2 + 5q\right]_0^{10} = 1\,250 \text{ cenových jednotiek.}$$

Spotrebiteľská úspora a podnikateľský prebytok

Definícia 3.3 Nech je daná funkcia dopytu $p = d(q)$, funkcia ponuky $p = s(q)$ a súradnice rovnovážneho bodu sú $[q_E, p_E]$. ***Spotrebiteľská úspora*** je rozdiel medzi množstvom peňazí, ktoré sú spotrebitelia ochotní minúť za q_E výrobkov a množstvom peňazí, ktoré by minuli pri cene p_E

$$SU = \int_0^{q_E} d(q)\,dq - p_E q_E$$



Príklad 3.9 Je daná funkcia dopytu $d(q) = 450 - q^2$ a funkcia ponuky $s(q) = 300 + 5q$. Určme rovnovážny bod pre dané funkcie, odpovedajúcu trhovú cenu a pre túto cenu vypočítajme spotrebiteľskú úsporu.

Riešenie:

Súradnice rovnovážneho bodu určíme riešením rovnice

$$450 - q^2 = 300 + 5q \Leftrightarrow q = -15 \vee q = 10$$

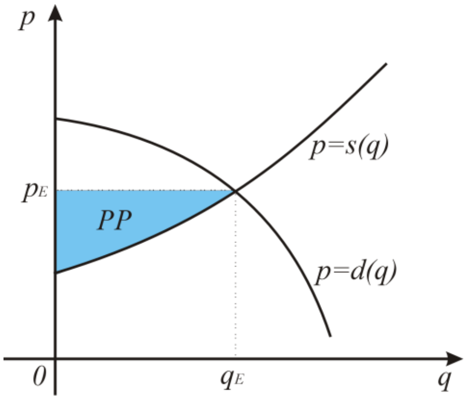
a následným dosadením kladného koreňa rovnice do hociktorej funkcie $d(q)$ alebo $s(q)$ dostaneme súradnice rovnovážneho bodu

$$q_E = 10 \text{ a } p_E = 350.$$

Spotrebiteľská úspora je $SU = \int_0^{10} (450 - q^2)\, dq - 350 \cdot 10 = \frac{2000}{3}$ cenových jednotiek.

Definícia 3.4 Nech je daná funkcia dopytu $p = d(q)$, funkcia ponuky $p = s(q)$ a súradnice rovnovážneho bodu sú $[q_E, p_E]$. ***Podnikateľský prebytok*** je rozdiel medzi množstvom peňazí, ktoré výrobcovia dostanú za q_E výrobkov predávaných za cenu p_E a množstvom peňazí, za ktoré boli ochotní predať q_E výrobkov.

$$PP = p_E q_E - \int_0^{q_E} s(q)\, dq$$



Príklad 3.10 Je daná funkcia dopytu $d(q) = 450 - q^2$ a funkcia ponuky $s(q) = 300 + 5q$. Určme rovnovážny bod pre dané funkcie, odpovedajúcu trhovú cenu a pre túto cenu vypočítajme podnikateľský prebytok.

Riešenie:

Rovnako ako v predchádzajúcej úlohe, vypočítame súradnice rovnovážneho bodu

$$q_E = 10$$
$$p_E = 350.$$

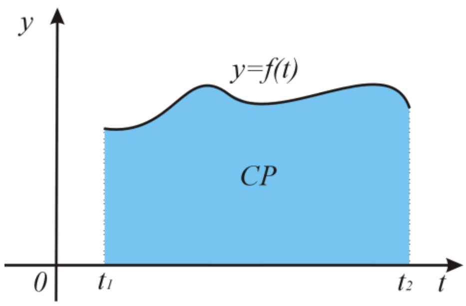
Podnikateľský prebytok je $PP = 350 \cdot 10 - \int_0^{10} (300 + 5q)\, dq = 250$ cenových jednotiek.

Celkový príjem

Nech je funkcia hustoty toku príjmu $f(t)$ v čase t spojitá na intervale $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Celkový príjem za čas $\langle t_1, t_2 \rangle$ určíme pomocou vzorca

$$CP = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt$$



Príklad 3.11 Výrobca fotoaparátov očakáva, že x mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať 50 fotoaparátov mesačne za cenu $p(x)=40+3\sqrt{x}$ dolárov za fotoaparát. Aký celkový obrat sa dá očakávať z predaja fotoaparátov za 9 nasledujúcich mesiacov?

Riešenie:

Celkový príjem za 9 mesiacov je $CP=50\int\limits_0^9 (40+3\sqrt{x})\,dx=50\left[40x+2\sqrt{x^3}\right]_0^9=$

$=20\,700$ dolárov.

Súčasná a budúca hodnota príjmového toku

Definícia 3.5 Nech je funkcia hustoty toku príjmu $f(t)$ v čase t spojitá na intervale $\langle 0, T\rangle$ a r nech je ročná úroková sadzba pri spojitom úrokovaní. ***Súčasná hodnota príjmového toku*** predstavuje množstvo peňazí, ktoré by pri ročnej úrokovej sadzbe r a spojitom úrokovaní za čas T zabezpečilo rovnaký príjem ako daný príjmový tok.

Súčasnú hodnotu príjmového toku za čas T určíme pomocou vzorca

$$SHPT=\int\limits_0^T f(t)e^{-rt}\,dt\,.$$

Príklad 3.12 Peňažný vklad na účet má vytvárať spojitý rovnomerný príjmový tok 4 200 eur za rok. Peniaze sú úročené ročným úrokom 6 % pripisovaným spojite. Aký súčasný vklad zabezpečí vytvorenie príjmového toku na 5 rokov dopredu?

Riešenie:

Veľkosť vkladu je súčasná hodnota príjmového toku $f(t)=4\,200$ pri ročnej úrokovej miere $r=0{,}06$ za obdobie $T=5$ rokov.

$$SHPT=\int\limits_0^5 4\,200\,e^{-0{,}06t}\,dt=4\,200\left[\frac{e^{-0{,}06t}}{-0{,}06}\right]_0^5=18\,142{,}73 \text{ eur.}$$

Definícia 3.6 Nech je funkcia hustoty toku príjmu $f(t)$ v čase t spojitá na intervale $\langle 0, T\rangle$ a r nech je ročná úroková sadzba pri spojitom úrokovaní. ***Budúca hodnota príjmového toku*** predstavuje množstvo peňazí, ktoré zabezpečí daný príjmový tok za T rokov za predpokladu, že sa jedná o spojité úrokovanie s ročnou úrokovou sadzbou r.

Budúcu hodnotu príjmového toku za čas T určíme pomocou vzorca

$$BHPT=\int\limits_0^T f(t)e^{r(T-t)}\,dt\,.$$

Príklad 3.13 Oceliarska spoločnosť má z produkcie valcového pechu spojitý príjmový tok 24 000 000 eur ročne pri 3% ročnej úrokovej miere. Odhadnime budúcu hodnotu príjmového toku za nasledujúci rok.

Riešenie:

Budúca hodnota príjmového toku $f(t) = 24\,000\,000$ za nasledujúci rok pri ročnej úrokovej miere $r = 0{,}03$ je

$$BHPT = \int_0^1 24\,000\,000 e^{0{,}03\,(1-t)} dt = 24\,000\,000 \cdot e^{0{,}03} \left[\frac{e^{-0{,}03t}}{-0{,}03} \right]_0^1 = 24\,363\,627 \text{ eur.}$$

3.5 Úlohy

V úlohách 1 – 36 vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej krivkami:

		Výsledky:
1.	$y = 2x,\ y = x,\ x = 5$	$\frac{25}{2}$
2.	$y = 5 - 2x,\ y = 2 + x,\ x = 0$	$\frac{3}{2}$
3.	$y = x^2 - 2x,\ y = 0$	$\frac{4}{3}$
4.	$y = x^2 - 2x,\ y = x$	$\frac{9}{2}$
5.	$y = 6x - x^2,\ y = 0$	36
6.	$y = -x^2 + 4x - 2,\ y + x = 2$	$\frac{9}{2}$
7.	$y = x^2 - 3x + 10,\ y = 2x + 4$	$\frac{1}{6}$
8.	$y = x^2 + x,\ y = 2x + 2$	$\frac{9}{2}$
9.	$y = -x^2 + 2,\ y = -3x + 4$	$\frac{1}{6}$
10.	$y = x^2 - x - 6,\ y = -x^2 + 5x + 14$	$\frac{343}{3}$
11.	$y = x^2 + 2x + 10,\ y = -x^2 - 4x + 18$	$\frac{125}{3}$
12.	$y = x^2 - x,\ y = -x^2 + 3x$	$\frac{8}{3}$
13.	$y = 2x^2 - x - 2,\ y = x^2 + 2x + 2$	$\frac{125}{6}$
14.	$y = x^2,\ y^2 = x$	$\frac{1}{3}$

15.	$xy = 4,\ x + y = 5$	$\frac{15}{2} - 8\ln 2$
16.	$xy = 5,\ y = 6 - x$	$12 - 5\ln 5$
17.	$y = \frac{4}{x},\ y = 6 - 2x$	$3 - 4\ln 2$
18.	$y = x^3,\ y = 4x$	8
19.	$y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$	$e - 1$
20.	$y = e^{2x},\ y = e^x + 2,\ x = 0$	$2\ln 2 - \frac{1}{2}$
21.	$y = e^{2x} - 3,\ y = e^x - 1,\ x = 0$	$2\ln 2 - \frac{1}{2}$
22.	$y = 2e^x + 3,\ y = e^{2x},\ x = 0$	$3\ln 3$
23.	$y = 3 - x,\ y = x,\ y = 0$	$\frac{9}{4}$
24.	$y = x + 1,\ y = 7 - x,\ y = 0$	16
25.	$x = 4,\ y^2 = x$	$\frac{32}{3}$
26.	$x = 6,\ x = y^2 - 3$	36
27.	$y = x - 2,\ y^2 = x$	$\frac{9}{2}$
28.	$x = y^2,\ x + y - 6 = 0$	$\frac{125}{6}$
29.	$x = y^2,\ x - 3y - 4 = 0$	$\frac{125}{6}$
30.	$y^2 = x + 1,\ x + 2y - 2 = 0$	$\frac{32}{3}$
31.	$x = y^2 - 2,\ x - y - 4 = 0$	$\frac{125}{6}$
32.	$y = x + 1,\ (y - 1)^2 = x$	$\frac{1}{6}$
33.	$y = \frac{8}{x},\ y = 2x,\ y = 6$	$5 - 8\ln\frac{3}{2}$
34.	$y = \frac{8}{x},\ y = \frac{x}{2},\ y = 5$	$21 - 8\ln\frac{5}{2}$
35.	$y = \frac{6}{x},\ y = \frac{x}{6},\ y = 3$	$24 - 6\ln 3$
36.	$y = \ln x,\ y = 0,\ y = e,\ x = 0$	$e^e - 1$

V úlohách 37 – 63 vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi o_x oblasti ohraničenej krivkami:

Výsledky:

37.	$y = 2x,\ y = x,\ x = 5$	125π

38.	$y=5-2x,\ y=2+x,\ x=0$	10π
39.	$y=3x+1,\ y=0,\ x=0,\ x=1$	7π
40.	$y=2x-x^2,\ y=0$	$\frac{16}{15}\pi$
41.	$y=x^2+2,\ y=2x^2+1$	$\frac{24}{5}\pi$
42.	$y=x^2,\ y=1-x^2$	$\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$
43.	$y=x^2+2,\ y=0,\ x=-1,\ x=3$	$\frac{1532}{15}\pi$
44.	$y=6x-x^2,\ y=0$	$\frac{1296}{5}\pi$
45.	$y=x^2,\ y^2=x$	$\frac{3}{10}\pi$
46.	$xy=4,\ x+y=5$	9π
47.	$xy=5,\ y=6-x$	$\frac{64}{3}\pi$
48.	$y=\frac{4}{x},\ y=6-2x$	$\frac{4}{3}\pi$
49.	$y=x^3,\ y=4x,\ x\geq 0$	$\frac{512}{21}\pi$
50.	$y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$	$\frac{\pi}{2}(e^2-1)$
51.	$y=e^{-\frac{x}{10}},\ y=0,\ x=0,\ x=10$	$5\pi(1-e^{-2})$
52.	$y=e^{\frac{x}{2}},\ y=e,\ x=0$	$\pi(e^2+1)$
53.	$y=e^{2x},\ y=1,\ x=4$	$\frac{\pi}{4}(e^{16}-17)$
54.	$y=e^x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2,\ x=3$	$\frac{\pi}{6}(3e^6-3e^4-1)$
55.	$y=e^{-x},\ y=x+1,\ x=2$	$\frac{\pi}{6}(49+3e^{-4})$
56.	$y=3-x,\ y=x,\ y=0$	$\frac{9}{4}\pi$
57.	$y=x+1,\ y=7-x,\ y=0$	$\frac{128}{3}\pi$
58.	$x=4,\ y^2=x$	8π
59.	$x=6,\ x=y^2-3$	$\frac{81}{2}\pi$
60.	$y=\frac{8}{x},\ y=2x,\ y=6$	$\frac{56}{3}\pi$
61.	$y=\frac{8}{x},\ y=\frac{x}{2},\ y=5$	108π

62.	$y=\frac{6}{x},\ y=\frac{x}{6},\ y=3$	80π

V úlohách 63 – 72 vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi o_y oblasti ohraničenej krivkami:

		Výsledky:
63.	$y=3-x,\ y=x,\ y=0$	$\frac{27}{4}\pi$
64.	$x=4,\ y^2=x$	$\frac{256}{5}\pi$
65.	$y=x-2,\ y^2=x$	$\frac{72}{5}\pi$
66.	$x=y^2,\ x+y-6=0$	$\frac{500}{3}\pi$
67.	$x=y^2,\ x-3y-4=0$	250π
68.	$y=x+1,\ (y-1)^2=x$	$\frac{2}{15}\pi$
69.	$y=\frac{8}{x},\ y=2x,\ y=6$	$\frac{22}{3}\pi$
70.	$y=\frac{8}{x},\ y=\frac{x}{2},\ y=5$	$\frac{684}{5}\pi$
71.	$y=\frac{6}{x},\ y=\frac{x}{6},\ y=3$	288π
72.	$y=\ln x,\ y=0,\ y=e,\ x=0$	$\frac{\pi}{2}(e^{2e}-1)$

73. Predpokladá sa, že x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x)=x+3$ tisíc eur za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x)=2x$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bol prvý investičný plán ziskovejší ako druhý?

b) O koľko väčší zisk by ste dosiahli pomocou prvého plánu v porovnaní s druhým za obdobie uvažované v a)?

3 roky, 4,5 tis. €

74. Predpokladá sa, že x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x)=3x+1$ tisíc eur za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x)=\frac{1}{3}x+\frac{19}{3}$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bol druhý investičný plán ziskovejší ako prvý?

b) O koľko väčší zisk by ste dosiahli pomocou druhého plánu v porovnaní s prvým za obdobie uvažované v a)?

2 roky, 16/3 tis. €

75. Predpokladá sa, že x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x)=x$ tisíc eur za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x)=2-x^2$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bol druhý investičný plán ziskovejší ako prvý?
b) O koľko väčší zisk by ste dosiahli pomocou druhého plánu v porovnaní s prvým za obdobie uvažované v a)?

1 rok, $7/6$ tis. €

76. Predpokladá sa, že x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x)=2x$ tisíc eur za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x)=6x-x^2$ tisíc eur za rok.
a) Koľko rokov by bol druhý investičný plán ziskovejší ako prvý?
b) O koľko väčší zisk by ste dosiahli pomocou druhého plánu v porovnaní s prvým za obdobie uvažované v a)?

4 roky, $32/3$ tis. €

77. Predpokladá sa, že x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x)=x^2+1$ tisíc eur za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x)=2x+4$ tisíc eur za rok.
a) Koľko rokov by bol druhý investičný plán ziskovejší ako prvý?
b) O koľko väčší zisk by ste dosiahli pomocou druhého plánu v porovnaní s prvým za obdobie uvažované v a)?

3 roky, 9 tis. €

78. Predpokladá sa, že x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x)=x^2-6x+12$ tisíc eur za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x)=26-x$ tisíc eur za rok.
a) Koľko rokov by bol druhý investičný plán ziskovejší ako prvý?
b) O koľko väčší zisk by ste dosiahli pomocou druhého plánu v porovnaní s prvým za obdobie uvažované v a)?

7 rokov, $637/6$ tis. €

79. Predpokladá sa, že x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x)=x^2-20x+105$ tisíc eur za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x)=-x^2-2x+125$ tisíc eur za rok.
a) Koľko rokov by bol druhý investičný plán ziskovejší ako prvý?
b) O koľko väčší zisk by ste dosiahli pomocou druhého plánu v porovnaní s prvým za obdobie uvažované v a)?

10 rokov, $1300/3$ tis. €

80. Predpokladá sa, že x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x)=x^2+10x$ tisíc eur za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x)=-x^2+20x+48$ tisíc eur za rok.
a) Koľko rokov by bol druhý investičný plán ziskovejší ako prvý?
b) O koľko väčší zisk by ste dosiahli pomocou druhého plánu v porovnaní s prvým za obdobie uvažované v a)?

8 rokov, $1088/3$ tis. €

81. Predpokladá sa, že x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x) = 20e^{0,2x}$ tisíc eur za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x) = 80e^{0,1x}$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bol druhý investičný plán ziskovejší ako prvý?

b) O koľko väčší zisk by ste dosiahli pomocou druhého plánu v porovnaní s prvým za obdobie uvažované v a)?

13,86 roka, 900 tis. €

82. Predpokladá sa, že x rokov odteraz by prvý investičný plán vytváral zisk tempom $P_1(x) = 60e^{0,12x}$ tisíc eur za rok a druhý investičný plán tempom $P_2(x) = 160e^{0,08x}$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bol druhý investičný plán ziskovejší ako prvý?

b) O koľko väčší zisk by ste dosiahli pomocou druhého plánu v porovnaní s prvým za obdobie uvažované v a)?

24,52 roka, cca $3\,240{,}74$ tis. €

83. Predpokladá sa, že po x rokoch používania vytvára výrobné zariadenie príjem $R(x) = \frac{x}{4} + 10$ tisíc eur za rok a náklady rastú tempom $C(x) = x + \frac{19}{4}$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bolo používanie zariadenia ziskové?

b) Aký zisk by prinieslo používanie zariadenia za uvažované obdobie?

7 rokov, cca $147/8$ tis. €

84. Predpokladá sa, že po x rokoch používania vytvára výrobné zariadenie príjem $R(x) = \frac{3x}{7} + \frac{25}{7}$ tisíc eur za rok a náklady rastú tempom $C(x) = x + \frac{1}{7}$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bolo používanie zariadenia ziskové?

b) Aký zisk by prinieslo používanie zariadenia za uvažované obdobie?

6 rokov, $72/7$ tis. €

85. Predpokladá sa, že po x rokoch používania vytvára výrobné zariadenie príjem $R(x) = 20x - x^2$ tisíc eur za rok a náklady rastú tempom $C(x) = 12x$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bolo používanie zariadenia ziskové?

b) Aký zisk by prinieslo používanie zariadenia za uvažované obdobie?

8 rokov, $256/3$ tis. €

86. Predpokladá sa, že po x rokoch používania vytvára výrobné zariadenie príjem $R(x) = x + 136$ tisíc eur za rok a náklady rastú tempom $C(x) = x^2 + 6x + 10$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bolo používanie zariadenia ziskové?

b) Aký zisk by prinieslo používanie zariadenia za uvažované obdobie?

9 rokov, $688{,}5$ tis. €

87. Predpokladá sa, že po x rokoch používania vytvára výrobné zariadenie príjem $R(x) = \sqrt{x}$ tisíc eur za rok a náklady rastú tempom $C(x) = x^2$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bolo používanie zariadenia ziskové?

b) Aký zisk by prinieslo používanie zariadenia za uvažované obdobie?

1 rok, $1/3$ tis. €

88. Predpokladá sa, že po x rokoch používania vytvára výrobné zariadenie príjem $R(x) = 18x - x^2 + 23$ tisíc eur za rok a náklady rastú tempom $C(x) = x^2 + 6x + 9$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bolo používanie zariadenia ziskové?
b) Aký zisk by prinieslo používanie zariadenia za uvažované obdobie?

7 rokov, $490/3$ tis. €

89. Predpokladá sa, že po x rokoch používania vytvára výrobné zariadenie príjem $R(x) = 75e^{0,15x}$ tisíc eur za rok a náklady rastú tempom $C(x) = 6e^{0,3x}$ tisíc eur za rok.

a) Koľko rokov by bolo používanie zariadenia ziskové?
b) Aký zisk by prinieslo používanie zariadenia za uvažované obdobie?

cca 16,84 rokov, 2 645 tis. €

90. Je daná funkcia dopytu $d(q) = 2(64 - q^2)$ eur za jednotku tovaru. Vypočítajte celkovú sumu peňazí, ktorú sú spotrebitelia ochotní minúť za nákup 6 jednotiek tovaru.

624 €

91. Je daná funkcia dopytu $d(q) = \dfrac{400}{0{,}5q + 2}$ eur za jednotku tovaru. Vypočítajte celkovú sumu peňazí, ktorú sú spotrebitelia ochotní minúť za nákup 12 jednotiek tovaru.

1109,04 €

92. Je daná funkcia dopytu $d(q) = 40e^{-0,05q}$ eur za jednotku tovaru. Vypočítajte celkovú sumu peňazí, ktorú sú spotrebitelia ochotní minúť za nákup 10 jednotiek tovaru.

314,78 €

V úlohách 93-102 je daná funkcia dopytu $d(q)$ v eurách a funkcia ponuky $s(q)$ v eurách. Určte rovnovážny bod pre dané funkcie, odpovedajúcu trhovú cenu a pre túto cenu vypočítajte spotrebiteľskú úsporu a podnikateľský prebytok.

		Výsledky:
93.	$d(q) = 40 - 0{,}002q, \quad s(q) = 0{,}01q + 4$	$SU = 9\,000$ €, $PP = 45\,000$ €
94.	$d(q) = 600 - q^2, \quad s(q) = 300 + 5q$	$SU = 2\,250$ €, $PP = 562{,}5$ €
95.	$d(q) = 49 - q^2, \quad s(q) = 4q + 4$	$SU = 83{,}33$ €, $PP = 50$ €
96.	$d(q) = 81 - q^2, \quad s(q) = q^2 + 4q + 11$	$SU = 83{,}33$ €, $PP = 133{,}33$ €
97.	$d(q) = 110 - q^2, \quad s(q) = 2 - \frac{6}{5}q + \frac{1}{5}q^2$	$SU = 666{,}67$ €, $PP = 73{,}33$ €
98.	$d(q) = 280 - 4q - q^2, \quad s(q) = q^2 + 4q + 160$	$SU = 216$ €, $PP = 216$ €
99.	$d(q) = \sqrt{49 - 6q}, \quad s(q) = q + 1$	$SU = 4{,}22$ €, $PP = 8$ €
100.	$d(q) = \dfrac{12}{q+1}, \quad s(q) = 0{,}2q + 1$	$SU = 11{,}5$ €, $PP = 2{,}5$ €

101. $d(q)=\dfrac{750}{q+5}$, $s(q)=q+10$ $SU=607{,}08\ €, PP=200\ €$

102. $d(q)=\dfrac{72}{(q+1)^2}$, $s(q)=\dfrac{2}{5}q$ $SU=50\ €,\ PP=5\ €$

103. Výrobca bicyklov očakáva, že x mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať 1 000 bicyklov mesačne za cenu $P(x)=0{,}8x+400$ eur za bicykel. Aký celkový príjem sa dá očakávať za nasledujúcich 18 mesiacov odteraz?

7 329 600 €

104. Výrobca kalkulačiek očakáva, že x mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať 5 000 kalkulačiek mesačne za cenu $P(x)=0{,}6x^2+4x+5$ eur za kalkulačku. Aký celkový príjem sa dá očakávať za nasledujúcich 20 mesiacov odteraz?

12 500 000 €

105. Výrobca nábytkových zostáv očakáva, že x mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať 700 nábytkových zostáv mesačne za cenu $P(x)=\dfrac{50}{0{,}1x+2}$ eur za jednu zostavu. Aký celkový príjem sa dá očakávať za nasledujúcich 10 mesiacov odteraz?

141 912,79 €

106. Výrobca mobilných telefónov očakáva, že x mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať 5 000 mobilných telefónov mesačne za cenu $P(x)=80+3\sqrt{x}$ eur za telefón. Aký celkový príjem sa dá očakávať za nasledujúcich 16 mesiacov odteraz?

7 040 000 €

107. Výrobca postelí očakáva, že x mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať $q(x)=2x+5$ postelí mesačne za cenu $P(x)=0{,}8x+400$ eur za posteľ. Aký celkový príjem sa dá očakávať za nasledujúcich 15 mesiacov odteraz?

122 250 €

108. Staviteľ rodinných domov na kľúč očakáva, že x mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať $q(x)=\sqrt{x}$ domov mesačne za cenu $P(x)=10\,000(0{,}6x^2+4x+5)$ eur za dom. Aký celkový príjem sa dá očakávať za nasledujúcich 12 mesiacov odteraz?

19 628,6 tis. €

109. Výrobca zdravotných matracov očakáva, že x mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať $q(x)=0{,}1x^2+3x+20$ matracov mesačne za cenu $P(x)=\dfrac{50}{0{,}1x+2}$ eur za matrac. Aký celkový príjem sa dá očakávať za nasledujúcich 36 mesiacov odteraz?

50 400 €

110. Výrobca šijacích strojov očakáva, že x mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať $q(x)=80+3\sqrt{x}$ strojov mesačne za cenu $P(x)=5000+60\sqrt{x}$ eur za stroj. Aký celkový príjem sa dá očakávať za nasledujúcich 16 mesiacov odteraz?

7 267 840 €

111. Výrobca bazénov očakáva, že x mesiacov odteraz budú spotrebitelia nakupovať $q(x)=x$ bazénov mesačne za cenu $P(x)=\dfrac{2000}{x^2+1}$ eur za bazén. Aký celkový príjem sa dá očakávať za nasledujúcich 8 mesiacov odteraz?

4 174,39 €

112. Peniaze pribúdajú rovnomerne a spojite na účet tempom 2 400 € za rok. Úročené sú ročnou úrokovou mierou 6 % pripisovanou spojite. Koľko peňazí bude na účte na konci 5. roka?

13 994,32 €

113. Peniaze pribúdajú rovnomerne a spojite na účet tempom 8 000 € za rok. Úročené sú ročnou úrokovou mierou 8 % pripisovanou spojite. Koľko peňazí bude na účte na konci 3. roka?

27 124,92 €

114. Peniaze pribúdajú rovnomerne a spojite na účet tempom 6 000 € za rok. Úročené sú ročnou úrokovou mierou 6 % pripisovanou spojite. Koľko peňazí bude na účte na konci 10. roka?

82 211,88 €

115. Peniaze pribúdajú rovnomerne a spojite na účet tempom 5 200 € za rok. Úročené sú ročnou úrokovou mierou 4 % pripisovanou spojite. Koľko peňazí bude na účte na konci 15. roka?

106 875,44 €

116. Peniaze pribúdajú rovnomerne a spojite na účet tempom 3 500 € za rok. Úročené sú ročnou úrokovou mierou 5 % pripisovanou spojite. Koľko peňazí bude na účte na konci 12. roka?

57 548,32 €

117. Peniaze pribúdajú rovnomerne a spojite na účet tempom $f(t)=100e^{-0,01t}$ tisíc € za rok. Úročené sú ročnou úrokovou mierou 5 % pripisovanou spojite. Koľko peňazí bude na účte na konci 20. roka?

3 165,92 tis. €

118. Peniaze pribúdajú rovnomerne a spojite na účet tempom $f(t)=75e^{0,05t}$ tisíc € za rok. Úročené sú ročnou úrokovou mierou 15 % pripisovanou spojite. Koľko peňazí bude na účte na konci 8. roka?

1 371,22 tis. €

119. Peniaze pribúdajú rovnomerne a spojite na účet tempom $f(t)=1000+4t$ € za rok. Úročené sú ročnou úrokovou mierou 6 % pripisovanou spojite. Koľko peňazí bude na účte na konci 10. roka?

13 948,78 tis. €

120. Peňažný vklad na účet má vytvárať spojitý rovnomerný príjmový tok 2 400 € za rok. Na účte sú peniaze úročené ročnou úrokovou mierou 6 % pripisovanou spojite. Aký súčasný vklad na účet zabezpečí vytvorenie príjmového toku na 5 rokov dopredu?

10 367,27 €

121. Peňažný vklad na účet má vytvárať spojitý rovnomerný príjmový tok 8 000 € za rok. Na účte sú peniaze úročené ročnou úrokovou mierou 8 % pripisovanou spojite. Aký súčasný vklad na účet zabezpečí vytvorenie príjmového toku na 3 roky dopredu?

21 337,21 €

122. Peňažný vklad na účet má vytvárať spojitý rovnomerný príjmový tok 6 000 € za rok. Na účte sú peniaze úročené ročnou úrokovou mierou 6 % pripisovanou spojite. Aký súčasný vklad na účet zabezpečí vytvorenie príjmového toku na 10 rokov dopredu?

45 118,84 €

123. Peňažný vklad na účet má vytvárať spojitý rovnomerný príjmový tok 5 200 € za rok. Na účte sú peniaze úročené ročnou úrokovou mierou 4 % pripisovanou spojite. Aký súčasný vklad na účet zabezpečí vytvorenie príjmového toku na 15 rokov dopredu?

58 654,49 €

124. Peňažný vklad na účet má vytvárať spojitý rovnomerný príjmový tok 3 500 € za rok. Na účte sú peniaze úročené ročnou úrokovou mierou 5 % pripisovanou spojite. Aký súčasný vklad na účet zabezpečí vytvorenie príjmového toku na 12 rokov dopredu?

31 583,19 €

125. Peňažný vklad na účet má vytvárať spojitý rovnomerný príjmový tok $f(t) = 100e^{-0,01t}$ tisíc € za rok. Na účte sú peniaze úročené ročnou úrokovou mierou 5 % pripisovanou spojite. Aký súčasný vklad na účet zabezpečí vytvorenie príjmového toku na 20 rokov dopredu?

1164,68 tis. €

126. Peňažný vklad na účet má vytvárať spojitý rovnomerný príjmový tok $f(t) = 75e^{0,05t}$ tisíc € za rok. Na účte sú peniaze úročené ročnou úrokovou mierou 15 % pripisovanou spojite. Aký súčasný vklad na účet zabezpečí vytvorenie príjmového toku na 8 rokov dopredu?

413 tis. €

127. Peňažný vklad na účet má vytvárať spojitý rovnomerný príjmový tok $f(t) = 1000 + 4t$ € za rok. Na účte sú peniaze úročené ročnou úrokovou mierou 6 % pripisovanou spojite. Aký súčasný vklad na účet zabezpečí vytvorenie príjmového toku na 10 rokov dopredu?

7 655,25 €

4 DIFERENCIÁLNE ROVNICE

4.1 Otázky

- Definujte pojem DR n-tého rádu.
- Definujte pojem riešenie DR n-tého rádu.
- Definujte pojem DR so separovanými premennými.
- Definujte pojem DR so separovateľnými premennými.
- Definujte pojem lineárna DR 1. rádu s pravou stranou.
- Na príklade ukážte postup riešenia separovateľnej DR.
- Na príklade ukážte postup riešenia LDR 1. rádu s pravou stranou.
- Exponenciálny rast. Exponenciálne klesanie. Krivka učenia sa. Logistická krivka.

4.2 Základné pojmy

Definícia 4.1 Diferenciálnou rovnicou (DR) n-tého rádu nazývame rovnicu

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

pričom $y = y(x)$ je neznáma funkcia.

Definícia 4.2 ***Riešením diferenciálnej rovnice*** $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

nazývame každú n-krát diferencovateľnú funkciu $y = \varphi(x)$, pre ktorú platí

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0.$$

Všeobecné riešenie DR n-tého rádu sa dá napísať v tvare $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, kde $c_1, \dots, c_n$ sú nezávislé konštanty.

Poznámka Počet konštánt je rovnaký ako rád DR. Ak za jednotlivé konštanty dosadíme konkrétne čísla, hovoríme o ***partikulárnom riešení DR.***

Definícia 4.3 Nech pre riešenie $y = y(x)$ DR n-tého rádu platí

$y(x_0) = b_0,\ y'(x_0) = b_1, \dots\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$, pričom $b_0, \dots, b_{n-1}$ sú reálne konštanty. Potom hovoríme, že riešenie $y = y(x)$ spĺňa ***cauchyovské začiatočné podmienky.***

4.3 Diferenciálne rovnice so separovanými a separovateľnými premennými

Definícia 4.4 Diferenciálna rovnica tvaru

$$\varphi(x)\, dx = \psi(y)\, dy$$

sa nazýva rovnica so separovanými premennými.
Riešime ju integrovaním oboch strán rovnice, t.j

$$\int \varphi(x)dx = \int \psi(y)dy,$$

odkiaľ po vypočítaní integrálov vyjadríme hľadané riešenie $y(x)$.

Definícia 4.5 Diferenciálna rovnica tvaru

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)\,dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)\,dy$$

sa nazýva rovnica so separovateľnými premennými.

Poznámka Ak platí, že $\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)\neq 0$, predchádzajúca DR sa dá upraviť na separovanú DR

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy.$$

Príklad 4.1 Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $(1+e^x)\ y\cdot y' = e^x$.

Riešenie:

Využitím vzťahu $y' = \dfrac{dy}{dx}$ a následnou separáciou premenných upravujeme diferenciálnu rovnicu

$$(1+e^x)\ y\ y' = e^x$$

$$y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$y\cdot dy = \frac{e^x}{e^x+1}dx.$$

Diferenciálnu rovnicu sme upravili na požadovaný tvar. Následným integrovaním dostávame

$$\int y\cdot dy = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln(e^x+1)+c.$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice je $\dfrac{y^2}{2} = \ln(e^x+1)+c$.

4.4 Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu

Definícia 4.6 Lineárnou DR prvého rádu s pravou stranou (SPS) nazývame rovnicu

$$y' + p(x)\cdot y = q(x),$$

kde $p(x)$, $q(x)$ sú spojité funkcie.

Poznámka Ak $q(x)=0$, DR $y'+p(x)\cdot y=0$ nazývame ***lineárnou DR prvého rádu bez pravej strany*** (BPS).

Lineárna DR 1. rádu BPS sa rieši separáciou premenných, riešenie tejto rovnice sa dá zapísať v tvare

$$y=c\cdot e^{-\int p(x)\,dx},\quad c\in R.$$

LDR 1. rádu SPS riešime po nájdení riešenia zodpovedajúcej LDR 1. rádu BPS ***metódou variácie konštanty.*** To znamená, že riešenie hľadáme v tvare $y=c(x)\cdot e^{-\int p(x)\,dx}$ s neznámou funkciou $c(x)$.
Riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou pozostáva z riešenia rovnice bez pravej strany a nejakého partikulárneho riešenia rovnice s pravou stranou.

Príklad 4.2 Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$.

Riešenie:

Takúto DR riešime najprv bez pravej strany využitím separácie premenných

$$y'+\frac{2y}{x}=0,$$

odseparovaním dostávame

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}$$

$$\frac{1}{y}dy=-\frac{2}{x}dx,$$

integrujeme

$$\int\frac{1}{y}dy=-2\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y|=-2\ln|x|+c,$$

po úprave výsledok zapíšeme v tvare

$$y=\frac{c}{x^2}.$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice bez pravej strany je $y=\frac{c}{x^2}$.

Riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou nájdeme metódou variácie konštanty.

Riešenie DR s pravou stranou hľadáme v tvare $y=\frac{c(x)}{x^2}$, pričom takto zvolené riešenie a jeho prvá derivácia $y'=\frac{c'(x)}{x^2}-2\frac{c(x)}{x^3}$ musia vyhovovať zadanej diferenciálnej rovnici. Dosadením týchto výrazov do zadanej DR a následnými úpravami dostaneme hľadanú funkciu $c(x)$.

$$\frac{c'(x)}{x^2}-2\frac{c(x)}{x^3}+\frac{2}{x}\cdot\frac{c(x)}{x^2}=\frac{e^{-x^2}}{x}$$
$$c'(x)=x\cdot e^{-x^2}$$
$$c(x)=\int x\cdot e^{-x^2}dx.$$

Integrál $\int x\cdot e^{-x^2}dx$ vypočítame pomocou substitúcie $-x^2=t$, pričom výsledok je

$$c(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+k\,.$$

Všeobecné riešenie diferenciálne rovnice s pravou stranou je

$$y=\frac{c(x)}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+k\right)=\frac{k}{x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-x^2}}{x^2}\,.$$

4.5 Exponenciálny rast a exponenciálne klesanie

Uvažujme o funkcii, ktorej absolútna miera rastu $Q'(t)$ je priamo úmerná hodnote tejto funkcie $Q(t)$ s kladnou konštantou úmernosti k. Nech platí $Q(0)=Q_0$.
To vedie k DR 1. rádu

$$\frac{dQ}{dt}=k\,Q$$

so začiatočnou podmienkou $Q(0)=Q_0$.

Jej riešenie získame separáciou premenných

$$Q(t)=Q_0\,e^{kt}$$

a nazývame ho ***exponenciálnym rastom***.

V prípade, že konštanta úmernosti je záporná, platí

$$\frac{dQ}{dt}=-k\,Q\,.$$

Analogicky ako pri exponenciálnom raste, získame riešenie separáciou premenných

$$Q(t)=Q_0\,e^{-kt}$$

a nazývame ho ***exponenciálnym klesaním***.

Príklad 4.3 Nech funkcia $P(t)$ vyjadruje počet obyvateľov USA (v mil.), pričom $t=0$ odpovedá roku 1900. Predpokladáme, že tempo rastu počtu obyvateľov je priamoúmerné počtu obyvateľov, pričom $k=0{,}01386$. Zostavme DR a z jej riešenia vypočítajme očakávaný počet obyvateľov USA v roku 2011, ak v roku 1950 malo USA 150 mil. obyvateľov.

Riešenie:

Keďže tempo rastu počtu obyvateľov je priamoúmerné počtu obyvateľov, diferenciálnu rovnicu môžeme zapísať v tvare

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

Ak roku 1900 odpovedá $t = 0$, tak roku 1950 odpovedá $t = 50$ a roku 2011 odpovedá $t = 111$. Odtiaľ vyplýva podmienka $P(50) = 150$ mil.

Riešenie tejto DR očakávame v tvare

$$P(t) = ce^{kt},$$

pričom $k = 0{,}01386$ a konštantu c dopočítame z podmienky $P(50) = 150$ mil.

Riešenie DR je

$$P(t) = 75e^{0{,}01386t}$$

a $P(111) = 349{,}31$ mil., teda v roku 2011 by malo byť v USA 349,31 miliónov obyvateľov.

4.6 Krivka učenia sa

Nech $Q(t)$ vyjadruje množstvo poznatkov, ktoré máme v čase t a množstvo poznatkov, ktoré máme na začiatku, teda v čase $t = 0$ označme $Q(0) = Q_0$. Nech B je množstvo všetkých poznatkov, ktoré sme schopní si zapamätať.

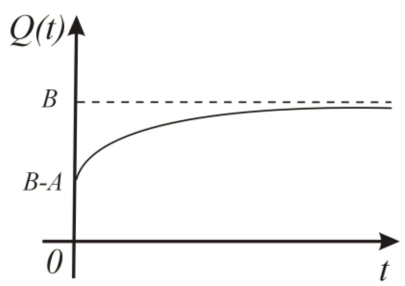
Ak predpokladáme, že rýchlosť, ktorou sa v čase t učíme, je priamo úmerná rozdielu všetkých poznatkov, ktoré sme schopní zapamätať si a množstva poznatkov, ktoré v čase t máme, môžeme písať

$$\frac{dQ}{dt} = k(B - Q), \quad Q(0) = Q_0$$

Riešenie takejto DR so začiatočnou podmienkou získame separáciou premenných

$$Q(t) = B - A\,e^{-kt}, \quad A = B - Q_0$$

a nazývame ho ***krivkou učenia sa***.



Príklad 4.4 Reklamná agentúra zistila, že pri spustení kampane v meste s 350 000 obyvateľmi, miera rastu počtu obyvateľov, ktorí sa dozvedeli o novom výrobku je priamo úmerná počtu obyvateľov, ktorí sa s výrobkom nestretli. Po 2 dňoch vedelo o výrobku 50 000 obyvateľov. Určme ako riešenie DR funkciu počtu ľudí, ktorí sa dozvedeli o novom výrobku do t dní po spustení reklamy.

Riešenie:

Označme $B = 350\,000$ počet všetkých obyvateľov, ktorí sa môžu o výrobku dozvedieť, $Q(t)$ počet obyvateľov, ktorí o t dní o výrobku už vedia, potom $B - Q$ je počet obyvateľov, ktorí o výrobku ešte nevedia.

Keďže miera rastu počtu obyvateľov, ktorí sa dozvedeli o novom výrobku je priamo úmerná počtu obyvateľov, ktorí sa s výrobkom nestretli, DR môžeme písať v tvare

$$\frac{dQ}{dt} = k(B - Q).$$

Riešenie tejto DR je v tvare

$$Q(t) = B + c\, e^{-kt}.$$

Konštantu c určíme využitím podmienky $Q(0) = 0$

$$0 = 350\,000 + c \quad \Rightarrow \quad c = -350\,000$$

a konštantu k určíme využitím podmienky $Q(2) = 50\,000$

$$50\,000 = 350\,000 - 350\,000 e^{-2k} \quad \Rightarrow \quad k = -0{,}077.$$

Riešenie tejto DR je

$$Q(t) = 350\,000 - 350\,000\, e^{-0{,}077t}.$$

4.7 Logistická krivka

Nech funkcia $Q(t)$ vyjadruje množstvo ľudí postihnutých epidémiou v čase t a množstvo ľudí, ktorí sú v čase $t = 0$ už chorí, označme $Q(0) = Q_0$.

Nech B je množstvo všetkých ľudí.

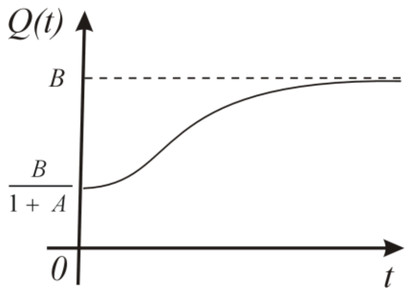
Ak predpokladáme, že rýchlosť, ktorou sa v čase t epidémia šíri, je priamo úmerná súčinu počtu ľudí, ktorí sú v čase t už chorí a počtu ľudí, ktorí ešte nie sú chorí, môžeme písať

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q), \quad Q(0) = Q_0.$$

Riešenie takejto DR so začiatočnou podmienkou získame separáciou premenných

$$Q(t) = \frac{B}{1 + A\,e^{-Bkt}}, \quad A = \frac{B}{Q_0} - 1$$

a nazývame ho ***logistickou krivkou***.



Príklad 4.5 Na lodi sa plaví 800 pasažierov. Jeden má infekčné ochorenie, na ktoré za 12 hodín ochoreli ďalší 3 pasažieri. Predpokladáme, že rast počtu infikovaných pasažierov je úmerný súčinu počtu infikovaných a počtu neinfikovaných pasažierov. Odhadnime počet infikovaných za čas 60 hodín.

Riešenie:

Označme $B = 800$ počet všetkých pasažierov, $Q(t)$ počet pasažierov postihnutých epidémiou v čase t potom $B - Q$ je počet pasažierov, ktorí v čase t ešte nie sú postihnutí epidémiou. Pretože rast počtu infikovaných pasažierov je úmerný súčinu počtu infikovaných a počtu neinfikovaných pasažierov, DR môžeme písať v tvare

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q).$$

Riešenie tejto DR hľadáme v tvare

$$Q(t) = \frac{B}{1 - ce^{-Bkt}}.$$

Konštantu c určíme využitím podmienky $Q(0) = 1$

$$1 = \frac{800}{1 - c} \quad \Rightarrow \quad c = -799$$

a konštantu k určíme využitím podmienky $Q(12) = 4$

$$4 = \frac{800}{1 + 799e^{-9600k}} \quad \Rightarrow \quad k = -0{,}115838.$$

Riešenie tejto DR je

$$Q(t) = \frac{800}{1 + 799e^{-0{,}115838 \cdot t}}.$$

Počet infikovaných za čas 60 hodín je $Q(60) = 453$ pasažierov.

4.8 Úlohy

V úlohách 1 – 29 riešte diferenciálne rovnice metódou separácie premenných:

		Výsledky:
1.	$y' = 6x$	$y = 3x^2 + C$
2.	$y' = 2x - 1$	$y = x^2 - x + C$
3.	$y' = 3x^2 + 4x$	$y = x^3 + 2x^2 + C$
4.	$y' = e^{2x}$	$y = \dfrac{e^{2x}}{2} + C$
5.	$y' = xe^x$	$y = xe^x - e^x + C$
6.	$xy' = \ln x$	$y = \dfrac{\ln^2 x}{2} + C$
7.	$y' = y - 1$	$y = 1 + Ce^x$
8.	$y' = e^{-y}$	$y = \ln\lvert x + C\rvert$
9.	$y' = 3y$	$y = Ce^{3x}$
10.	$y' = y^2$	$y = \dfrac{-1}{x + C}$
11.	$y' = e^{x-y}$	$y = \ln\lvert e^x + C\rvert$
12.	$xy' = y$	$y = Cx$
13.	$y' = \dfrac{x^2 + x}{y + 1}$	$\dfrac{y^2}{2} + y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + C$
14.	$y' = \dfrac{6x - 9x^2}{2y + 4}$	$y^2 + 4y = 3x^2 - 3x^3 + C$
15.	$\dfrac{1}{x} y' = \dfrac{1}{x^2 + 1}$	$y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$
16.	$(1 + e^x) yy' = e^x$	$\dfrac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C$
17.	$x(1 + 2y) + (x^2 + 1)y' = 0$	$y = \dfrac{1}{2}(\dfrac{C}{x^2 + 1} - 1)$
18.	$\dfrac{y'}{x} + e^y = 0$	$y = -\ln(\dfrac{x^2}{2} - C)$
19.	$y' = \dfrac{y}{(y + 1)e^{2x}}$	$y + \ln\lvert y\rvert = -\dfrac{e^{-2x}}{2} + C$
20.	$y - y^2 + xy' = 0$	$y = \dfrac{1}{1 - Cx}$
21.	$(x^2 + x)y' - y - 1 = 0$	$y = \dfrac{Cx}{x + 1} - 1$
22.	$x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$	$\sqrt{1 + y^2} = -\sqrt{1 + x^2} + C$

23. $y' = (2-y)^2 e^x$ $\qquad$ $y = 2 - \dfrac{1}{e^x + C}$

24. $x^2 e^y y' = x^3 + x^3 e^y$ $\qquad$ $y = \ln(Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1)$

25. $xyy' = (1+x^2)(1+y^2)$ $\qquad$ $\ln(1+y^2) = \ln x^2 + x^2 + C$

26. $y \ln y + xy' = 0$ $\qquad$ $y = e^{\frac{c}{x}}$

27. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$ $\qquad$ $y = (x \ln x - x + C)^2$

28. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{yy'}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ $\qquad$ $\sqrt{1-y^2} = -\sqrt{1-x^2} - C$

29. $(x+1)y' + xy = 0$ $\qquad$ $y = C(x+1)e^{-x}$

V úlohách 30 – 47 riešte diferenciálne rovnice so začiatočnou podmienkou metódou separácie premenných:

Výsledky:

30. $y' = 6x, \quad y(1) = 5$ $\qquad$ $y = 3x^2 + 2$

31. $y' = 2x - 1, \quad y(0) = -1$ $\qquad$ $y = x^2 - x - 1$

32. $y' = 3x^2 + 4x, \quad y(1) = 3$ $\qquad$ $y = x^3 + 2x^2$

33. $y' = e^{2x}, \quad y(0) = 1$ $\qquad$ $y = \dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{1}{2}$

34. $y' = xe^x, \quad y(1) = 2$ $\qquad$ $y = xe^x - e^x + 2$

35. $xy' = \ln x, \quad y(e) = \dfrac{7}{2}$ $\qquad$ $y = \dfrac{\ln^2 x}{2} + 3$

36. $y' = y - 1, \quad y(0) = 2$ $\qquad$ $y = 1 + e^x$

37. $y' = e^{-y}, \quad y(1) = 0$ $\qquad$ $y = \ln|x|$

38. $y' = 3y, \quad y(0) = 2$ $\qquad$ $y = 2e^{3x}$

39. $y' = y^2, \quad y(0) = -1$ $\qquad$ $y = \dfrac{-1}{x+1}$

40. $y' = e^{x-y}, \quad y(1) = 1$ $\qquad$ $y = x$

41. $xy' = y, \quad y\left(\dfrac{1}{3}\right) = 1$ $\qquad$ $y = 3x$

42. $\dfrac{1}{x} y' = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad y(1) = \dfrac{\ln 2}{2}$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

43. $(1+e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = \sqrt{2\ln 2}$ $\qquad$ $\dfrac{y^2}{2} = \ln(1+e^x)$

44. $y - y^2 + xy' = 0, \quad y(2) = \dfrac{1}{5}$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{1+2x}$

45. $y' = (2-y)^2 e^x, \quad y(0) = \dfrac{3}{2}$ $\qquad$ $y = 2 - \dfrac{1}{e^x + 1}$

46. $y\ln y + xy' = 0\,,\;\; y(3) = e$ $\qquad y = e^{\frac{3}{x}}$

47. $(x+1)y' + xy = 0\,,\;\; y(0) = 1$ $\qquad y = (x+1)e^{-x}$

V úlohách 48 – 68 riešte lineárne diferenciálne rovnice 1. rádu s pravou stranou metódou variácie konštanty:

Výsledky:

48. $y' - 2y = e^{2x}$ $\qquad y = Ce^{2x} + xe^{2x}$

49. $y' - 2y = e^{3x}$ $\qquad y = Ce^{2x} + e^{3x}$

50. $y' - 2y = x$ $\qquad y = Ce^{2x} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}$

51. $y' - \dfrac{3y}{x} = 2$ $\qquad y = Cx^3 - x$

52. $y' - \dfrac{2y}{x} = x+1$ $\qquad y = Cx^2 - x + x^2\ln|x|$

53. $y' - \dfrac{y}{x} = \ln x$ $\qquad y = Cx + \dfrac{x}{2}\ln^2 x$

54. $y' + \dfrac{y}{x} = x^5 + 2$ $\qquad y = \dfrac{C}{x} + x + \dfrac{x^6}{7}$

55. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^3}$ $\qquad y = \dfrac{C + \ln|x|}{x^2}$

56. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{e^x}{x^2}$ $\qquad y = \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{e^x}{x^3}$

57. $y' + xy = x$ $\qquad y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$

58. $y' + xy = x^3$ $\qquad y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$

59. $xy' - 2y = xe^{-\frac{1}{x}}$ $\qquad y = Cx^2 + x^2e^{-\frac{1}{x}}$

60. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = \sqrt{(x+1)^5}$ $\qquad y = C(x+1)^2 + \dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^7}$

61. $y' - \dfrac{y}{2(x+1)} = \sqrt{x+1}$ $\qquad y = C\sqrt{x+1} + x\sqrt{x+1}$

62. $xy' + y = 1 + \ln x$ $\qquad y = \dfrac{C}{x} + \ln x$

63. $xy' + y = x\ln x$ $\qquad y = \dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{2}x\ln x - \dfrac{x}{4}$

64. $xy' - y = (x-1)^2$ $\qquad y = Cx + x^2 - 2x\ln|x| - 1$

65. $x^2y' + xy = -1$ $\qquad y = \dfrac{C}{x} - \dfrac{\ln|x|}{x}$

66. $x^2y' + xy = 3x^3 + 2x^2 + x$ $\qquad y = \dfrac{C}{x} + x^2 + x + 1$

67. $x^2y' - xy = x^4e^{-x}$ $\quad$ $y = Cx - x^2e^{-x} - xe^{-x}$

68. $x^2y' - 2xy = x^2\ln x$ $\quad$ $y = Cx^2 - x\ln x - x$

V úlohách 69 – 80 riešte lineárne diferenciálne rovnice 1. rádu s pravou stranou a začiatočnou podmienkou metódou variácie konštanty:

Výsledky:

69. $y' - 2y = e^{2x},\ \ y(0) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $y = xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}$

70. $y' - 2y = e^{3x},\ \ y(0) = 3$ $\quad$ $y = 2e^{2x} + e^{3x}$

71. $y' - 2y = x,\ \ y(0) = 1$ $\quad$ $y = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

72. $y' - \frac{3y}{x} = 2,\ \ y(-1) = -1$ $\quad$ $y = 2x^3 - x$

73. $y' - \frac{2y}{x} = x + 1,\ \ y(1) = 0$ $\quad$ $y = x^2 - x + x^2\ln|x|$

74. $y' - \frac{y}{x} = \ln x,\ \ y(1) = 3$ $\quad$ $y = 3x + \frac{x}{2}\ln^2 x$

75. $y' + xy = x,\ \ y(0) = 0$ $\quad$ $y = -e^{-\frac{x^2}{2}} + 1$

76. $xy' - 2y = xe^{-\frac{1}{x}},\ \ y(1) = \frac{1}{e}$ $\quad$ $y = x^2e^{-\frac{1}{x}}$

77. $y' - \frac{y}{2(x+1)} = \sqrt{x+1},\ \ y(3) = 2$ $\quad$ $y = -2\sqrt{x+1} + x\sqrt{x+1}$

78. $xy' + y = 1 + \ln x,\ \ y(e) = 2$ $\quad$ $y = \frac{e}{x} + \ln x$

79. $x^2y' + xy = 3x^3 + 2x^2 + x,\ \ y(2) = 2$ $\quad$ $y = -\frac{10}{x} + x^2 + x + 1$

80. $x^2y' - xy = x^4e^{-x},\ \ y(1) = -\frac{2}{e}$ $\quad$ $y = -x^2e^{-x} - xe^{-x}$

81. Funkcie ponuky a dopytu po tovare v stovkách jednotiek sú dané rovnicami $q_S = 30 + p + 5\frac{dp}{dt}$, $q_D = 51 - 2p + 4\frac{dp}{dt}$,

kde $\frac{dp}{dt}$ označuje mieru rastu ceny vzhľadom na čas. Ak v čase $t = 0$ je cena 12 eur, vyjadrite, ako sa vyvíja trhová cena vzhľadom na čas.

$p = 5e^{-3t} + 7$

82. Funkcie ponuky a dopytu po tovare v stovkách jednotiek sú dané rovnicami $q_S = 25 + p + 3\frac{dp}{dt}$, $q_D = 55 - p + 2\frac{dp}{dt}$, kde $\frac{dp}{dt}$ označuje mieru rastu ceny vzhľadom na čas. Ak v čase $t = 0$ je cena 22 eur, vyjadrite, ako sa vyvíja trhová cena vzhľadom na čas.

$$p = 7e^{-2t} + 15$$

83. Funkcie ponuky a dopytu po tovare v stovkách jednotiek sú dané rovnicami $q_S = 14 + 2p + 4\frac{dp}{dt}$, $q_D = 38 - 2p + 3\frac{dp}{dt}$,

kde $\frac{dp}{dt}$ označuje mieru rastu ceny vzhľadom na čas. Ak v čase $t = 0$ je cena 14 eur, vyjadrite, ako sa vyvíja trhová cena vzhľadom na čas.

$$p = 8e^{-4t} + 6$$

84. Funkcie ponuky a dopytu po tovare v stovkách jednotiek sú dané rovnicami $q_S = 6 - p + 6\frac{dp}{dt}$, $q_D = 22 + p + 5\frac{dp}{dt}$,

kde $\frac{dp}{dt}$ označuje mieru rastu ceny vzhľadom na čas. Ak v čase $t = 0$ je cena 20 eur, vyjadrite, ako sa vyvíja trhová cena vzhľadom na čas.

$$p = 28e^{2t} - 8$$

85. Funkcie ponuky a dopytu po tovare v stovkách jednotiek sú dané rovnicami $q_S = 50 - 2p - 3\frac{dp}{dt}$, $q_D = 40 + 2p + \frac{dp}{dt}$,

kde $\frac{dp}{dt}$ označuje mieru rastu ceny vzhľadom na čas. Ak v čase $t = 0$ je cena 15 eur, vyjadrite, ako sa vyvíja trhová cena vzhľadom na čas.

$$p = 12{,}5e^{-t} + 2{,}5$$

86. Funkcie ponuky a dopytu po tovare v stovkách jednotiek sú dané rovnicami $q_S = 35 - 2p + 3\frac{dp}{dt}$, $q_D = 95 - 5p + 2\frac{dp}{dt}$,

kde $\frac{dp}{dt}$ označuje mieru rastu ceny vzhľadom na čas. Ak v čase $t = 0$ je cena 30 eur, vyjadrite, ako sa vyvíja trhová cena vzhľadom na čas.

$$p = 10e^{-3t} + 20$$

87. Funkcie ponuky a dopytu po tovare v stovkách jednotiek sú dané rovnicami $q_S = 70 - 3p + 2\frac{dp}{dt}$, $q_D = 100 - 5p + \frac{dp}{dt}$,

kde $\frac{dp}{dt}$ označuje mieru rastu ceny vzhľadom na čas. Ak v čase $t = 0$ je cena 5 eur, vyjadrite, ako sa vyvíja trhová cena vzhľadom na čas.

$$p = 15 - 10e^{-2t}$$

88. Vklad 5 000 eur rastie spojite rovnakým tempom 4,5% za rok. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia vypočítajte:

a) Očakávanú hodnotu investície po 5 rokoch.

b) Po akom čase dosiahne investícia hodnotu 10 000 eur?

a) 6 261,61 €, b) 15,40 roka

89. Vklad 100 000 eur rastie spojite rovnakým tempom 4,5% za rok. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia vypočítajte:

a) Očakávanú hodnotu investície po 3 rokoch.

b) Po akom čase dosiahne investícia hodnotu 200 000 eur?

a) 114 453,68 €, b) 15,40 roka

90. Vklad 15 000 dolárov rastie spojite rovnakým tempom 2% za rok. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia vypočítajte:

a) Očakávanú hodnotu investície po 10 rokoch.

b) Po akom čase dosiahne investícia hodnotu 20 000 dolárov?

a) 18 321,04 \$, b) 14,38 roka

91. Vklad 4 000 eur rastie spojite rovnakým tempom 3,5% za rok. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia vypočítajte:

a) Očakávanú hodnotu investície po 8 rokoch.

b) Po akom čase dosiahne investícia hodnotu 100 000 eur?

a) 5 292,52 €, b) 91,97 roka

92. Miera rastu počtu baktérií je priamoúmerná samotnému počtu baktérií. Na začiatku pokusu je v skúmavke 5 000 baktérií, po jednej hodine je ich 7 500. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia vypočítajte, koľko baktérií bude v skúmavke po 10 hodinách.

$Q(t) = 5000e^{0,4055 \cdot t}$, $Q(10) = 288\,425$ baktérií

93. Nech funkcia $S(t)$ vyjadruje počet stromov v určitej lesnej lokalite. V roku 1980 (v čase $t = 0$) ich odhadom bolo 3 500. V roku 1990 ich bolo asi 9 200, čo bolo spôsobené samovýsevom. Predpokladajme, že tempo rastu počtu stromov je priamoúmerné počtu stromov. Zostavte DR a z jej riešenia vypočítajte očakávaný počet stromov v roku 2015.

$S(t) = 3500e^{0,096644 \cdot t}$, $S(35) = 103059$ stromov

94. Nech funkcia $R(t)$ vyjadruje počet potkanov v mestskej kanalizácii nemenovaného mesta. Vedci zistili, že v roku 2008 (v čase $t = 0$) ich bolo približne 7 500. V roku 2010 ich bolo asi 11 400. Predpokladajme, že tempo rastu počtu potkanov je priamoúmerné počtu potkanov. Zostavte DR a z jej riešenia vypočítajte očakávaný počet týchto hlodavcov v roku 2013.

$R(t) = 7\,500e^{0,2093551 \cdot t}$, $R(5) \doteq 21\,363$ potkanov

95. Nech funkcia $V(t)$ vyjadruje počet ohrozených veľrýb v moriach. V roku 1995 (v čase $t = 0$) ich bolo asi 5 260. V roku 2 000 ich bolo už len 4 370. Predpokladajme, že tempo poklesu počtu veľrýb je priamoúmerné počtu veľrýb. Zostavte DR a z jej riešenia vypočítajte očakávaný počet veľrýb v roku 2013.

$V(t) = 5\,260e^{-0,0370736 \cdot t}$, $V(18) \doteq 2\,699$ veľrýb

96. Pri volebnej kampani v meste s 230 065 obyvateľmi, miera rastu počtu obyvateľov, ktorí sa o kampani dozvedeli, je priamo úmerná počtu obyvateľov, ktorí o kampani ešte nevedia. Po týždni o nej vedelo 12 700 ľudí. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia určte, koľko obyvateľov sa o kampani dozvie po dvoch týždňoch.

$$f(t) = 230\,065 - 230\,065e^{-0{,}0567839t}, \quad f(2) \doteq 24\,699 \text{ obyvateľov}$$

97. V Košiciach mala koncert hudobná skupina ELÁN (240 700 obyvateľov). Miera rastu počtu obyvateľov, ktorí sa o koncerte dozvedeli, bola priamo úmerná počtu obyvateľov, ktorí o koncerte ešte nevedeli. Po 5 dňoch o ňom vedelo zhruba 20 450 obyvateľov. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia určte, koľko obyvateľov sa o koncerte dozvedelo po dvoch týždňoch.

$$f(t) = 240\,700 - 240\,700e^{-0{,}0177576t}, \quad f(14) \doteq 52\,981 \text{ obyvateľov}$$

98. Správa o výbuchu vo firme USS v Košiciach (240 700 obyvateľov) sa šírila takou rýchlosťou, že po dvoch hodinách o nešťastí vedelo asi 125 300 Košičanov. Miera rastu počtu obyvateľov, ktorí sa o udalosti dozvedeli, bola priamo úmerná počtu obyvateľov, ktorí o nej ešte nevedeli. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia určte, koľko obyvateľov sa o tom dozvedelo po 24 hodinách.

$$f(t) = 240\,700 - 240\,700e^{-0{,}3675735t}, \quad f(24) \doteq 240\,665 \text{ obyvateľov}$$

99. U chovateľa včiel, ktorý má v úľoch asi 600 000 jedincov, sa vyskytol včelí mor. Touto nákazou je postihnutých 200 včiel. Po troch dňoch ich bolo už 800. Predpokladajte, že rast počtu infikovaných včiel je úmerný súčinu počtu infikovaných a počtu neinfikovaných včiel. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia určte, koľko včiel bude chorých po 10 dňoch a po akom čase ochorie polovica včelstva.

$$Q(t) = \frac{600\,000}{1 + 2\,999e^{-0{,}4624t}}, \quad Q(10) \doteq 19\,723 \text{ včiel, cca po 17,32 dňoch}$$

100. Na pokusnom políčku výskumného ústavu je 1 200 sadeníc zemiakov. Na začiatku bolo infikovaných zemiakovou plesňou 10 sadeníc. Po jednom dni malo pleseň 85 sadeníc. Predpokladajte, že rast počtu infikovaných sadeníc je úmerný súčinu počtu infikovaných a počtu neinfikovaných sadeníc. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia určte, koľko sadeníc bude napadnutých plesňou po 4 dňoch a po akom čase bude napadnutých 1 000 sadeníc.

$$Q(t) = \frac{1\,200}{1 + 119e^{-2{,}2051651t}}, \quad Q(4) \doteq 1179 \text{ sadeníc, cca po 2,9 dňoch}$$

101. Na základnej škole (414 žiakov) sa vyskytla infekčná žltačka u troch detí. Po dvoch dňoch je nakazených ďalších 9 detí. Predpokladajte, že rast počtu infikovaných detí je úmerný súčinu počtu infikovaných a počtu neinfikovaných detí. Zostavte diferenciálnu rovnicu a z jej riešenia určte, koľko detí bude chorých po 5 dňoch. Keď v škole chýba nad 30 % detí, riaditeľka udelí riaditeľské voľno. Po koľkých dňoch to urobí?

$$Q(t) = \frac{414}{1 + 137e^{-0{,}7042177t}}, \quad Q(5) \doteq 82 \text{ detí, cca po 5,79 dňoch}$$

5 DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE DVOCH PREMENNÝCH

5.1 Otázky

- Definujte pojem karteziánsky súčin, Euklidov vektorový priestor.
- Definujte pojem funkcia 2 premenných.
- Definujte pojem hladinová krivka.
- Definujte pojem parciálna derivácia prvého, resp. druhého rádu funkcie.
- Definujte pojem úplný diferenciál.
- Definujte pojem lokálne maximum funkcie 2 premenných.
- Definujte pojem lokálne minimum funkcie 2 premenných.
- Definujte pojem stacionárny bod funkcie.
- Definujte pojem kritické body funkcie, implicitná funkcia.
- Sformulujte vetu o nutnej podmienke existencie lokálneho extrému funkcie 2 premenných.
- Sformulujte vetu o postačujúcej podmienke existencie lokálneho extrému funkcie 2 premenných.
- Napíšte ako postupovať pri hľadaní lokálnych, resp. viazaných extrémov funkcie 2 premenných.
- Zapíšte $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, ak $z = f(u, v)$, pričom $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.
- Zapíšte $\dfrac{dz}{dt}$, ak $z = f(x, y)$, pričom $x = x(t)$, $y = y(t)$.
- Zapíšte $\dfrac{dz}{dx}$, ak $z = f(x, y)$, pričom $y = y(x)$.

5.2 Základné pojmy

Definícia 5.1 Množinu všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$ takých, že $x \in A \wedge y \in B$, nazývame ***karteziánskym súčinom*** množín A, B a označujeme $A \times B$.

Definícia 5.2 Označme $R^2 = RxR$. Ak v R^2 je pre každú dvojicu bodov $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$ definovaná vzdialenosť $\rho = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$, potom dvojicu (R^2, ρ) nazývame dvojrozmerný ***Euklidov vektorový priestor*** a označujeme $\boldsymbol{E_2}$.

Definícia 5.3 ***Funkcia dvoch premenných*** je predpis f, ktorý každému $X = [x, y] \in M \subset E_2$ ***priradí práve jedno*** $z \in R$, píšeme $z = f(X)$ alebo $z = f(x, y)$.

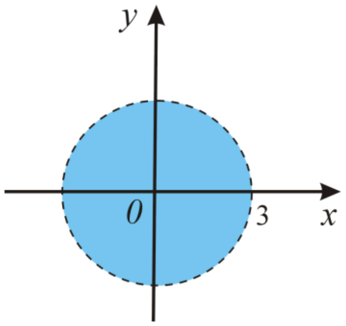
Definícia 5.4 Množinu M nazývame ***definičným oborom*** funkcie f, označujeme $D(f)$.

Poznámka Ak množina M nie je zadaná, tak pod (prirodzeným) definičným oborom funkcie f rozumieme najväčšiu podmnožinu R^2, pre ktorú má daná funkcia zmysel.

Príklad 5.1 Nájdime definičný obor funkcie $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.

Riešenie:

Funkcia z je definovaná pre body $[x, y]$ spĺňajúce podmienku $9 - x^2 - y^2 > 0$, čiže $x^2 + y^2 < 9$. Definičný obor funkcie je teda vnútro kruhu so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom $r = 3$.



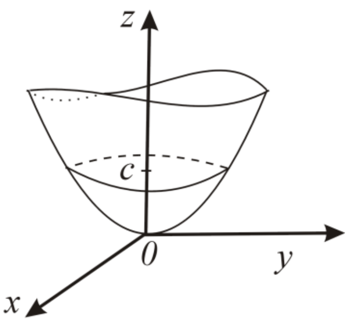
Definícia 5.5 Množinu $H(f) = \{z \in R, \exists X \in M, z = f(X)\}$ nazývame ***obor hodnôt*** funkcie f.

Definícia 5.6 Majme funkciu $z = f(x, y)$ definovanú na množine $M \subset E_2$ s oborom hodnôt $H(f)$. Ak $c \in H(f)$, potom množinu bodov $[x, y] \in M$, ktorých funkčná hodnota je rovná číslu c, čiže $c = f(x, y)$ nazývame ***hladinovou krivkou.***

Príklad 5.2 Určme hladinové krivky funkcie $z = x^2 + y^2$.

Riešenie:

Ak $c > 0$, potom $c = x^2 + y^2$. Hladinové krivky danej funkcie sú kružnice so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom $r = \sqrt{c}$.



5.3 Parciálne derivácie

Definícia 5.7 Majme funkciu $z = f(x, y)$ definovanú v okolí bodu $A = [a_1, a_2]$. ***Parciálnou deriváciou prvého rádu funkcie*** $f(x, y)$ podľa premennej x v bode A nazývame limitu $\lim\limits_{x \to a_1} \dfrac{f(x, a_2) - f(a_1, a_2)}{x - a_1}$, označujeme $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_A = \dfrac{\partial f(A)}{\partial x} = f'_x(A)$.

Parciálnou deriváciou prvého rádu funkcie $f(x, y)$ podľa premennej y v bode A nazývame limitu $\lim\limits_{y \to a_2} \dfrac{f(a_1, y) - f(a_1, a_2)}{y - a_2}$, označujeme $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_A = \dfrac{\partial f(A)}{\partial y} = f'_y(A)$.

Pri výpočte parciálnej derivácie podľa ľubovoľnej premennej postupujeme tak, ako keby druhá premenná bola konštanta.

Príklad 5.3 Vypočítajme parciálne derivácie 1. rádu funkcie $z = 3x^2 y + xe^{5y}$.

Riešenie:

$z'_x = 6xy + e^{5y}$

$z'_y = 3x^2 + 5xe^{5y}$

Definícia 5.8 Nech funkcia $z = f(x, y)$ má v okolí bodu $A = [a_1, a_2]$ parciálnu deriváciu prvého rádu f'_x. Ak existuje derivácia funkcie f'_x podľa premennej x, resp. y, nazývame ju ***parciálna derivácia druhého rádu funkcie*** $z = f(x, y)$ dvakrát podľa premennej x, resp. podľa premennej x a premennej y,

označujeme $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}\right)_A = \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} = f''_{xx}(A)$, resp. $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_A = f''_{xy}(A)$.

Definícia 5.9 Nech funkcia $z = f(x, y)$ má v okolí bodu $A = [a_1, a_2]$ parciálnu deriváciu prvého rádu f'_y. Ak existuje derivácia funkcie f'_y podľa premennej x, resp. y, nazývame ju ***parciálna derivácia druhého rádu funkcie*** podľa premennej y a premennej x, resp. dvakrát podľa premennej y,

označujeme $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_A = f''_{yx}(A)$, resp. $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}\right)_A = \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} = f''_{yy}(A)$.

Príklad 5.4 Vypočítajme všetky parciálne derivácie druhého rádu funkcie $z = 3x^2 y + xe^{5y}$.

Riešenie:

$z'_x = 6xy + e^{5y} \quad \Rightarrow z''_{xx} = (6xy + e^{5y})'_x = 6y, \quad z''_{xy} = (6xy + e^{5y})'_y = 6x + 5e^{5y}$

$z'_y = 3x^2 + 5xe^{5y} \Rightarrow z''_{yx} = (3x^2 + 5xe^{5y})'_x = 6x + 5e^{5y}, \quad z''_{yy} = (3x^2 + 5xe^{5y})'_y = 25xe^{5y}$

Poznámka Ak z''_{xy} a z''_{yx} sú spojité na množine *A*, potom na množine *A* platí $z''_{xy} = z''_{yx}$.

5.4 Parciálne derivácie zloženej funkcie

V tejto kapitole ukážeme na niekoľkých typoch zložených funkcií výpočet ich parciálnych derivácií prvého rádu.

Typ 1 Majme zloženú funkciu $z = f(u, v)$, pričom $u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y)$.

Ak majú funkcie f, φ, ψ spojité parciálne derivácie, potom má spojité parciálne derivácie aj zložená funkcia a platí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Príklad 5.5 Vypočítajme $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$, ak sú dané funkcie $z = uv$, $u = 3x - 5y$, $v = xy + y$.

Riešenie:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = v \cdot 3 + u \cdot y = 3(xy + y) + y(3x - 5y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v \cdot (-5) + u \cdot (x + 1) = -5v + (3x - 5y)(x + 1).$$

Typ 2 Ak máme $z = f(x, y)$, pričom $x = x(t), \quad y = y(t)$, potom

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Príklad 5.6 Vypočítajme $\frac{dz}{dt}$, ak sú dané funkcie $z = \frac{x}{y}, x = e^t$, $y = \frac{1}{t}$.

Riešenie:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y} \cdot e^t + x(-\frac{1}{y^2})(-\frac{1}{t^2}) = te^t + e^t.$$

Typ 3 Ak máme $z = f(x, y)$, pričom $y = y(x)$, potom

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Príklad 5.7 Vypočítajme $\frac{dz}{dx}$, ak sú dané funkcie $z = y \ln x$, $y = x^2$.

Riešenie:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = y\frac{1}{x} + (\ln x) \cdot 2x = \frac{y}{x} + 2x \ln x.$$

5.5 Derivácia implicitnej funkcie

Definícia 5.10 Nech $F(x, y)$ je spojitá funkcia dvoch premenných. Ak existuje spojitá funkcia $y = f(x)$ taká, že pre všetky x z definičného oboru funkcie $y = f(x)$ platí

$$F[x, f(x)] = 0,$$

potom funkciu $f(x)$ nazývame ***funkciou určenou implicitne*** rovnicou $F(x, y) = 0$.

Majme funkciu $F(x, y)$ definovanú v okolí bodu $A = [x_0, y_0]$. Ak je funkcia $F(x, y)$ v okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ spojitá a má tam spojité parciálne derivácie do druhého rádu, pričom $f'_y(A) \neq 0$, potom jej prvú deriváciu určíme pomocou derivácie zloženej funkcie typu 3.

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$F'_x + F'_y \cdot y' = 0$$

a preto

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Príklad 5.8 Vypočítajme y' pre funkciu $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Riešenie:

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, potom $y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$.

5.6 Úplný diferenciál

Definícia 5.11 Majme funkciu $z = f(x, y)$, ktorá má v bode $A = [a_1, a_2]$ spojité parciálne derivácie 1. rádu. Potom výraz

$$df(A, X) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\Delta y,$$

kde $\Delta x = x - a_1$, $\Delta y = y - a_2$, nazývame ***úplným diferenciálom*** funkcie f v bode A.

Poznámka Môžeme ho použiť pri približnom výpočte hodnoty funkcie f v bode X, ktorý sa nachádza v blízkosti bodu A, ak predpokladáme, že diferencia $f(X) - f(A)$ je približne rovná diferenciálu funkcie v okolí bodu A, $f(X) - f(A) \doteq df(A, X)$, odkiaľ vyplýva

$$f(X) \doteq f(A) + df(A, X).$$

5.7 Lokálne extrémy funkcie dvoch premenných

Definícia 5.12 Funkcia $f(x, y)$ má v bode $A = [x_0, y_0] \in D(f)$ ***lokálne maximum***, ak existuje okolie bodu A také, že pre každý bod $X = [x, y] \in D(f)$ z okolia bodu A, platí

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0).$$

Definícia 5.13 Funkcia $f(x, y)$ má v bode $A = [x_0, y_0] \in D(f)$ ***lokálne minimum***, ak existuje okolie bodu A také, že pre každý bod $X = [x, y] \in D(f)$ z okolia bodu A, platí

$$f(x, y) \ge f(x_0, y_0).$$

Definícia 5.14 Ak má funkcia v nejakom bode lokálne maximum alebo minimum, hovoríme, že má v tom bode ***lokálny extrém.***

Veta 5.1 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému)
Nech funkcia $z = f(x, y)$ má v bode $A = [x_0, y_0]$ lokálny extrém. Ak parciálne derivácie $\frac{\partial f(A)}{\partial x}, \frac{\partial f(A)}{\partial y}$ existujú, tak sú obe rovné nule.

Definícia 5.15 Bod $A = [x_0, y_0]$, v ktorom parciálne derivácie sú rovné nule, nazývame ***stacionárny bod***.

Definícia 5.16 Stacionárne body a body, v ktorých parciálne derivácie neexistujú, sa nazývajú ***kritické body.***

Funkcia môže mať lokálny extrém len v kritickom bode.

Veta 5.2 (Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému)

Nech bod $A=[x_0\,,\,y_0]$ je stacionárnym bodom funkcie $z=f(x,\,y)$ a nech v ňom existujú spojité parciálne derivácie druhého rádu $\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y\partial x}$.

Označme $D_2(A)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ a $D_1(A)=\dfrac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}$. Potom platí:

1. Ak $D_2(A)>0 \;\wedge\; D_1(A)<0$, potom má funkcia $z=f(x,\,y)$ v bode $A=[x_0\,,\,y_0]$ ***lokálne maximum***.
2. Ak $D_2(A)>0 \;\wedge\; D_1(A)>0$, potom má funkcia $z=f(x,\,y)$ v bode $A=[x_0\,,\,y_0]$ ***lokálne minimum***.
3. Ak $D_2(A)<0$, potom ***nemá*** funkcia $z=f(x,\,y)$ v bode $A=[x_0\,,\,y_0]$ ***extrém*** (bod $A=[x_0\,,\,y_0]$ sa nazýva sedlový bod).

Príklad 5.9 Nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x,y)=x^3+8y^3-6xy+1$.

Riešenie:

Pretože

$f_x'=3x^2-6y$

$f_y'=24y^2-6x$,

stacionárne body $A=[0{,}0]$, $\quad B=\left[1,\dfrac{1}{2}\right]$ nájdeme riešením sústavy rovníc

$f_x'=0$

$f_y'=0$.

Využitím Vety 5.2 overíme extrémy v týchto stacionárnych bodoch. Vypočítame druhé parciálne derivácie

$f_{xx}''=6x$

$f_{xy}''=-6$

$f_{yx}''=-6$

$f_{yy}''=48y$

a určíme postupne hodnoty determinantov D_2 a D_1.

Pre stacionárny bod A platí: $D_2(A) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0 \Rightarrow$ v bode A nie je extrém a teda bod A je sedlový bod.

Pre stacionárny bod B platí: $D_2(B) = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 108 > 0 \quad \wedge \quad D_1(B) = 6 > 0 \Rightarrow$ v bode B je teda lokálne minimum a $f(B) = 0$.

5.8 Viazané extrémy funkcie dvoch premenných

Majme funkciu $z = f(x, y)$ a hľadajme jej lokálne extrémy na množine M takých bodov $[x, y] \in D(f)$, ktoré spĺňajú podmienku $g(x, y) = 0$.

Takéto extrémy nazývame ***viazané lokálne extrémy*** funkcie $z = f(x, y)$ a podmienku $g(x, y) = 0$ nazývame ***väzba***.

1. Ak sa z väzby $g(x, y) = 0$ dá jednoznačne vyjadriť niektorá premenná, dosadíme ju do funkcie $z = f(x, y)$ a dostaneme funkciu jednej premennej (Matematika I).
2. Ak sa z väzby $g(x, y) = 0$ nedá jednoznačne vyjadriť žiadna premenná, zostrojíme ***Lagrangeovu funkciu***

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

   a hľadáme extrémy tejto funkcie.

Poznámka Extrémy Lagrangeovej funkcie $L(x, y)$ sú zároveň aj extrémami pôvodnej funkcie $f(x, y)$. Opačné tvrdenie neplatí.

Stacionárne body Lagrangeovej funkcie $L(x, y)$ nájdeme riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} L'_x &= 0 \\ L'_y &= 0 \\ L'_\lambda &= 0 \end{aligned}$$

Závery pre existenciu viazaného lokálneho extrému sú rovnaké ako pri lokálnych extrémoch, čiže platí:

Ak $D_2(A) > 0 \quad \wedge \quad D_1(A) < 0$, potom má funkcia $f(x, y)$ v bode $A = [x_0, y_0]$ ***viazané lokálne maximum***.

Ak $D_2(A) > 0 \quad \wedge \quad D_1(A) > 0$, potom má funkcia $f(x, y)$ v bode $A = [x_0 , y_0]$ ***viazané lokálne minimum***.

Ak $D_2(A) < 0$, potom ***nemá*** funkcia $L(x, y)$ v bode $A = [x_0 , y_0]$ ***extrém*** (bod $A = [x_0 , y_0]$ sa nazýva sedlový bod). V tom prípade nevieme takýmto spôsobom o extréme funkcie $f(x, y)$ rozhodnúť.

Príklad 5.10 Nájdime viazané extrémy funkcie $f(x, y) = x + 2y$, ak $x^2 + y^2 = 5$.

Riešenie:

Keďže z funkcie $g(x, y) = 0$ ($x^2 + y^2 - 5 = 0$) predstavujúcej väzbu nemôžeme jednoznačne vyjadriť žiadnu z dvoch premenných, zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, y) = x + 2y + \lambda.(x^2 + y^2 - 5),\ \lambda \in \mathbf{R}$$

a hľadáme jej extrémy. Riešime sústavu rovníc

$$\begin{aligned} L'_x &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y &= 2 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda &= x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{aligned}$$

Ak z prvej rovnice vyjadríme *x*, z druhej *y* a dosadíme ich do tretej rovnice, dostaneme

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 5 = 0\ .$$

Riešením danej rovnice dostaneme $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ a určíme stacionárne body.

Pre $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ je $A = [-1,-2]$, pre $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ je $B = [1,2]$.

Ďalej postupujeme podobne ako v Príklade 5.9. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu a určíme ich hodnoty v stacionárnych bodoch.

$$\begin{aligned} L''_{xx} &= 2\lambda \\ L''_{xy} &= 0 \\ L''_{yx} &= 0 \\ L''_{yy} &= 2\lambda \end{aligned}$$

Pre stacionárny bod A dostávame: $D_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad \wedge \quad D_1(A) = 1 > 0 \quad \Rightarrow$ v bode A je viazané lokálne minimum a $f(A) = -5$.

Pre stacionárny bod B dostávame: $D_2(B) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad \wedge \quad D_1(B) = -1 < 0 \quad \Rightarrow$ v bode B je viazané lokálne maximum a $f(B) = 5$.

5.9 Úlohy

V úlohách 1 – 21 určte definičný obor funkcie $z = f(x,y)$ a znázornite ho graficky:

1. $z = \dfrac{x+y}{3-x}$

2. $z = \dfrac{2y-x^2}{x+7} - \dfrac{e^x}{y-1}$

3. $z = \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{y}{x+3}$

4. $z = \dfrac{\ln x}{x-y} + \dfrac{2}{x^2+y^2}$

5. $z = \dfrac{3-y}{x^2-y^2} + e^{x+y}$

6. $z = \dfrac{1+x-y^2}{x^2+y^2-5}$

7. $z = \sqrt{y-x+5}$

8. $z = \sqrt{y^2-x}$

9. $z = \sqrt[4]{y^2-x^2}$

10. $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$

11. $z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \sqrt{x^2+5}$

12. $z = \sqrt{x^2+y^2-4} + \sqrt{9-x^2-y^2}$

13. $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x+y-2}}$

14. $z = \dfrac{y-xy^2}{\sqrt{x^2-y}}$

15. $z = \dfrac{e^{xy}}{\sqrt{x^2-16}} + \dfrac{\sqrt[3]{xy}}{x-4}$

16. $z = \ln(2+3xy) + e^{2x-y}$

17. $z = \ln(xy-4) + \dfrac{y}{x+2}$

18. $z = x\ln(12-x^2-y^2)$

19. $z = \ln(x^2+e^y) + \sqrt{y-x+1}$

20. $z = x\ln y - y\ln x + \sqrt{xy}$

21. $z = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} + \ln(x^2-y)$

V úlohách 22 – 49 určte parciálne derivácie z'_x a z'_y funkcie $z = f(x,y)$:

Výsledky:

22. $z = \dfrac{x+y}{3-x}$

$z'_x = \dfrac{y+3}{(3-x)^2}$

$z'_y = \dfrac{1}{3-x}$

23. $z = \dfrac{2y-x^2}{x+7} - \dfrac{e^x}{y-1}$

$z'_x = \dfrac{-2y-x^2-14x}{(x+7)^2} - \dfrac{e^x}{y-1}$

$z'_y = \dfrac{2}{x+7} + \dfrac{e^x}{(y-1)^2}$

24. $z = \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{y}{x+3}$

$z'_x = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2} - \dfrac{y}{(x+3)^2}$

$z'_y = \dfrac{1}{x+3}$

25. $z = \dfrac{\ln x}{x - y} + \dfrac{2}{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $z'_x = \dfrac{1 - \frac{y}{x} - \ln x}{(x-y)^2} - \dfrac{4x}{(x^2+y^2)^2}$

$z'_y = \dfrac{\ln x}{(x-y)^2} - \dfrac{4y}{(x^2+y^2)^2}$

26. $z = \dfrac{3 - y}{x^2 - y^2} + e^{x+y}$ $\qquad$ $z'_x = \dfrac{2x(y-3)}{(x^2-y^2)^2} + e^{x+y}$

$z'_y = \dfrac{-x^2 - y^2 + 6y}{(x^2-y^2)^2} + e^{x+y}$

27. $z = \dfrac{1 + x - y^2}{x^2 + y^2 - 5}$ $\qquad$ $z'_x = \dfrac{-x^2 + y^2 - 2x + 2xy^2 - 5}{(x^2+y^2-5)^2}$

$z'_y = \dfrac{-2yx^2 + 8y - 2xy}{(x^2+y^2-5)^2}$

28. $z = \sqrt{y - x + 5}$ $\qquad$ $z'_x = \dfrac{-1}{2\sqrt{y-x+5}}$

$z'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{y-x+5}}$

29. $z = \sqrt{y^2 - x}$ $\qquad$ $z'_x = \dfrac{-1}{2\sqrt{y^2-x}}$

$z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{y^2-x}}$

30. $z = \sqrt[4]{y^2 - x^2}$ $\qquad$ $z'_x = \dfrac{-x}{2\sqrt[4]{(y^2-x^2)^3}}$ $\quad$ $z'_y = \dfrac{y}{2\sqrt[4]{(y^2-x^2)^3}}$

31. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ $\qquad$ $z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

$z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

32. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 5}$ $\qquad$ $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

$z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

33. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ $\qquad$ $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-4}} - \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

$z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4}} - \dfrac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

34. $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x + y - 2}}$ $\qquad$ $z'_x = \dfrac{xy + 2y^2 - 4y}{2(x+y-2)\sqrt{x+y-2}}$

$$z'_y = \frac{xy + 2x^2 - 4x}{2(x+y-2)\sqrt{x+y-2}}$$

35. $z = \dfrac{y - xy^2}{\sqrt{x^2 - y}}$

$$z'_x = \frac{y^3 - xy}{(x^2 - y)\sqrt{x^2 - y}}$$

$$z'_y = \frac{3xy^2 + 2x^2 - y - 4x^3 y}{2(x^2 - y)\sqrt{x^2 - y}}$$

36. $z = \dfrac{e^{xy}}{\sqrt{x^2 - 16}}$

$$z'_x = \frac{e^{xy}(yx^2 - 16y - x)}{(x^2 - 16)\sqrt{x^2 - 16}}$$

$$z'_y = \frac{xe^{xy}}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

37. $z = \ln(2 + 3xy) + e^{2x-y}$

$$z'_x = \frac{3y}{2 + 3xy} + 2e^{2x-y}$$

$$z'_y = \frac{3x}{2 + 3xy} - e^{2x-y}$$

38. $z = \ln(xy - 4) + \dfrac{y}{x+2}$

$$z'_x = \frac{y}{xy - 4} - \frac{y}{(x+2)^2}$$

$$z'_y = \frac{x}{xy - 4} + \frac{1}{x+2}$$

39. $z = x\ln(12 - x^2 - y^2)$

$$z'_x = \ln(12 - x^2 - y^2) - \frac{2x^2}{12 - x^2 - y^2}$$

$$z'_y = \frac{-2xy}{12 - x^2 - y^2}$$

40. $z = \ln(x^2 + e^y) + \sqrt{y - x + 1}$

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 + e^y} - \frac{1}{2\sqrt{y - x + 1}}$$

$$z'_y = \frac{e^y}{x^2 + e^y} + \frac{1}{2\sqrt{y - x + 1}}$$

41. $z = x\ln y - y\ln x + \sqrt{xy}$

$$z'_x = \ln y - \frac{y}{x} + \frac{y}{2\sqrt{xy}}$$

$$z'_y = -\ln x + \frac{x}{y} + \frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

42. $z = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} + \ln(x^2 - y)$

$$z'_x = \frac{-y}{(x-y)^2}\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + \frac{2x}{x^2 - y}$$

$$z'_y = \frac{x}{(x-y)^2}\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} - \frac{1}{x^2 - y}$$

43. $z = xe^{2x-3y}$

$$z'_x = (1 + 2x)e^{2x-3y}$$

$$z'_y = -3xe^{2x-3y}$$

44. $z = ye^{x^2+y^2}$

$z'_x = 2xye^{x^2+y^2}$

$z'_y = (1+2y^2)e^{x^2+y^2}$

45. $z = (2x - y^3)e^{xy}$

$z'_x = (2 + 2xy - y^4)e^{xy}$

$z'_y = (-3y^2 + 2x^2 - xy^3)e^{xy}$

46. $z = \dfrac{\cos(2x-3y)}{x+2y}$

$z'_x = \dfrac{-2(x+2y)\sin(2x-3y)}{(x+2y)^2} - \dfrac{\cos(2x-3y)}{(x+2y)^2}$

$z'_y = \dfrac{3(x+2y)\sin(2x-3y)}{(x+2y)^2} - \dfrac{2\cos(2x-3y)}{(x+2y)^2}$

47. $z = \operatorname{cotg}\dfrac{x-y}{x+y}$

$z'_x = -\dfrac{2y}{(x+y)^2\sin^2\dfrac{x-y}{x+y}}$

$z'_y = \dfrac{2x}{(x+y)^2\sin^2\dfrac{x-y}{x+y}}$

48. $z = (x^2 + y)\sin xy$

$z'_x = 2x\sin xy + (yx^2 + y^2)\cos xy$

$z'_y = \sin xy + (x^3 + yx)\cos xy$

49. $z = \sqrt{x\sin y} + \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$

$z'_x = \dfrac{\sin y}{2\sqrt{x\sin y}} + \dfrac{1}{y\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}}$

$z'_y = \dfrac{x\cos y}{2\sqrt{x\sin y}} - \dfrac{x}{y^2\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}}$

50. Dokážte, že funkcia $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$ vyhovuje rovnici $f''_{xx} + 2f''_{xy} + f''_{yy} = \dfrac{2}{x-y}$.

51. Dokážte, že funkcia $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ vyhovuje rovniciam

$f'_x + f'_y = 1$

$f''_{xx}\cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$.

52. Dokážte, že funkcia $f(x,y) = xe^y + ye^x$ vyhovuje rovnici $f'''_{xxx} + f'''_{yyy} = xf'''_{xyy} + yf'''_{xxy}$.

V úlohách 53-61 určte deriváciu $\frac{dz}{dt}$ zloženej funkcie $z = f(x, y)$.

Výsledky:

53. $z = 2x - 3y, \quad x = 2t, \quad y = t + 1$ — $z' = 1$

54. $z = 2x - 3y, \quad x = e^{2t}, \quad y = e^{-5t}$ — $z' = 4e^{2t} + 15e^{-5t}$

55. $z = 2x - 3y, \quad x = \ln t, \quad y = \frac{1}{t}$ — $z' = \frac{2}{t} + \frac{3}{t^2}$

56. $z = \sqrt{xy}, \quad x = 2t, \quad y = t + 1$ — $z' = \frac{2t+1}{\sqrt{2t^2 + 2t}}$

57. $z = \sqrt{xy}, \quad x = e^{2t}, \quad y = 1 - e^{-5t}$ — $z' = \frac{2e^{2t} + 3e^{-3t}}{2\sqrt{e^{2t} - e^{-3t}}}$

58. $z = \sqrt{xy}, \quad x = \ln t, \quad y = \frac{1}{t}$ — $z' = \frac{1 - \ln t}{2t^2 \sqrt{\frac{\ln t}{t}}}$

59. $z = y \ln x, \quad x = 2t, \quad y = t + 1$ — $z' = \ln 2t + \frac{t+1}{t}$

60. $z = y \ln x, \quad x = e^{2t}, \quad y = e^{-5t}$ — $z' = e^{-5t}(-10t + 2)$

61. $z = y \ln x, \quad x = \ln t, \quad y = \frac{1}{t}$ — $z' = \frac{1 - (\ln t)\ln(\ln t)}{t^2 \ln t}$

V úlohách 62-67 určte driváciu z'_u a z'_v zloženej funkcie $z = f(x, y)$.

Výsledky:

62. $z = x^2 y - y^2 x, \quad x = u + v, \quad y = \frac{u}{v}$ — $z'_u = \frac{3u^2}{v} + 4u + v - \frac{3u^2}{v^2} - \frac{2u}{v}$

$z'_v = \frac{-u^3}{v^2} + u + \frac{2u^3}{v^3} + \frac{u^2}{v^2}$

63. $z = x^2 y - y^2 x, \quad x = e^u, \quad y = e^{1-v}$ — $z'_u = 2e^{2u+1-v} - e^{u+2-2v}$

$z'_v = -e^{2u+1-v} + 2e^{u+2-2v}$

64. $z = x^2 y - y^2 x, \quad x = \ln(u + v), \quad y = \frac{1}{u+v}$

$$z'_u = z'_v = \frac{\ln(u+v)^2 - \ln^2(u+v)}{(u+v)^2} -$$
$$-\frac{1-\ln(u+v)^2}{(u+v)^3}$$

65. $z = \dfrac{\sqrt{x}}{y}, \quad x = (2u+v)^2, \quad y = v-u$

$$z'_u = \frac{3v}{(v-u)^2}$$
$$z'_v = \frac{-3u}{(v-u)^2}$$

66. $z = \dfrac{\sqrt{x}}{y}, \quad x = e^{4u-2v}, \quad y = uv$

$$z'_u = \frac{e^{2u-v}(2u-1)}{u^2 v}$$
$$z'_v = \frac{-e^{2u-v}(v+1)}{uv^2}$$

67. $z = \dfrac{\sqrt{x}}{y}, \quad x = u-v, \quad y = \sqrt{2u+v}$

$$z'_u = \frac{3v}{2(2u+v)^2\sqrt{\dfrac{u-v}{2u+v}}}$$
$$z'_v = \frac{-3u}{2(2u+v)^2\sqrt{\dfrac{u-v}{2u+v}}}$$

V úlohách 68-106 určte kritické body, klasifikujte ich ako lokálne maximá, lokálne minimá a sedlové body.

Výsledky:

68.	$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$	lok. max. v $[0,0]$
69.	$f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$	lok. max. v $[0,0]$
70.	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3$	lok. min. v $[0,0]$
71.	$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$	lok. min. v $[0,0]$
72.	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 3$	lok. min. v $[1,0]$
73.	$f(x,y) = x^2 + y^2 + 4y + 1$	lok. min. v $[0,-2]$
74.	$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 - 2x$	lok. max. v $[-1,0]$
75.	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8$	lok. min. v $[2,-2]$

76. $f(x,y)=1-x^2-y^2+6x+2y$ lok. max. v $[3,1]$

77. $f(x,y)=x^2+y^2+yx+5x-5y+3$ lok. min. v $[-5,5]$

78. $f(x,y)=x^2+y^2-4xy-6y$ sedl. bod v $[-2,-1]$

79. $f(x,y)=x^2+y^2+xy-4y+10x$ lok. min. v $[-8,6]$

80. $f(x,y)=x^2+y^2+6xy+16x$ sedl. bod v $[1,-3]$

81. $f(x,y)=24-x^2-y^2+yx+36y$ lok. max. v $[12,24]$

82. $f(x,y)=46-x^2-4y^2+2yx$ lok. max. v $[0,0]$

83. $f(x,y)=x^2+10y^2+5xy+8x-40y$ lok. min v $[-24,8]$

84. $f(x,y)=x^3+y^3-18xy+215$ sedl. bod v $[0,0]$
lok. min. v $[6,6]$

85. $f(x,y)=x^3+8y^3-6xy+1$ sedl. bod v $[0,0]$
lok. min. v $[1,1/2]$

86. $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$ sedl. bod v $[0,0]$
lok. max. v $[-1,-1]$

87. $f(x,y)=x^3+y^2-6xy+9x+5y+2$ sedl. bod v $[2,7/2]$
lok. min. v $[4,19/2]$

88. $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2y-y$ sedl. bod v $\left[\frac{2}{\sqrt{15}},-\frac{1}{\sqrt{15}}\right]$
sedl. bod v $\left[-\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}}\right]$
lok. min. v $\left[0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$
lok. max. v $\left[0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

89. $f(x,y)=2x^3+y^3+3x^2-3y-12x-4$ sedl. bod v $[-2,1]$
sedl. bod v $[1,-1]$
lok. min. v $[1,1]$

		lok. max. v $[-2,-1]$
90.	$f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 18x - 30y$	sedl. bod v $[3,1]$ sedl. bod v $[-3,-1]$ lok. min. v $[1,3]$ lok. max. v $[-1,-3]$
91.	$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$	o extréme v $[0,0]$ nevieme rozhodnúť lok. min. v $[\sqrt{2},-\sqrt{2}]$ lok. min. v $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$
92.	$f(x,y) = x^4 + 2y^2 + 4xy$	sedl. bod v $[0,0]$ lok. min. v $[1,-1]$ lok. min. v $[-1,1]$
93.	$f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$	lok. min. v $[1/2,-1]$
94.	$f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$	lok. min. v $[-2,0]$
95.	$f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$	sedl. bod v $[0,0]$ lok. max. v $[-4,-2]$
96.	* $f(x,y) = e^{x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$	sedl. bod v $[0,-1]$ sedl. bod v $[0,1]$ lok. min. v $[0,0]$
97.	* $f(x,y) = e^{x^2-y^2}(x^2 + y^2)$	sedl. bod v $[0,-1]$ sedl. bod v $[0,1]$ lok. min. v $[0,0]$
98.	* $f(x,y) = e^{x^2-y^2}(3x^2 + y^2)$	sedl. bod v $[0,-1]$ sedl. bod v $[0,1]$ lok. min. v $[0,0]$
99.	$f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$	lok. max. v $[4,4]$
100.	$f(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$	lok. min. v $[2,4]$
101.	$f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$	lok. min. v $[5/2,4/5]$

102.	$f(x,y)=x+y+\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$	sedl. bod v $[1,-2]$ sedl. bod v $[-1,2]$ lok. min. v $[1,2]$ lok. max. v $[-1,-2]$
103.	$f(x,y)=xy-\frac{2}{x}-\frac{4}{y}$	lok. min. v $[-1,-2]$
104.	$f(x,y)=y+\frac{8}{x}+\frac{x}{y}$	lok. min. v $[4,2]$
105.	$f(x,y)=xy+\ln x+y^2$	sedl. bod v $\left[\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
106.	$f(x,y)=2x^2+y^2-\ln(xy^2)$	lok. min. v $\left[\frac{1}{2},1\right]$ lok. min. v $\left[\frac{1}{2},-1\right]$

V úlohách 107-129 určte viazané extrémy funkcie $z=f(x,y)$, ak je daná väzba $g(x,y)$.

		Výsledky:
107.	$f(x,y)=4-x^2-y^2$, ak $x+y=0$	lok. max. v $[0,0]$
108.	$f(x,y)=x^2+y^2-2x+2$, ak $x-y=1$	lok. min. v $[1,0]$
109.	$f(x,y)=x^2+y^2+4y+1$, ak $x-y=2$	lok. min. v $[0,-2]$
110.	$f(x,y)=4-x^2-y^2-2x$, ak $y-x=1$	lok. max. v $[-1,0]$
111.	$f(x,y)=x^2+y^2-4x+4y+8$, ak $x+y=0$	lok. min. v $[2,-2]$
112.	$f(x,y)=1-x^2-y^2+6x+2y$, ak $x-3y=0$	lok. max. v $[3,1]$
113.	$f(x,y)=x^2+y^2+yx+5x-5y+3$, ak $y-x=10$	lok. min. v $[-5,5]$
114.	$f(x,y)=46-x^2-4y^2+2yx$, ak $x-2y=0$	lok. max. v $[0,0]$
115.	$f(x,y)=x^3+y^3-18xy+215$, ak $x-y=0$	lok. min. v $[6,6]$ lok. max. v $[0,0]$

116. $f(x,y)=x^3+8y^3-6xy+1$, ak $2y-x=0$ — lok. min. v $[1,1/2]$; lok. max. v $[0,0]$

117. $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$, ak $y-x=0$ — lok. min v $[0,0]$; lok. max. v $[-1,-1]$

118. $f(x,y)=x^3+y^3+xy$, ak $x+y=4$ — lok. min. v $[2,2]$

119. $f(x,y)=2xy-2x^2-4y^2$, ak $x+2y=8$ — lok. max. v $[3,5/2]$

120. $f(x,y)=2x^2+y^2-xy$, ak $2x+y=8$ — lok. min. v $[5/2,3]$

121. $f(x,y)=x+2y$, ak $x^2+y^2=5$ — lok. min. v $[-1,-2]$; lok. max. v $[1,2]$

122. $f(x,y)=8-2x-4y$, ak $x^2+2y^2=12$ — lok. min. v $[2,2]$; lok. max. v $[-2,-2]$

123. $f(x,y)=16-10x-24y$, ak $x^2+y^2=169$ — lok. min. v $[5,12]$; lok. max. v $[-5,-12]$

124. $f(x,y)=x-2y+3$, ak $x^2+y^2=5$ — lok. min. v $[-1,2]$; lok. max. v $[1,-2]$

125. $f(x,y)=y-x+3$, ak $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ — lok. min. v $[1/2,-1/2]$; lok. max. v $[-1/2,1/2]$

126. * $f(x,y)=xy$, ak $x^2+y^2=1$ — lok. min. v $[\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2]$; lok. min. $[-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2]$; lok. max. $[-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2]$; lok. max. $[\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2]$

127. * $f(x,y)=8x^2-24xy+y^2$, ak $x^2+y^2=1$ — lok. max. v $[3/5,4/5]$; lok. max. v $[-3/5,-4/5]$; lok. min. v $[4/5,-3/5]$; lok. min. v $[-4/5,3/5]$

128. $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, ak $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2$ — lok. min. v $[-1,-1]$; lok. max. v $[1,1]$

129. $f(x,y) = x + y$, ak $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$ — lok. min. v $[1,1]$

lok. max. v $[-1,-1]$

V úlohách 130-136 nájdite úplný diferenciál funkcie.

Výsledky:

130. $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2$ — $df = 2(x-y)dx - 2(x+3y)dy$

131. $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ — $df = 2(x-y)dx + 2(y-x)dy$

132. $f(x,y) = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$ — $df = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y + 8y^3)dy$

133. $f(x,y) = e^{xy}$ — $df = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy$

134. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ — $df = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy$

135. $f(x,y) = \sqrt{26 - x^2 - y^2}$ — $df = \frac{-x}{\sqrt{26-x^2-y^2}}dx - \frac{y}{\sqrt{26-x^2-y^2}}dy$

136. $f(x,y) = x^y$ — $df = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy$

V úlohách 137-140 vypočítajte približne pomocou diferenciálu.

Výsledky:

137. $e^{0{,}01 \cdot 0{,}98}$ — 1,01

138. $\ln(0{,}01^2 + 0{,}98^2)$ — -0,04

139. $\sqrt{26 - 3{,}02^2 - 1{,}01^2}$ — 3,9825

140. $0{,}98^{2{,}99}$ — 0,94

V úlohách 141-151 nájdite deriváciu y' implicitnej funkcie.

		Výsledky:
141.	$y^2 - 3x^2 + 5 = 0$	$y' = \frac{3x}{y}$
142.	$2x^3 y - x^3 + 5 = 0$	$y' = \frac{3-6y}{2x}$
143.	$x - \ln y - y^2 = 0$	$y' = \frac{y}{1+2y^2}$
144.	$xy + \ln y + \ln x - 1 = 0$	$y' = -\frac{y}{x}$
145.	$\ln(xy) - y^2 + 1 = 0$	$y' = \frac{y}{x(2y^2-1)}$
146.	$x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) - 16 = 0$	$y' = -\frac{x}{y}$
147.	$1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$	$y' = -\frac{y}{x}$
148.	$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$	$y' = -\frac{x}{y}$
149.	$e^y - x + y + 3 = 0$	$y' = \frac{1}{1+e^y}$
150.	$xe^y - y - x^2 + 2 = 0$	$y' = \frac{2x - e^y}{xe^y - 1}$
151.	$x + y - e^{x+y} = 0$	$y' = -1$

6 APLIKÁCIE FUNKCIE DVOCH PREMENNÝCH

6.1 Otázky

- Definujte pojem produkčná funkcia.
- Definujte pojem marginálny produkt.

6.2 Produkčná funkcia a marginálny produkt

Definícia 6.1 Ak v ekonomickom procese počet jednotiek výstupu Q závisí od premenných vstupov x_1, x_2, potom takúto funkciu $Q = Q(x_1, x_2)$ nazývame ***produkčná funkcia.***

Poznámka V ekonomike je známa ***Cobbova-Douglasova produkčná funkcia***

$$Q = Q(K, L) = AK^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

kde A, α sú kladné konštanty, $0 < \alpha < 1$, K je veľkosť kapitálu, L je veľkosť pracovnej sily.

Definícia 6.2 Majme danú produkčnú funkciu $Q = Q(x_1, x_2)$. Pod ***marginálnym (hraničným) produktom*** $MQ_i(x_1, x_2)$ vzhľadom na vstup x_i rozumieme veľkosť dodatočného produktu, ktorý vznikne zväčšením množstva x_i práve o jednotku pri nezmenenej hodnote druhého vstupu.

Platí

$$MQ_1 = Q(x_1 + 1, x_2) - Q(x_1, x_2) \doteq \frac{\partial Q(x_1, x_2)}{\partial x_1},$$

$$MQ_2 = Q(x_1, x_2 + 1) - Q(x_1, x_2) \doteq \frac{\partial Q(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

Príklad 6.1 Podľa odhadu je zisk z predaja 2 druhov džúsu daný funkciou $P(x, y) = (x-30)(70-5x+4y)+(y-40)(80+6x-7y)$ centov, x je cena prvého a y je cena druhého druhu. Prvý druh sa predáva po 50 centov za plechovku a druhý po 52 centov za plechovku. Použijeme marginálnu analýzu na odhad zmeny denného zisku, ak obchodník zvýši cenu druhého džúsu o 1 cent a cenu prvého ponechá nezmenenú.

Riešenie:

Odhad zmeny zisku určíme pomocou vzťahu

$$MP_y = P(x, y+1) - P(x, y) \doteq \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = P(50, 52+1) - P(50, 52) = \left[\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right]_{[50,52]} =$$

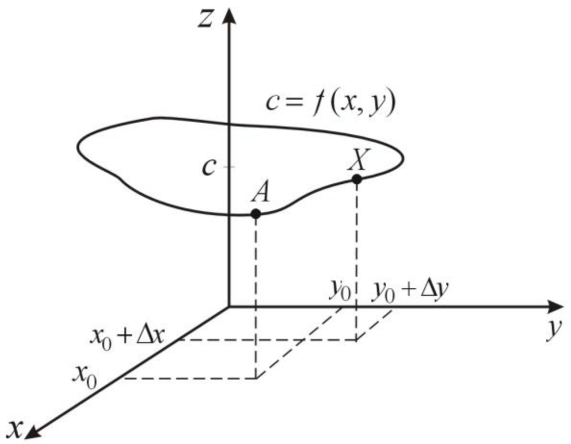
$$= [(x-30)\cdot 4 + 80 + 6x - 7y - (y-40)\cdot 7]_{[50,52]} = 12$$

Denný zisk sa navýši o 12 centov.

6.3 Hladinové krivky v ekonómii

Majme funkciu $z = f(x, y)$ a jej hladinovú krivku $c = f(x, y)$. Nech bod $A = [x_0, y_0]$ leží na hladinovej krivke.

Ak zmeníme hodnotu premennej x z hodnoty x_0 na hodnotu $x_1 = x_0 + \Delta x$, ako musíme zmeniť hodnotu premennej y z hodnoty y_0 na hodnotu $y_1 = y_0 + \Delta y$, aby nový bod $X = [x_1, y_1]$ opäť ležal na hladinovej krivke.



Pre približný výpočet hodnoty funkcie v bode X platí

$$f(X) \doteq f(A) + df(A, X)$$
$$c \doteq c + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y,$$

odkiaľ

$$\Delta y \doteq -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} \cdot \Delta x.$$

Príklad 6.2 Pri použití x hodín kvalifikovanej a y hodín nekvalifikovanej práce sa vyrobí $f(x, y) = 10x \cdot y^{\frac{1}{2}}$ kusov výrobkov. Obvykle sa používa 30 hodín kvalifikovanej a 36 hodín nekvalifikovanej práce. Odhadnime, o koľko hodín má znížiť výrobca počet hodín nekvalifikovanej práce, ak zvýši počet hodín kvalifikovanej práce o 1 hodinu, aby produkcia ostala na rovnakej úrovni.

Riešenie:

Zmenu počtu hodín nekvalifikovanej práce odhadneme pomocou vzťahu

$$\Delta y \doteq -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} \cdot \Delta x = -\frac{f'_x(30, 36)}{f'_y(30, 36)} \cdot 1 = -\left[\frac{10 \cdot y^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot x \cdot y^{-\frac{1}{2}}}\right]_{[30,36]} = -2{,}4 .$$

Aby ostala veľkosť produkcie nezmenená, musíme počet hodín nekvalifikovanej práce znížiť o 2,4.

6.4 Percentuálna zmena a jej odhad pomocou diferenciálu

Ak uvažujeme funkciu $z = f(x, y)$, ktorej hodnota sa zmení o Δz, potom podiel

$\frac{\Delta z}{z}$ je ***relatívna zmena*** veličiny, $PZV = \frac{\Delta z}{z} \cdot 100\,\%$ je ***percentuálna zmena*** veličiny.

Ak Δz nahradíme diferenciálom, potom vypočítame približnú percentuálnu zmenu veličiny v bode A

$$PZV \doteq \frac{z'_x(A)\cdot \Delta x + z'_y(A)\cdot \Delta y}{z} \cdot 100\%.$$

Príklad 6.3 Produkcia spoločnosti je $Q(K, L) = 60K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{3}}$ jednotiek, kde K je kapitálová investícia v tisícoch dolárov a L je veľkosť pracovnej sily v hodinách. Použime diferenciál na odhad percentuálnej zmeny produkcie pri zvýšení kapitálovej investície o 1% a počtu hodín o 2%.

Riešenie:

$\Delta K = 0{,}01K,\ \Delta L = 0{,}02L$

$$PZV \doteq \frac{Q'_K \cdot \Delta K + Q'_L \cdot \Delta L}{Q} \cdot 100\% = \frac{30K^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}} \cdot 0{,}01K + 20K^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{2}{3}} \cdot 0{,}02L}{60K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}}} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{0{,}3K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}} + 0{,}4K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}}}{60K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}}} \cdot 100\% = \frac{0{,}7}{60} \cdot 100\% \doteq 1{,}167\%.$$

Pri zadaných podmienkach sa produkcia zvýši o $1{,}167\,\%$.

6.5 Aplikácie lokálnych extrémov v ekonómii

V ekonómii sa stretávame s úlohami, v ktorých je potrebné napríklad maximalizovať príjmy, zisky, produkciu alebo minimalizovať náklady.

Príklad 6.4 Predajňa liehovín predáva 2 druhy vína z Kalifornie a z New Yorku, nakupuje ho po 2 doláre za fľašu. Odhaduje, že ak víno z Kalifornie bude predávať po x dolárov a víno z New Yorku po y dolárov za fľašu, spotrebitelia nakúpia $40 - 50x + 40y$ fliaš z Kalifornie a $20 + 60x - 70y$ fliaš z New Yorku. Ako má majiteľ stanoviť cenu jednotlivých druhov vína, aby dosiahol maximálny zisk?

Riešenie:

Funkcia príjmov je $R(x,y) = x(40-50x+40y)+y(20+60x-70y)$,
funkcia nákladov je $C(x,y) = 2(40-50x+40y)+2(20+60x-70y)$, potom
funkcia zisku je $P(x,y) = R(x,y) - C(x,y)$, čiže

$$P(x,y) = (x-2)(40-50x+40y)+(y-2)(20+60x-70y)\ .$$

Hľadáme extrémy vytvorenej funkcie

$P'_x = -100x+100y+20$
$P'_y = 100x-140y+80$

zotavíme príslušnú sústavu rovníc,
$P'_x = 0$
$P'_y = 0$,
ktorej riešením je jediný bod $A = [2{,}7;\ 2{,}5]$.

Využitím Vety 5.2 overíme extrémy v stacionárnom bode.
$P''_{xx} = -100$
$P''_{xy} = 100$
$P''_{yx} = 100$
$P''_{yy} = -140$

Pre stacionárny bod platí: $D_2(A) = \begin{vmatrix} -100 & 100 \\ 100 & -140 \end{vmatrix} = 4\,000 > 0 \wedge D_1(A) = -100 < 0 \quad \Rightarrow$ v bode A je lokálne maximum a $P(A) = 7$.

Maximálny denný zisk z predaja sa dosiahne pri stanovení ceny za víno z Kalifornie na 2,7 dolára a víno z New Yorku na 2,5 dolára za fľašu. Pri týchto cenách bude denný zisk 7 dolárov.

Príklad 6.5 Uvažujeme o dvoch projektoch. Do prvého projektu investujeme x miliónov eur, do druhého projektu investujeme y miliónov eur. Odhad príjmov z oboch projektov je daný funkciou $R(x,y) = x^2y$, pričom máme k dispozícii 9 miliónov eur. Ako stanoviť hodnoty investícií x a y, aby sme dosiahli z projektov maximálny príjem?

Riešenie:

Hľadáme viazané lokálne maximum funkcie $R(x,y) = x^2y$, ak je daná väzba $x+y=9$.
Z väzby sa dá vyjadriť hociktorá premenná. Po vyjadrení premennej z väzby a následnom dosadení do funkcie, dostaneme funkciu 1 premennej, ktorej extrém budeme hľadať.

$y = 9-x \Rightarrow R(x) = x^2(9-x) = 9x^2 - x^3$

$R' = 9x - 3x^2$,

$R' = 0 \Leftrightarrow 9x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

Z ekonomického hľadiska stacionárny bod $x = 0$ nemá zmysel.
Overíme extrém v stacionárnom bode $x = 3$.

$R'' = 9 - 6x \Rightarrow R''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$ v bode $x = 3$ je lokálne maximum.

Z väzby dopočítame súradnicu $y = 9 - x = 6$.
Maximálny príjem dosiahneme, ak do prvého projektu investujeme 3 milióny dolárov a do druhého projektu 6 miliónov dolárov.

6.6 Úlohy

1. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K, L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 900 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 1 000 hodín denne. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie kapitálovej investície o 1 000 eur na dennú produkciu podniku, ak sa veľkosť pracovnej sily nezmení.

zvýšenie o 10 j.

2. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K, L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 900 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 1 000 hodín denne. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie pracovnej sily o 1 hodinu na dennú produkciu podniku, ak sa veľkosť kapitálovej investície nezmení.

zvýšenie o 6 j.

3. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K, L) = 120K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 8 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 3 375 hodín denne. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie kapitálovej investície o 1 000 eur na dennú produkciu podniku, ak sa veľkosť pracovnej sily nezmení.

zvýšenie o 2 250 j.

4. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K, L) = 120K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 8 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 3 375 hodín denne. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie pracovnej sily o 1 hodinu na dennú produkciu podniku, ak sa veľkosť kapitálovej investície nezmení.

zvýšenie o 32/3 j.

5. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=80K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 81 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 10 000 hodín denne. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie kapitálovej investície o 1 000 eur na dennú produkciu podniku, ak sa veľkosť pracovnej sily nezmení.

zvýšenie o 200 j.

6. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=80K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 81 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 10 000 hodín denne. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie pracovnej sily o 1 hodinu na dennú produkciu podniku, ak sa veľkosť kapitálovej investície nezmení.

zvýšenie o 0,54 j.

7. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=120K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 225 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 125 hodín denne. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie kapitálovej investície o 1 000 eur na dennú produkciu podniku, ak sa veľkosť pracovnej sily nezmení.

zvýšenie o 20 j.

8. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=120K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 225 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 125 hodín denne. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie pracovnej sily o 1 hodinu na dennú produkciu podniku, ak sa veľkosť kapitálovej investície nezmení.

zvýšenie o 24 j.

9. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=60K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 4 096 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 256 hodín denne. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie kapitálovej investície o 1 000 eur na dennú produkciu podniku, ak sa veľkosť pracovnej sily nezmení.

zvýšenie o 1,875 j.

10. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=60K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 4 096 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 256 hodín denne. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie pracovnej sily o 1 hodinu na dennú produkciu podniku, ak sa veľkosť kapitálovej investície nezmení.

zvýšenie o 90 j.

11. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch modelov topánok daný funkciou $P(x,y)=(x-30)(70-5x+4y)+(y-40)(80+6x-7y)$ eur, kde x je cena prvého modelu a y je cena druhého modelu v eurách za jeden kus. Cena prvého modelu je 50 eur a cena druhého modelu je 52 eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie ceny prvého modelu o 1 euro, ak sa cena druhého modelu nezmení.

nič sa nezmení

12. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch modelov topánok daný funkciou $P(x,y)=(x-30)(70-5x+4y)+(y-40)(80+6x-7y)$ eur, kde x je cena prvého modelu a y je cena druhého modelu v eurách za jeden kus. Cena prvého modelu je 50 eur a cena druhého modelu je 52 eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie ceny druhého modelu o 1 euro, ak sa cena prvého modelu nezmení.

zvýšenie o 12 €

13. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch lámp daný funkciou $P(x,y)=(x-20)(60-3x+5y)+(y-25)(70+2x-2y)$ eur, kde x je cena prvej lampy a y je cena druhej lampy v eurách za jeden kus. Cena prvej lampy je 35 eur a cena druhej je 40 eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie ceny prvej lampy o 1 euro, ak sa cena druhej nezmení.

zvýšenie o 140 €

14. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch lámp daný funkciou $P(x,y)=(x-20)(60-3x+5y)+(y-25)(70+2x-2y)$ eur, kde x je cena prvej lampy a y je cena druhej lampy v eurách za jeden kus. Cena prvej lampy je 35 eur a cena druhej je 40 eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie ceny druhej lampy o 1 euro, ak sa cena prvej nezmení.

zvýšenie o 105 €

15. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch druhov dámskych kabeliek daný funkciou $P(x,y)=(x-10)(30-2x+3y)+(y-20)(40+x-y)$ eur, kde x je cena prvej kabelky a y je cena druhej kabelky v eurách za jeden kus. Cena prvej kabelky je 20 eur a cena druhej je 40 eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie ceny prvej kabelky o 1 euro, ak sa cena druhej nezmení.

zvýšenie o 110 €

16. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch druhov dámskych kabeliek daný funkciou $P(x,y)=(x-10)(30-2x+3y)+(y-20)(40+x-y)$ eur, kde x je cena prvej kabelky a y je cena druhej kabelky v eurách za jeden kus. Cena prvej kabelky je 20 eur a cena druhej je 40 eur. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie ceny druhej kabelky o 1 euro, ak sa cena prvej nezmení.

zvýšenie o 30 €

17. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch druhov kávy daný funkciou $P(x,y)=(x-3)(10-x+2y)+(y-1)(15+2x-y)$ eur, kde x je cena prvého druhu kávy a y je cena druhého druhu kávy v eurách za jeden kus. Cena prvého druhu kávy je 5 eur a cena druhého druhu je 3 eurá. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie ceny prvého druhu kávy o 1 euro, ak sa cena druhého druhu nezmení.

zvýšenie o 13 €

18. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch druhov kávy daný funkciou $P(x,y)=(x-3)(10-x+2y)+(y-1)(15+2x-y)$ eur, kde x je cena prvého druhu kávy a y je cena druhého druhu kávy v eurách za jeden kus. Cena prvého druhu kávy je 5 eur a cena druhého druhu je 3 eurá. Použite marginálnu analýzu na odhad efektu, ktorý bude mať zvýšenie ceny druhého druhu kávy o 1 euro, ak sa cena prvého druhu nezmení.

zvýšenie o 24 €

19. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 900 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 1 000 hodín denne. Použite totálny diferenciál na odhad zmeny produkcie pri zvýšení kapitálovej investície o 2 000 eur a zvýšení počtu pracovných hodín o 1.

zvýšenie o 26 j.

20. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=120K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 8 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 3 375 hodín denne. Použite totálny diferenciál na odhad zmeny produkcie pri zvýšení kapitálovej investície o 500 eur a znížení počtu pracovných hodín o 1.

zvýšenie o 3 343/3 j.

21. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=80K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 81 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 10 000 hodín denne. Použite totálny diferenciál na odhad zmeny produkcie pri zvýšení kapitálovej investície o 500 eur a zvýšení počtu pracovných hodín o 0,5.

zvýšenie o 100,27 j.

22. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=120K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 225 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 125 hodín denne. Použite totálny diferenciál na odhad zmeny produkcie pri znížení kapitálovej investície o 500 eur a zvýšení počtu pracovných hodín o 1.

zvýšenie o 14 j.

23. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=60K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 4 096 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 256 hodín denne. Použite totálny diferenciál na odhad zmeny produkcie pri zvýšení kapitálovej investície o 1 000 eur a zvýšení počtu pracovných hodín o 1.

zvýšenie o 91,875 j.

24. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch modelov topánok daný funkciou $P(x,y)=(x-30)(70-5x+4y)+(y-40)(80+6x-7y)$ eur, kde x je cena prvého modelu a y je cena druhého modelu v eurách za jeden kus. Cena prvého modelu je 50 eur a cena druhého modelu je 52 eur. Použite totálny diferenciál na odhad zmeny zisku pri zvýšení ceny prvého modelu o 1 euro a zvýšení ceny druhého modelu o 2 eurá.

zvýšenie o 24 eur

25. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch lámp daný funkciou $P(x,y)=(x-20)(60-3x+5y)+(y-25)(70+2x-2y)$ eur, kde x je cena prvej lampy a y je cena druhej lampy v eurách za jeden kus. Cena prvej lampy je 35 eur a cena druhej je 40 eur. Použite totálny diferenciál na odhad zmeny zisku pri zvýšení ceny prvej lampy o 2 eurá a znížení ceny druhej o 2 eurá.

zvýšenie o 70 €

26. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch druhov dámskych kabeliek daný funkciou $P(x,y)=(x-10)(30-2x+3y)+(y-20)(40+x-y)$ eur, kde x je cena prvej kabelky a y je cena druhej kabelky v eurách za jeden kus. Cena prvej kabelky je 20 eur a cena druhej je 40 eur. Použite totálny diferenciál na odhad zmeny zisku pri zvýšení ceny prvej kabelky o 1 euro a zvýšení ceny druhej kabelky o 2 eurá.

zvýšenie o 170 €

27. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch druhov kávy daný funkciou $P(x,y)=(x-3)(10-x+2y)+(y-1)(15+2x-y)$ eur, kde x je cena prvého druhu kávy a y je cena druhého druhu kávy v eurách za jeden kus. Cena prvého druhu kávy je 5 eur a cena druhého druhu je 3 eurá. Použite totálny diferenciál na odhad zmeny zisku pri zvýšení ceny prvého druhu o 50 centov a zvýšení ceny druhého druhu takisto o 50 centov.

zvýšenie o 18,5 €

28. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 900 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 1 000 hodín denne. Použite diferenciál na odhad:

a) o koľko hodín sa má znížiť pracovná sila, ak sa zvýši kapitálová investícia o 600 eur,

b) o koľko tisíc eur sa má znížiť kapitálová investícia, ak sa počet pracovných hodín zvýši o 10

tak, aby sa celková produkcia nezmenila.

a) 1 hodina, **b)** 6 tisíc €

29. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=120K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 8 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 3 375 hodín denne. Použite diferenciál na odhad:

a) o koľko hodín sa má znížiť pracovná sila, ak sa zvýši kapitálová investícia o 320 eur,

b) o koľko tisíc eur sa má znížiť kapitálová investícia, ak sa počet pracovných hodín zvýši o 135

tak, aby sa celková produkcia nezmenila.

a) 67,5 hodín, **b)** 640 €

30. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=80K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 81 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 10 000 hodín denne. Použite diferenciál na odhad:

a) o koľko hodín sa má zvýšiť pracovná sila, ak sa zníži kapitálová investícia o 5 400 eur,

b) o koľko tisíc eur sa má znížiť kapitálová investícia, ak sa počet pracovných hodín zvýši o 100

tak, aby sa celková produkcia nezmenila.

a) 2 000 hodín, **b)** 270 €

31. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=120K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 225 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 125 hodín denne. Použite diferenciál na odhad:

a) o koľko hodín sa má znížiť pracovná sila, ak sa zvýši kapitálová investícia o 6 tisíc eur,

b) o koľko tisíc eur sa má zvýšiť kapitálová investícia, ak sa počet pracovných hodín zníži o 2

tak, aby sa celková produkcia nezmenila.

a) 5 hodín, **b)** 2 400 €

32. Denná produkcia určitého podniku je daná funkciou $Q(K,L)=60K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$, kde K je kapitálová investícia v tisícoch eur a L je veľkosť pracovnej sily v pracovných hodinách. Nech kapitálová investícia je 4 096 tisíc eur a veľkosť pracovnej sily je 256 hodín denne. Použite diferenciál na odhad:

a) o koľko hodín sa má zvýšiť pracovná sila, ak sa zníži kapitálová investícia o 360 tis. eur,

b) o koľko tisíc eur sa má zvýšiť kapitálová investícia, ak sa počet pracovných hodín zníži o 10,

tak, aby sa celková produkcia nezmenila.

a) 7,5 hodiny, **b)** 480 tisíc €

33. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch lámp daný funkciou $P(x,y)=(x-20)(60-3x+5y)+(y-25)(70+2x-2y)$ eur, kde x je cena prvej lampy a y je cena druhej lampy v eurách za jeden kus. Cena prvej lampy je 35 eur a cena druhej je 40 eur. Použite diferenciál na odhad:

a) o koľko eur sa má zvýšiť cena prvej lampy, ak sa zníži cena druhej o 7 eur,

b) o koľko eur sa má zvýšiť cena druhej lampy, ak sa zníži cena prvej o 5 eur,

tak, aby sa celkový zisk nezmenil.

a) 5,25 €, **b)** 20/3 €

34. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch druhov dámskych kabeliek daný funkciou $P(x,y)=(x-10)(30-2x+3y)+(y-20)(40+x-y)$ eur, kde x je cena prvej kabelky a y je cena druhej kabelky v eurách za jeden kus. Cena prvej kabelky je 20 eur a cena druhej je 40 eur. Použite diferenciál na odhad:

a) o koľko eur sa má znížiť cena prvej kabelky, ak sa zvýši cena druhej o 5,5 eur,

b) o koľko eur sa má znížiť cena druhej kabelky, ak sa zvýši cena prvej o 3 eurá, tak, aby sa celkový zisk nezmenil.

a) 1,5 €, **b)** 11 €

35. Podľa zistení predajne je zisk z predaja dvoch druhov kávy daný funkciou $P(x,y)=(x-3)(10-x+2y)+(y-1)(15+2x-y)$ eur, kde x je cena prvého druhu kávy a y je cena druhého druhu kávy v eurách za jeden kus. Cena prvého druhu kávy je 5 eur a cena druhého druhu je 3 eurá. Použite diferenciál na odhad:

a) o koľko eur sa má znížiť cena prvej kávy, ak sa zvýši cena druhej o 1,3 eura,

b) o koľko eur sa má zvýšiť cena druhej kávy, ak sa zníži cena prvej o 60 centov, tak, aby sa celkový zisk nezmenil.

a) 2,4 €, **b)** 0,325 €

36. Týždenný zisk z predaja dvoch značiek televízorov, pričom sa predáva x kusov prvej značky televízorov a y kusov druhej značky televízorov, je daný funkciou $P(x,y)=75+50x-x^2+60y-y^2$. Aké množstvo televízorov oboch značiek je potrebné predať, aby bol týždenný zisk maximálny?

$x=25,\ y=30$

37. Mesačný zisk z predaja dvoch značiek áut, pričom sa predáva x kusov prvej značky áut a y kusov druhej značky áut, je daný funkciou $P(x,y)=16+10x-x^2+14y-y^2$. Aké množstvo áut oboch značiek je potrebné predať, aby bol mesačný zisk maximálny?

$x=5,\ y=7$

38. Týždenný zisk z predaja dvoch druhov topánok, pričom sa predáva x kusov prvého druhu topánok a y kusov druhého druhu topánok, je daný funkciou $P(x,y)=60+24x-x^2+28y-y^2$. Aké množstvo topánok oboch druhov je potrebné predať, aby bol týždenný zisk maximálny?

$x=12,\ y=14$

39. Denný zisk z predaja dvoch značiek čajov, pričom sa predáva x kusov prvej značky čajov a y kusov druhej značky čajov, je daný funkciou $P(x,y)=106+40x-4x^2+72y-9y^2$. Aké množstvo čajov oboch značiek je potrebné predať, aby bol denný zisk maximálny?

$x=5,\ y=4$

40. Zisk z predaja dvoch značiek parfumov, pričom sa predáva x kusov prvej značky a y kusov druhej značky, je daný funkciou $P(x,y)=75+30x-x^2+40y-y^2$. Aké množstvo parfumov oboch značiek je potrebné predať, aby bol zisk maximálny?

$x=15,\ y=20$

41. Ročný zisk z predaja dvoch značiek detských kočiarov, pričom sa predáva x kusov prvej značky kočiarov a y kusov druhej značky, je daný funkciou $P(x,y)=100x-0{,}01x^2+60y-0{,}25y^2$. Aké množstvo kočiarov oboch značiek je potrebné predať, aby bol ročný zisk maximálny?

$x=5000,\ y=120$

42. Zisk z predaja dvoch značiek horských bicyklov, pričom sa predáva x kusov prvej značky bicyklov a y kusov druhej značky bicyklov, je daný funkciou $P(x,y)=3{,}78x^2+1{,}5y^2-0{,}09x^3-0{,}01y^3$. Aké množstvo bicyklov oboch značiek je potrebné predať, aby bol zisk maximálny?

$x=28,\ y=100$

43. Týždenný zisk z predaja dvoch značiek športovej obuvi, pričom sa predáva x kusov prvej značky obuvi a y kusov druhej značky obuvi, je daný funkciou $P(x,y)=40x-x^2+50y-y^2-xy$. Aké množstvo obuvi oboch značiek je potrebné predať, aby bol týždenný zisk maximálny?

$x=10,\ y=20$

44. Firma vyrába dva druhy čistiacich prostriedkov: x tisíc kusov prvého a y tisíc kusov druhého prostriedku. Funkcie výnosov a nákladov sú $R(x,y)=110x+100y+x^2+2y^2+750$ a $C(x,y)=80x+60y+2x^2+3y^2$. Koľko čistiacich prostriedkov jednotlivých druhov by mala firma vyrobiť, aby dosiahla maximálny zisk?

$x=15000,\ y=20000$

45. Spoločnosť vyrába dva modely stoličiek: x tisíc kusov prvého a y tisíc kusov druhého modelu stoličiek. Funkcie výnosov a nákladov sú $R(x,y)=16x+12y+100$ a $C(x,y)=x^2+y^2$. Koľko stoličiek jednotlivých modelov by mala firma vyrobiť, aby dosiahla maximálny zisk?

$x=8000,\ y=6000$

46. V obchode sa predávajú dva druhy motorových olejov, ktoré majiteľ nakúpil za 2 eurá. Ak sa prvý druh bude predávať za x eur a druhý druh za y eur, predá sa približne $40-50x+40y$ litrov prvého a $20+60x-70y$ litrov druhého druhu olejov. Ako má majiteľ obchodu stanoviť ceny olejov, aby dosiahol maximálny zisk?

$x=2{,}7\,€,\ y=2{,}5\,€$

47. V obchode sa predávajú dve značky vetroviek, ktoré majiteľ nakúpil za 30 a 40 eur. Ak sa prvá značka bude predávať za x eur a druhá značka za y eur, predá sa približne $70-5x+4y$ kusov prvej a $80+6x-7y$ kusov druhej značky vetroviek. Ako má majiteľ obchodu stanoviť ceny vetroviek, aby dosiahol maximálny zisk?

$x=53\,€,\ y=55\,€$

48. V obchode sa predávajú dva druhy limonád, ktoré majiteľ nakúpil za 10 a 30 centov. Ak sa prvý druh bude predávať za x centov a druhý druh za y centov, predá sa približne $40-8x+5y$ kusov prvého a $50+9x-7y$ kusov druhého druhu limonád. Ako má majiteľ obchodu stanoviť ceny limonád, aby dosiahol maximálny zisk?

$x=30$ centov, $y=45$ centov

49. V obchode sa predávajú dva druhy cukríkov, ktoré majiteľ nakúpil za 10 a 30 centov. Ak sa prvý druh bude predávať za x centov a druhý druh za y centov, predá sa približne $30-5x+2y$ kusov prvého a $100+x-2y$ kusov druhého druhu cukríkov. Ako má majiteľ obchodu stanoviť ceny cukríkov, aby dosiahol maximálny zisk?

$x = 20$ centov, $y = 50$ centov

50. Produkcia spoločnosti je daná funkciou $Q(K,L) = 120\,K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ jednotiek, kde K a L sú počty jednotiek kapitálu a práce. Náklady na kapitálovú jednotku sú 100 a na jednotku práce 25 000 eur. Spoločnosť chce vyprodukovať 4 800 jednotiek tovaru. Koľko jednotiek kapitálu a práce je potrebné použiť, aby sa pri tejto úrovni produkcie minimalizovali náklady na výrobu?

$K = 1000$ j., $L = 8$ j.

51. Produkcia spoločnosti je daná funkciou $Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ jednotiek, kde K a L sú počty jednotiek kapitálu a práce. Náklady na kapitálovú jednotku sú 108 a na jednotku práce 64 eur. Spoločnosť chce vyprodukovať 2 160 jednotiek tovaru. Koľko jednotiek kapitálu a práce je potrebné použiť, aby sa pri tejto úrovni produkcie minimalizovali náklady na výrobu?

$K = 16$ j., $L = 54$ j.

52. Produkcia spoločnosti je daná funkciou $Q(K,L) = 80K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$ jednotiek, kde K a L sú počty jednotiek kapitálu a práce. Náklady na kapitálovú jednotku sú 243 a na jednotku práce 16 eur. Spoločnosť chce vyprodukovať 1 920 jednotiek tovaru. Koľko jednotiek kapitálu a práce je potrebné použiť, aby sa pri tejto úrovni produkcie minimalizovali náklady na výrobu?

$K = 16$ j., $L = 81$ j.

53. Produkcia spoločnosti je daná funkciou $Q(K,L) = 120\,K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ jednotiek, kde K a L sú počty jednotiek kapitálu a práce. Použime diferenciál na odhad percentuálnej zmeny produkcie pri zvýšení kapitálovej investície o 3% a počtu hodín o 1,5%.

zvýšenie o 2%

54. Produkcia spoločnosti je daná funkciou $Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ jednotiek, kde K a L sú počty jednotiek kapitálu a práce. Použime diferenciál na odhad percentuálnej zmeny produkcie pri zvýšení kapitálovej investície o 2% a znížení počtu hodín o 4%.

zníženie o 2%

55. Produkcia spoločnosti je daná funkciou $Q(K,L) = 80K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{1}{4}}$ jednotiek, kde K a L sú počty jednotiek kapitálu a práce. Použime diferenciál na odhad percentuálnej zmeny produkcie pri znížení kapitálovej investície o 1% a zvýšení počtu hodín o 5%.

zvýšenie o 0,5%

56. Produkcia spoločnosti je daná funkciou $Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$ jednotiek, kde K a L sú počty jednotiek kapitálu a práce. Použime diferenciál na odhad percentuálnej zmeny produkcie pri zvýšení kapitálovej investície a počtu hodín o 1%.

zvýšenie o 1%

7 DVOJNÝ INTEGRÁL A JEHO APLIKÁCIE

7.1 Otázky

- Definujte pojem integrálny súčet.
- Definujte pojem dvojný integrál.
- Definujte pojem stredná hodnota funkcie 2 premenných na množine.
- Napíšte ako transformujete dvojný integrál pomocou polárnych súradníc.
- Napíšte ako vypočítate plošný obsah rovinnej oblasti pomocou dvojného integrálu, ilustrujte graficky.
- Napíšte ako vypočítate objem telesa pomocou dvojného integrálu.

7.2 Definícia dvojného integrálu

Majme spojitú a ohraničenú funkciu $f(x, y)$ na oblasti $A \subset I = \langle x_1, x_n \rangle \times \langle y_1, y_n \rangle$.

Rozdelíme interval $\langle x_1, x_n \rangle$ na podintervaly $\langle x_1, x_2 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle, \langle x_3, x_4 \rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$, kde $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$.

Každý takýto systém podintervalov nazveme ***delenie intervalu*** $\langle x_1, x_n \rangle$, body x_i, $i = 2,3,\dots,n-1$ nazývame ***deliace body*** delenia intervalu $\langle x_1, x_n \rangle$. Dĺžku i-tého čiastočného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 2,3\dots,n$ označujeme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Ak pre každé prirodzené číslo n je dané jedno delenie $D_n^{(1)}$ intervalu $\langle x_1, x_n \rangle$, hovoríme o ***postupnosti delení*** intervalu $\langle x_1, x_n \rangle$.

Číslo $\left\| D^{(1)} \right\| = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$ nazývame ***normou delenia*** $D^{(1)}$.

Podobne rozdelíme interval $\langle y_1, y_n \rangle$ na podintervaly $\langle y_1, y_2 \rangle, \langle y_2, y_3 \rangle, \langle y_3, y_4 \rangle \dots, \langle y_{n-1}, y_n \rangle$, kde $y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n$.

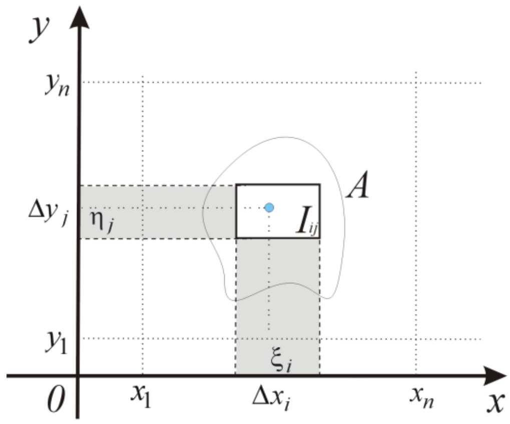
Každý takýto systém podintervalov nazveme ***delenie intervalu*** $\langle y_1, y_n \rangle$, body y_j, $j = 2,3\dots,n-1$ nazývame ***deliace body*** delenia intervalu $\langle y_1, y_n \rangle$. Dĺžku j-tého čiastočného intervalu $\langle y_{j-1}, y_j \rangle$, $j = 2,3\dots,n$ označujeme $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

Ak pre každé prirodzené číslo n je dané jedno delenie $D_n^{(2)}$ intervalu $\langle y_1, y_n \rangle$, hovoríme o ***postupnosti delení*** intervalu $\langle y_1, y_n \rangle$.

Číslo $\left\| D^{(2)} \right\| = \max \{ \Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n \}$ nazývame ***normou delenia*** $D^{(2)}$.

Normou delenia $D = D^{(1)} \times D^{(2)}$ rozumieme číslo $\|D\| = \max\left\{ \|D^{(1)}\|, \|D^{(2)}\| \right\}$.

Postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ delení intervalu $I = \langle x_1, x_n \rangle \times \langle y_1, y_n \rangle$ sa nazýva ***normálna***, ak platí $\lim\limits_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$.



Definícia 7.1 Nech $\xi_i, i = 1, 2, \ldots, n$ je ľubovoľný bod z intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a $\eta_j, j = 1, 2, \ldots, n$ je ľubovoľný bod z intervalu $\langle y_{j-1}, y_j \rangle$. ***Integrálnym súčtom*** funkcie $f(x, y)$ pre delenie D_n intervalu I a pre danú voľbu bodov $[\xi_i, \eta_j] \in A \cap I_{ij}$ nazývame číslo

$$S(f, D_n) = f(\zeta_1, \eta_1)\Delta x_1 \Delta y_1 + \ldots + f(\zeta_n, \eta_n)\Delta x_n \Delta y_n = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j .$$

Definícia 7.2 Ak existuje limita postupnosti integrálnych súčtov $\{S(f, D_n)\}_{n=1}^{\infty}$, nazývame ju ***dvojný integrál*** funkcie f na oblasti A.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy .$$

7.3 Výpočet dvojného integrálu

Nech $\sigma_{xy} = \left\{ (x, y) \in R^2, \quad a \le x \le b, \quad \psi(x) \le y \le \varphi(x) \right\}$ je elementárna oblasť vzhľadom na os o_x (elementárna oblasť typu $[x, y]$), kde funkcie $\varphi(x), \psi(x)$ sú spojité na intervale $\langle a, b \rangle$.

Veta 7.1 Nech funkcia $f(x, y)$ je integrovateľná na oblasti σ_{xy}. Nech pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ existuje $\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy$. Potom platí

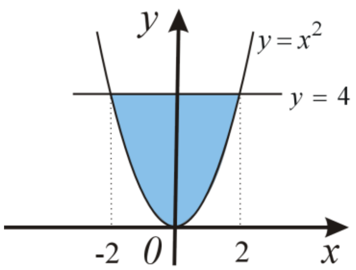
$$\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b (\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y)\, dy)\, dx .$$

Príklad 7.1 Vypočítajme $\iint\limits_M x^2 y\, dx\, dy$, kde M je oblasť ohraničená krivkami $y = x^2$ a $y = 4$.

Riešenie:

Oblasť M je elementárna oblasť typu $[x, y]$, ktorú môžeme popísať takto

$$-2 \le x \le 2$$
$$x^2 \le y \le 4.$$



Preto

$$\iint\limits_M x^2 y\, dx\, dy = \int\limits_{-2}^{2} (\int\limits_{x^2}^{4} x^2 y\, dy)\, dx = \int\limits_{-2}^{2} \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{4} dx = \int\limits_{-2}^{2} (8x^2 - \frac{x^6}{2})\, dx = \left[8\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{14} \right]_{-2}^{2} =$$
$$= (\frac{64}{3} - \frac{128}{14}) - (-\frac{64}{3} + \frac{128}{14}) = \frac{512}{21}.$$

Nech $\sigma_{yx} = \{(x, y) \in R^2, \quad c \le y \le d, \quad \Psi(y) \le x \le \Phi(y)\}$ je elementárna oblasť vzhľadom na os o_y (elementárna oblasť typu $[y, x]$), kde funkcie $\Phi(y), \Psi(y)$ sú spojité na intervale $\langle c, d\rangle$.

Veta 7.2 Nech funkcia $f(x, y)$ je integrovateľná na oblasti σ_{yx}. Nech pre každé $y \in \langle c, d\rangle$ existuje $\int\limits_{\Psi(y)}^{\Phi(y)} f(x, y)\, dx$. Potom platí

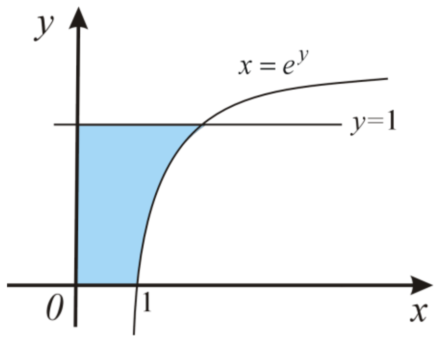
$$\iint\limits_{\sigma_{yx}} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_c^d (\int\limits_{\Psi(y)}^{\Phi(y)} f(x, y)\, dx)\, dy .$$

Príklad 7.2 Vypočítajme $\iint\limits_M 2x\,dx\,dy$, kde M je oblasť ohraničená krivkami $y = \ln x$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

Riešenie:

Oblasť M je elementárna oblasť typu $[y, x]$, ktorú môžeme popísať takto

$$0 \le y \le 1$$
$$0 \le x \le e^y.$$



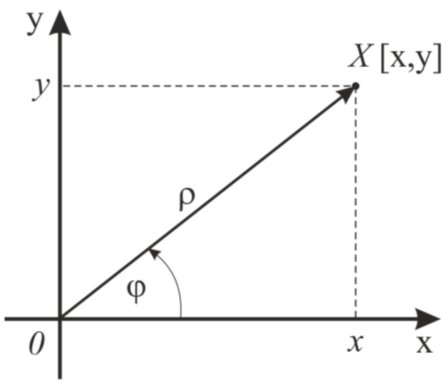
Potom

$$\iint\limits_M 2x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{e^y} 2x\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[x^2\right]_0^{e^y} dy = \int_0^1 e^{2y}\,dy = \left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

7.4 Transformácia dvojného integrálu

V niektorých úlohách je výhodnejšie nahradiť karteziánske súradnice $[x, y]$ polárnymi súradnicami $[\rho, \varphi]$. Vzťahy medzi týmito súradnicami sú

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos\varphi \\ y &= \rho \cdot \sin\varphi \end{aligned}, \text{ kde } \begin{aligned} 0 &\le \rho < \infty \\ 0 &\le \varphi \le 2\pi \end{aligned}$$



Pre transformáciu dvojného integrálu do polárnych súradníc platí

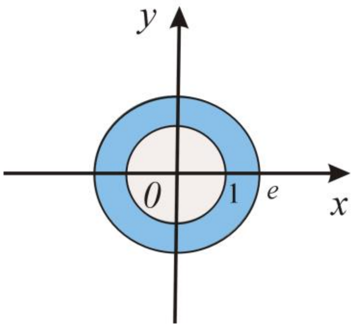
$$\iint\limits_{\sigma_{xy}} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma'_{xy}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \cdot \rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Príklad 7.3 Vypočítajme $\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy$, kde M je oblasť daná nerovnosťami $1 \le x^2+y^2 \le e^2$.

Riešenie:

Oblasť M nie je elementárna oblasť. Preto je výhodné použiť transformáciu do polárnych súradníc.

$$x = \rho \cdot \cos\varphi,$$
$$y = \rho \cdot \sin\varphi.$$



Po dosadení transformačných vzťahov dostávame

$$x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = \rho^2$$

a teda $1 \le \rho^2 \le e^2$ je ekvivalentné s $1 \le \rho \le e$. Oblasť M je vzhľadom na polárne súradnice elementárnou oblasťou a preto ju môžeme popísať nasledovne

$$1 \le \rho \le e,$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Po transformácii integračnej funkcie vypočítame nový integrál pomocou jednoduchej substitúcie

$$\iint\limits_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\Big(\int_1^e \frac{\ln\rho^2}{\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\Big)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\Big(\int_1^e \frac{2\ln\rho}{\rho}\cdot d\rho\Big)\,d\varphi =$$

$$\left|\begin{array}{l} \ln\rho = t \\ \frac{1}{\rho}\,d\rho = dt \\ 1 \to 0 \\ e \to 1 \end{array}\right| = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 2t\,dt\Big)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[2\cdot\frac{t^2}{2}\right]_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

7.5 Plošný obsah rovinnej oblasti a objem telesa

Plošný obsah rovinnej oblasti

Nech M je elementárna oblasť v rovine, potom obsah P oblasti M je

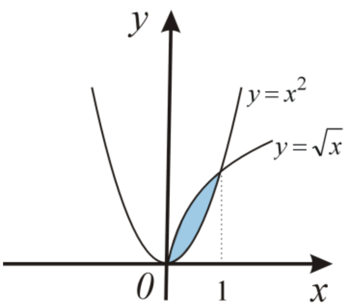
$$P(M) = \iint_M dx\,dy.$$

Príklad 7.4 Pomocou dvojného integrálu vypočítajme obsah časti roviny ohraničenej krivkami $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

Riešenie:

Oblasť M je elementárna oblasť typu $[x, y]$, ktorú môžeme popísať takto

$$0 \le x \le 1,$$
$$x^2 \le y \le \sqrt{x}.$$



Obsah časti roviny je

$$P = \iint_M dx\,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\,dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Objem telesa

Nech je teleso zhora ohraničené plochou $z = f(x, y)$, zdola ohraničené plochou $z = 0$ a jeho kolmý priemet do roviny $z = 0$ je oblasť M, potom objem telesa je

$$V = \iint_M f(x, y)\,dx\,dy.$$

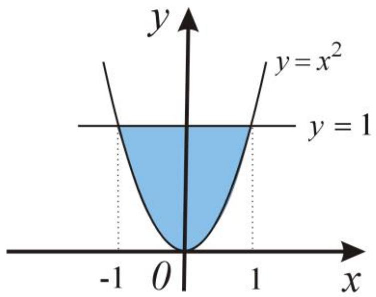
Príklad 7.5 Pomocou dvojného integrálu vypočítajme objem telesa zhora ohraničeného plochou $f(x, y) = x^2 + y^2$, zdola ohraničeného plochou $z = 0$ a jeho kolmý priemet do roviny $z = 0$ je oblasť ohraničená krivkami $y = x^2$, $y = 1$.

Riešenie:

Oblasť M je elementárna oblasť typu $[x, y]$, ktorú môžeme popísať takto

$-1 \le x \le 1,$

$x^2 \le y \le 1.$



Objem telesa je

$$V = \iint_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy\Big)\,dx = \int_{-1}^{1}\left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\Big(x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\Big)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right]_{-1}^{1} = \frac{88}{105}.$$

7.6 Stredná hodnota spojitej funkcie dvoch premenných na množine

Analogicky ako pri spojitej funkcii jednej reálnej premennej na intervale $\langle a, b\rangle$, sme namiesto aritmetického priemeru počítali strednú hodnotu tejto funkcie pomocou jednoduchého integrálu, budeme aj pre funkciu dvoch premenných počítať strednú hodnotu funkcie, ale pomocou dvojného integrálu.

Stredná hodnota spojitej funkcie $f(x,y)$ na oblasti M je

$$SH\ f(x,y) = \frac{\iint_M f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_M dx\,dy}.$$

Príklad 7.6 Vypočítajme strednú hodnotu funkcie $f(x,y)=x^2+y^2$ na oblasti M, kde M je oblasť ohraničená krivkami $y=x^2$, $y=1$.

Riešenie:

Stredná hodnota funkcie je daná vzťahom

$$SH\ f(x,y) = \frac{\iint_M f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_M dx\,dy} = \frac{\int_{-1}^{1}\Big(\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy\Big)\,dx}{\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} dy\,dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{88}{105} = \frac{22}{35}, \text{ kde}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} dy\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

Integrál z čitateľa je vypočítaný v Príklade 7.5,

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy\right)dx = \frac{88}{105}.$$

7.7 Úlohy

V úlohách 1 – 25 vypočítajte dvojný integrál:

		Výsledky:
1.	$\int_0^1\int_0^2 x^2 y\,dx\,dy$	4/3
2.	$\int_0^1\int_0^2 x^2 y\,dy\,dx$	2/3
3.	$\int_0^1\int_1^2 (x+y)\,dx\,dy$	2
4.	$\int_0^1\int_1^2 (x+y)\,dy\,dx$	2
5.	$\int_2^3\int_{-1}^1 (x+2y)\,dy\,dx$	5
6.	$\int_1^2\int_2^3 (x^2-xy)\,dx\,dy$	31/12
7.	$\int_0^2\int_0^2 (x^2+y^2-2x-2y+4)\,dx\,dy$	32/3
8.	$\int_0^1\int_0^2 (x^2+y)\,dx\,dy$	11/3
9.	$\int_0^{\ln 2}\int_{-1}^0 2xe^y\,dx\,dy$	-1
10.	$\int_0^1\int_0^1 x^2 e^{xy}\,dy\,dx$	1/2
11.	$\int_1^3\int_0^1 \frac{2xy}{x^2+1}\,dx\,dy$	4ln2
12.	$\int_0^1\int_0^1 e^{x-y}\,dx\,dy$	$e-2+1/e$

13. $\int_1^3\int_2^5 \frac{1}{(x+2y)^2}\,dx\,dy$ — $\frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$

14. $\int_0^1\int_0^x xy\,dy\,dx$ — 1/8

15. $\int_0^1\int_0^x (y-x)\,dy\,dx$ — -1/6

16. $\int_0^1\int_0^x xe^y\,dy\,dx$ — 1/2

17. $\int_0^2\int_{x^2}^x xy\,dy\,dx$ — -10/3

18. $\int_0^2\int_{x^2}^x (y-x)\,dy\,dx$ — -8/15

19. $\int_0^1\int_{y-1}^{1-y} (2x+y)\,dx\,dy$ — 1/3

20. $\int_0^2\int_{x^2}^4 xe^y\,dy\,dx$ — $\frac{3}{2}e^4+\frac{1}{2}$

21. $\int_0^2\int_{x^2}^{\sqrt{4-y^2}} y\,dx\,dy$ — 8/3

22. $\int_1^2\int_x^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx$ — $e^2-\frac{3}{2}e$

23. $\int_1^e\int_0^{\ln x} 2\,dy\,dx$ — 2

24. $\int_0^3\int_{-x}^{2x-x^2} xy\,dy\,dx$ — -243/40

25. $\int_0^1\int_0^x y\sqrt{x^2-y^2}\,dy\,dx$ — 1/12

V úlohách 26-29 vypočítajte dvojný integrál z danej funkcie na oblasti M ohraničenej krivkami:

26. $\iint_M x\,dx\,dy$

Výsledky:

a) $M:\quad x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=1$ — 3/2

b) $M:\quad \Delta\, ABC,\ A=[0,0],\ B=[1,0],\ C=[0,1]$ — 1/6

c)	$M:$	$\Delta\ ABC,\ A=[0,0],\ B=[2,0],\ C=[2,2]$	8/3
d)	$M:$	$\Delta\ ABC,\ A=[0,0],\ B=[2,0],\ C=[1,1]$	1
e)	$M:$	$y=x^2,\ y=2x$	4/3
f)	$M:$	$y=x^2,\ y=x+6$	125/12
g)	$M:$	$y=x^2-1,\ y=3x-3$	1/4
h)	$M:$	$y=-x^2,\ y=-1$	0
i)	$M:$	$y=3-x^2,\ y=1-x$	9/4
j)	$M:$	$y=\dfrac{6}{x},\ y=7-x$	125/6
k)	$M:$	$y=\dfrac{3}{x},\ y=4-x$	4/3
l)	$M:$	$y=\dfrac{2}{x},\ y=3-x$	1/6
m)	$M:$	$y=x^2,\ x=y^2$	3/20
n)	$M:$	$y=x^3,\ y=\sqrt{x}$, 1. kv.	1/5
o)	$M:$	$y=\sqrt{x},\ y=1,\ x=0$	1/10
p)	$M:$	$y=x^3,\ y=x$	2/15
q)	$M:$	$y=\ln x,\ y=0,\ x=e$	$\dfrac{1}{4}(e^2+1)$
r)	$M:$	$y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$	1
s)	$M:$	$y=x,\ y=\dfrac{1}{x},\ x=2,\ y=0$	4/3
t)	$M:$	$y=3-x,\ y=x,\ y=0$	$\dfrac{27}{8}$
u)	$M:$	$y=x+1,\ y=7-x,\ y=0$	48
v)	$M:$	$x=4,\ y^2=x$	$\dfrac{128}{5}$
w)	$M:$	$x=6,\ x=y^2-3$	$\dfrac{432}{5}$
x)	$M:$	$y=x-2,\ y^2=x$	$\dfrac{36}{5}$
y)	$M:$	$x=y^2,\ x+y-6=0$	$\dfrac{250}{3}$
z)	$M:$	$x=y^2,\ x-3y-4=0$	125
aa)	$M:$	$y^2=x+1,\ x+2y-2=0$	$\dfrac{128}{5}$
bb)	$M:$	$x=y^2-2,\ x-y-4=0$	$\dfrac{125}{3}$
cc)	$M:$	$y=x+1,\ (y-1)^2=x$	$\dfrac{1}{15}$
dd)	$M:$	$y=\dfrac{8}{x},\ y=2x,\ y=6$	$\dfrac{11}{3}$

ee)	$M:$	$y=\frac{8}{x},\ y=\frac{x}{2},\ y=5$	$\frac{342}{5}$
ff)	$M:$	$y=\frac{6}{x},\ y=\frac{x}{6},\ y=3$	144
gg)	$M:$	$y=\ln x,\ y=0,\ y=e,\ x=0$	$e^{2e}-\frac{1}{4}$

27. $\iint\limits_M y\,dx\,dy$

			Výsledky:
a)	$M:$	$x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=1$	1/2
b)	$M:$	$\Delta\ ABC,\ A=[0{,}0],\ B=[1{,}0],\ C=[0{,}1]$	1/6
c)	$M:$	$\Delta\ ABC,\ A=[0{,}0],\ B=[2{,}0],\ C=[2{,}2]$	4/3
d)	$M:$	$\Delta\ ABC,\ A=[0{,}0],\ B=[2{,}0],\ C=[1{,}1]$	1/3
e)	$M:$	$y=x^2,\ y=2x$	32/15
f)	$M:$	$y=x^2,\ y=x+6$	250/3
g)	$M:$	$y=x^2-1,\ y=3x-3$	7/30
h)	$M:$	$y=-x^2,\ y=-1$	-4/5
i)	$M:$	$y=3-x^2,\ y=1-x$	63/10
j)	$M:$	$y=\frac{6}{x},\ y=7-x$	125/6
k)	$M:$	$y=\frac{3}{x},\ y=4-x$	4/3
l)	$M:$	$y=\frac{2}{x},\ y=3-x$	1/6
m)	$M:$	$y=x^2,\ x=y^2$	3/20
n)	$M:$	$y=x^3,\ y=\sqrt{x}$	5/28
o)	$M:$	$y=\sqrt{x},\ y=1,\ x=0$	1/4
p)	$M:$	$y=x^3,\ y=x$, 1. kv.	2/21
q)	$M:$	$y=\ln x,\ y=0,\ x=e$	$\frac{1}{2}(e-2)$
r)	$M:$	$y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$	$\frac{1}{4}(e^2-1)$
s)	$M:$	$y=x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2,\ y=0$	5/12
t)	$M:$	$y=3-x,\ y=x,\ y=0$	$\frac{9}{8}$
u)	$M:$	$y=x+1,\ y=7-x,\ y=0$	$\frac{64}{3}$
v)	$M:$	$x=4,\ y^2=x$	0
w)	$M:$	$x=6,\ x=y^2-3$	0

x)	$M: \quad y = x-2,\ y^2 = x$	$\frac{9}{4}$
y)	$M: \quad x = y^2,\ x+y-6=0$	$-\frac{125}{12}$
z)	$M: \quad x = y^2,\ x-3y-4=0$	$\frac{125}{4}$
aa)	$M: \quad y^2 = x+1,\ x+2y-2=0$	$-\frac{32}{3}$
bb)	$M: \quad x = y^2-2,\ x-y-4=0$	$\frac{125}{12}$
cc)	$M: \quad y = x+1,\ (y-1)^2 = x$	$\frac{1}{4}$
dd)	$M: \quad y = \frac{8}{x},\ y = 2x,\ y = 6$	$\frac{28}{3}$
ee)	$M: \quad y = \frac{8}{x},\ y = \frac{x}{2},\ y = 5$	54
ff)	$M: \quad y = \frac{6}{x},\ y = \frac{x}{6},\ y = 3$	40
gg)	$M: \quad y = \ln x,\ y = 0,\ y = e,\ x = 0$	$e^{e+1} - e^e + 1$

28. $\iint\limits_M xy\, dx\, dy$

Výsledky:

a)	$M: \quad x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=1$	3/4
b)	$M: \quad \Delta\ ABC,\ A=[0,0],\ B=[1,0],\ C=[0,1]$	1/24
c)	$M: \quad \Delta\ ABC,\ A=[0,0],\ B=[2,0],\ C=[2,2]$	2
d)	$M: \quad \Delta\ ABC,\ A=[0,0],\ B=[2,0],\ C=[1,1]$	1/3
e)	$M: \quad y = x^2,\ y = 2x$	8/3
f)	$M: \quad y = x^2,\ y = x+6$	1625/24
g)	$M: \quad y = x^2-1,\ y = 3x-3$	3/8
h)	$M: \quad y = -x^2,\ y = -1$	0
i)	$M: \quad y = 3-x^2,\ y = 1-x$	9/8
j)	$M: \quad y = \frac{6}{x},\ y = 7-x$	$\frac{2135}{24} - 18\ln 2 - 18\ln 3$
k)	$M: \quad y = \frac{3}{x},\ y = 4-x$	$\frac{22}{3} - \frac{9}{2}\ln 3$
l)	$M: \quad y = \frac{2}{x},\ y = 3-x$	$\frac{13}{8} - \ln 4$
m)	$M: \quad y = x^2,\ x = y^2$	1/12
n)	$M: \quad y = x^3,\ y = \sqrt{x}$	5/48
o)	$M: \quad y = \sqrt{x},\ y = 1,\ x = 0$	1/12

p)	$M: \quad y = x^3,\ y = x$, 1. kv.	1/16
q)	$M: \quad y = \ln x,\ y = 0,\ x = e$	$\frac{1}{8}(e^2 - 1)$
r)	$M: \quad y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$	$\frac{1}{8}(e^2 + 1)$
s)	$M: \quad y = x,\ y = \frac{1}{x},\ x = 2,\ y = 0$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\ln 2$
t)	$M: \quad y = 3 - x,\ y = x,\ y = 0$	$\frac{27}{16}$
u)	$M: \quad y = x + 1,\ y = 7 - x,\ y = 0$	64
v)	$M: \quad x = 4,\ y^2 = x$	0
w)	$M: \quad x = 6,\ x = y^2 - 3$	0
x)	$M: \quad y = x - 2,\ y^2 = x$	$\frac{45}{8}$
y)	$M: \quad x = y^2,\ x + y - 6 = 0$	$-\frac{1\,625}{24}$
z)	$M: \quad x = y^2,\ x - 3y - 4 = 0$	$\frac{2\,125}{8}$
aa)	$M: \quad y^2 = x + 1,\ x + 2y - 2 = 0$	$-\frac{128}{3}$
bb)	$M: \quad x = y^2 - 2,\ x - y - 4 = 0$	$\frac{375}{8}$
cc)	$M: \quad y = x + 1,\ (y - 1)^2 = x$	$\frac{13}{120}$
dd)	$M: \quad y = \frac{8}{x},\ y = 2x,\ y = 6$	$\frac{65}{2} - 32\ln\frac{3}{2}$
ee)	$M: \quad y = \frac{8}{x},\ y = \frac{x}{2},\ y = 5$	$\frac{609}{2} - 32\ln\frac{5}{2}$
ff)	$M: \quad y = \frac{6}{x},\ y = \frac{x}{6},\ y = 3$	$360 - 18\ln 3$
gg)	$M: \quad y = \ln x,\ y = 0,\ y = e,\ x = 0$	$\frac{e^{2e+1}}{4} - \frac{e^{2e}}{8} + \frac{1}{8}$

29. $\iint\limits_M (x + y)\, dx\, dy$

		Výsledky:
a)	$M: \quad x = 1,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1$	2
b)	$M: \quad \Delta\, ABC,\ A = [0,0],\ B = [1,0],\ C = [0,1]$	1/3
c)	$M: \quad \Delta\, ABC,\ A = [0,0],\ B = [2,0],\ C = [2,2]$	4
d)	$M: \quad \Delta\, ABC,\ A = [0,0],\ B = [2,0],\ C = [1,1]$	4/3
e)	$M: \quad y = x^2,\ y = 2x$	52/15
f)	$M: \quad y = x^2,\ y = x + 6$	375/4

g)	$M:$	$y=x^2-1,\ y=3x-3$	29/60
h)	$M:$	$y=-x^2,\ y=-1$	-4/5
i)	$M:$	$y=3-x^2,\ y=1-x$	171/20
j)	$M:$	$y=\frac{6}{x},\ y=7-x$	125/3
k)	$M:$	$y=\frac{3}{x},\ y=4-x$	8/3
l)	$M:$	$y=\frac{2}{x},\ y=3-x$	1/3
m)	$M:$	$y=x^2,\ x=y^2$	3/10
n)	$M:$	$y=x^3,\ y=\sqrt{x}$	53/140
o)	$M:$	$y=\sqrt{x},\ y=1,\ x=0$	7/20
p)	$M:$	$y=x^3,\ y=x$	8/35
q)	$M:$	$y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$	$\frac{1}{4}(e^2+3)$
r)	$M:$	$y=x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2,\ y=0$	7/4
s)	$M:$	$y=3-x,\ y=x,\ y=0$	$\frac{9}{2}$
t)	$M:$	$y=x+1,\ y=7-x,\ y=0$	$\frac{208}{3}$
u)	$M:$	$x=4,\ y^2=x$	$\frac{128}{5}$
v)	$M:$	$x=6,\ x=y^2-3$	$\frac{432}{5}$
w)	$M:$	$y=x-2,\ y^2=x$	$\frac{189}{20}$
x)	$M:$	$x=y^2,\ x+y-6=0$	$\frac{875}{12}$
y)	$M:$	$x=y^2,\ x-3y-4=0$	$\frac{625}{4}$
z)	$M:$	$y^2=x+1,\ x+2y-2=0$	$\frac{224}{15}$
aa)	$M:$	$x=y^2-2,\ x-y-4=0$	$\frac{625}{12}$
bb)	$M:$	$y=x+1,\ (y-1)^2=x$	$\frac{19}{60}$
cc)	$M:$	$y=\frac{8}{x},\ y=2x,\ y=6$	13
dd)	$M:$	$y=\frac{8}{x},\ y=\frac{x}{2},\ y=5$	$\frac{612}{5}$
ee)	$M:$	$y=\frac{6}{x},\ y=\frac{x}{6},\ y=3$	184

ff) $M: \quad y=\ln x,\ y=0,\ y=e,\ x=0$ $\qquad \dfrac{e^{2e}}{4}+e^{e+1}-e^{e}+\dfrac{3}{4}$

V úlohách 30-37 vypočítajte dvojný integrál z danej funkcie na oblasti M :

Výsledky:

30. $\iint\limits_M \dfrac{x^2}{y^2}\,dx\,dy,\ M: \quad y=x,\ y=\dfrac{1}{x},\ x=2$ $\qquad 9/4$

31. $\iint\limits_M e^{y^3}\,dx\,dy,\ M: \quad y=\sqrt{x},\ y=1,\ x=0$ $\qquad \dfrac{1}{3}(e-1)$

32. $\iint\limits_M \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy,\ M: \quad x^2+y^2\le 1$, 1.kv. $\qquad \pi/6$

33. $\iint\limits_M \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy,\ M: \quad x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0$ $\qquad \dfrac{\pi}{2}(5\ln 5-4)$

34. $\iint\limits_M \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ M: \quad 1\le x^2+y^2\le e^2$ $\qquad 2\pi$

35. $\iint\limits_M \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{25-x^2-y^2}},\ M: \quad x^2+y^2\le 16$ $\qquad 4\pi$

36. $\iint\limits_M (x^2+y^2)\,dx\,dy,\ M: \quad 9\le x^2+y^2\le 25,\ y\le x,\ y\ge 0$ $\qquad 34\pi$

37. $\iint\limits_M (x^4+2x^2y^2+y^4)\,dx\,dy,\ M: \quad 1\le x^2+y^2\le 4$ $\qquad 21\pi$

V úlohách 38-70 vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej oblasťou M :

Výsledky:

38. $M: \quad x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=1$ $\qquad 1$

39. $M: \quad \Delta\, ABC,\ A=[0,0],\ B=[1,0],\ C=[0,1]$ $\qquad 1/2$

40. $M: \quad \Delta\, ABC,\ A=[0,0],\ B=[2,0],\ C=[2,2]$ $\qquad 2$

41. $M: \quad \Delta\, ABC,\ A=[0,0],\ B=[2,0],\ C=[1,1]$ $\qquad 1$

42. $M: \quad y=x^2,\ y=2x$ $\qquad 4/3$

43. $M: \quad y=x^2,\ y=x+6$ $\qquad 125/6$

44. $M: \quad y=x^2-1,\ y=3x-3$ $\qquad 1/6$

45. $M: \quad y=-x^2,\ y=-1$ $\qquad 4/3$

46. $M: \quad y=3-x^2,\ y=1-x$ $\qquad 9/2$

47. $M: \quad y=\dfrac{6}{x},\ y=7-x$ $\qquad \dfrac{35}{2}-6\ln 6$

48. $M: \quad y=\dfrac{3}{x},\ y=4-x$ $\qquad 4-3\ln 3$

49.	$M: \ y=\frac{2}{x},\ y=3-x$	$\frac{3}{2}-2\ln 2$
50.	$M: \ y=x^2,\ x=y^2$	1/3
51.	$M: \ y=x^3,\ y=\sqrt{x}$	5/12
52.	$M: \ y=\sqrt{x},\ y=1,\ x=0$	1/3
53.	$M: \ y=x^3,\ y=x$, 1. kv.	1/4
54.	$M: \ y=\ln x,\ y=0,\ x=e$	1
55.	$M: \ y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$	$e-1$
56.	$M: \ y=x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2,\ y=0$	$\frac{1}{2}+\ln 2$
57.	$M: \ y=3-x,\ y=x,\ y=0$	$\frac{9}{4}$
58.	$M: \ y=x+1,\ y=7-x,\ y=0$	16
59.	$M: \ x=4,\ y^2=x$	$\frac{32}{3}$
60.	$M: \ x=6,\ x=y^2-3$	36
61.	$M: \ y=x-2,\ y^2=x$	$\frac{9}{2}$
62.	$M: \ x=y^2,\ x+y-6=0$	$\frac{125}{6}$
63.	$M: \ x=y^2,\ x-3y-4=0$	$\frac{125}{6}$
64.	$M: \ y^2=x+1,\ x+2y-2=0$	$\frac{32}{3}$
65.	$M: \ x=y^2-2,\ x-y-4=0$	$\frac{125}{6}$
66.	$M: \ y=x+1,\ (y-1)^2=x$	$\frac{1}{6}$
67.	$M: \ y=\frac{8}{x},\ y=2x,\ y=6$	$5-8\ln\frac{3}{2}$
68.	$M: \ y=\frac{8}{x},\ y=\frac{x}{2},\ y=5$	$21-8\ln\frac{5}{2}$
69.	$M: \ y=\frac{6}{x},\ y=\frac{x}{6},\ y=3$	$24-6\ln 3$
70.	$M: \ y=\ln x,\ y=0,\ y=e,\ x=0$	e^e-1

V úlohách 71-98 vypočítajte objem telesa zhora ohraničeného plochou $z=xy$, zdola rovinou $z=0$, ktorého kolmý priemet do roviny je oblasť M :

		Výsledky:
71.	$M: \ x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=1$	3/4
72.	$M: \ \Delta\, ABC,\ A=[0,0],\ B=[1,0],\ C=[0,1]$	1/24
73.	$M: \ \Delta\, ABC,\ A=[0,0],\ B=[2,0],\ C=[2,2]$	2

74.	$M:\quad \Delta\, ABC,\ A=[0,0],\ B=[2,0],\ C=[1,1]$	1/3
75.	$M:\quad y=x^2,\ y=2x$	8/3
76.	$M:\quad y=x^2,\ y=x+6$	1625/24
77.	$M:\quad y=x^2-1,\ y=3x-3$	3/8
78.	$M:\quad y=3-x^2,\ y=1-x$	9/8
79.	$M:\quad y=\frac{6}{x},\ y=7-x$	$\frac{2135}{24}-18\ln 6$
80.	$M:\quad y=\frac{3}{x},\ y=4-x$	$\frac{22}{3}-\frac{9}{2}\ln 3$
81.	$M:\quad y=\frac{2}{x},\ y=3-x$	$\frac{13}{8}-2\ln 2$
82.	$M:\quad y=x^2,\ x=y^2$	1/12
83.	$M:\quad y=x^3,\ y=\sqrt{x}$	5/48
84.	$M:\quad y=\sqrt{x},\ y=1,\ x=0$	1/12
85.	$M:\quad y=x^3,\ y=x$, 1. kv.	1/16
86.	$M:\quad y=\ln x,\ y=0,\ x=e$	$\frac{1}{8}(e^2-1)$
87.	$M:\quad y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$	$\frac{1}{8}(e^2+1)$
88.	$M:\quad y=x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2,\ y=0$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln 2$
89.	$M:\quad y=3-x,\ y=x,\ y=0$	$\frac{27}{16}$
90.	$M:\quad y=x+1,\ y=7-x,\ y=0$	64
91.	$M:\quad y=x-2,\ y^2=x$	$\frac{45}{8}$
92.	$M:\quad x=y^2,\ x-3y-4=0$	$\frac{2\,125}{8}$
93.	$M:\quad x=y^2-2,\ x-y-4=0$	$\frac{375}{8}$
94.	$M:\quad y=x+1,\ (y-1)^2=x$	$\frac{13}{120}$
95.	$M:\quad y=\frac{8}{x},\ y=2x,\ y=6$	$\frac{65}{2}-32\ln\frac{3}{2}$
96.	$M:\quad y=\frac{8}{x},\ y=\frac{x}{2},\ y=5$	$\frac{609}{2}-32\ln\frac{5}{2}$
97.	$M:\quad y=\frac{6}{x},\ y=\frac{x}{6},\ y=3$	$360-18\ln 3$
98.	$M:\quad y=\ln x,\ y=0,\ y=e,\ x=0$	$\frac{e^{2e+1}}{4}-\frac{e^{2e}}{8}+\frac{1}{8}$

V úlohách 99-129 vypočítajte objem telesa zhora ohraničeného plochou $z = x + y$, zdola rovinou $z = 0$, ktorého kolmý priemet do roviny je oblasť M :

			Výsledky:
99.	M :	$x = 1,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1$	2
100.	M :	$\Delta\ ABC,\ A = [0{,}0],\ B = [1{,}0],\ C = [0{,}1]$	1/3
101.	M :	$\Delta\ ABC,\ A = [0{,}0],\ B = [2{,}0],\ C = [2{,}2]$	4
102.	M :	$\Delta\ ABC,\ A = [0{,}0],\ B = [2{,}0],\ C = [1{,}1]$	4/3
103.	M :	$y = x^2,\ y = 2x$	52/15
104.	M :	$y = x^2,\ y = x + 6$	375/4
105.	M :	$y = x^2 - 1,\ y = 3x - 3$	29/60
106.	M :	$y = 3 - x^2,\ y = 1 - x$	171/20
107.	M :	$y = \frac{6}{x},\ y = 7 - x$	125/3
108.	M :	$y = \frac{3}{x},\ y = 4 - x$	8/3
109.	M :	$y = \frac{2}{x},\ y = 3 - x$	1/3
110.	M :	$y = x^2,\ x = y^2$	3/10
111.	M :	$y = x^3,\ y = \sqrt{x}$	53/140
112.	M :	$y = \sqrt{x},\ y = 1,\ x = 0$	7/20
113.	M :	$y = x^3,\ y = x$	8/35
114.	M :	$y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$	$\frac{1}{4}(e^2 + 3)$
115.	M :	$y = x,\ y = \frac{1}{x},\ x = 2,\ y = 0$	7/4
116.	M :	$y = 3 - x,\ y = x,\ y = 0$	$\frac{9}{2}$
117.	M :	$y = x + 1,\ y = 7 - x,\ y = 0$	$\frac{208}{3}$
118.	M :	$x = 4,\ y^2 = x$	$\frac{128}{5}$
119.	M :	$x = 6,\ x = y^2 - 3$	$\frac{432}{5}$
120.	M :	$y = x - 2,\ y^2 = x$	$\frac{189}{20}$
121.	M :	$x = y^2,\ x + y - 6 = 0$	$\frac{875}{12}$
122.	M :	$x = y^2,\ x - 3y - 4 = 0$	$\frac{625}{4}$
123.	M :	$y^2 = x + 1,\ x + 2y - 2 = 0$	$\frac{224}{15}$

124. $M: \quad x = y^2 - 2,\ x - y - 4 = 0$ $\qquad \frac{625}{12}$

125. $M: \quad y = x + 1,\ (y-1)^2 = x$ $\qquad \frac{19}{60}$

126. $M: \quad y = \frac{8}{x},\ y = 2x,\ y = 6$ $\qquad 13$

127. $M: \quad y = \frac{8}{x},\ y = \frac{x}{2},\ y = 5$ $\qquad \frac{612}{5}$

128. $M: \quad y = \frac{6}{x},\ y = \frac{x}{6},\ y = 3$ $\qquad 184$

129. $M: \quad y = \ln x,\ y = 0,\ y = e,\ x = 0$ $\qquad \frac{e^{2e}}{4} + e^{e+1} - e^e + \frac{3}{4}$

V úlohách 130-140 vypočítajte strednú hodnotu funkcie $z = f(x,y)$ na danej oblasti:

Výsledky:

130. $f(x,y) = x + y, \quad M: \quad x = 1,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1$ $\qquad 2$

131. $f(x,y) = x + y, \quad M: \quad \Delta\, ABC,\ A = [0,0],\ B = [2,0],\ C = [2,2]$ $\qquad 2$

132. $f(x,y) = x + y, \quad M: \quad y = x^2,\ y = x + 6$ $\qquad \frac{9}{2}$

133. $f(x,y) = x + y, \quad M: \quad y = \frac{3}{x},\ y = 4 - x$ $\qquad \frac{8}{12 - 9\ln 3}$

134. $f(x,y) = x + y, \quad M: \quad y = x^2,\ x = y^2$ $\qquad \frac{9}{10}$

135. $f(x,y) = x + y, \quad M: \quad y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$ $\qquad \frac{e^2 + 3}{4(e-1)}$

136. $f(x,y) = xy, \quad M: \quad \Delta\, ABC,\ A = [0,0],\ B = [1,0],\ C = [0,1]$ $\qquad \frac{1}{12}$

137. $f(x,y) = xy, \quad M: \quad y = x^2,\ y = 2x$ $\qquad 2$

138. $f(x,y) = xy, \quad M: \quad y = \frac{2}{x},\ y = 3 - x$ $\qquad \frac{13 - 16\ln 2}{12 - 16\ln 2}$

139. $f(x,y) = xy, \quad M: \quad y = x^3,\ y = \sqrt{x}$ $\qquad \frac{1}{4}$

140. $f(x,y) = xy, \quad M: \quad y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$ $\qquad \frac{e^2 + 1}{8(e-1)}$

8 NEKONEČNÉ RADY

8.1 Otázky

- Definujte pojem nekonečný číselný rad.
- Definujte pojem n-tý čiastočný súčet.
- Definujte pojem súčet nekonečného číselného radu.
- Definujte pojem funkcionálny rad.
- Definujte pojem mocninový rad.
- Definujte pojem Taylorov rad funkcie.
- Sformulujte vetu o nutnej podmienke konvergencie číselného radu.
- Sformulujte vetu *D´Alembertovo limitné podielové kritérium*.
- Sformulujte vetu *Cauchyho limitné odmocninové kritérium*.
- Sformulujte vetu *Cauchyho integrálne kritérium*.
- Sformulujte vetu *porovnávacie kritérium*.

8.2 Pojem nekonečného číselného radu a jeho súčet

Definícia 8.1 Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Potom výraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ nazývame ***nekonečným číselným radom.*** Číslo a_n nazývame *n*-tým členom tohto radu.

Majme postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_2 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Definícia 8.2 Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný číselný rad.

Potom výraz $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ nazývame ***n-tým čiastočným súčtom*** radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definícia 8.3 Ak existuje konečná limita $s = \lim_{n \to \infty} s_n$, tak číslo s nazývame ***súčtom radu*** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ***konvergentný***. Označujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Definícia 8.4 Ak neexistuje limita postupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ hovoríme, že rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je ***divergentný*** a nemá súčet.

Príklad 8.1 Nájdime súčet radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$.

Riešenie:

Najprv urobíme rozklad *n*-tého člena radu na súčet elementárnych zlomkov, potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

n -tý čiastočný súčet je

$$s_n = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right),$$

vidíme, že niektoré členy sa odčítajú, preto po úprave

$$s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

Súčet radu je

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Veta 8.1 (Nutná podmienka konvergencie radu)

Ak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentný, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

8.3 Harmonický a geometrický rad

Zovšeobecnený harmonický rad má tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ pre $\alpha > 0$ a je pre $\alpha \le 1$ divergentný, pre $\alpha > 1$ konvergentný.

Harmonický rad (špeciálny prípad zovšeobecneného harmonického radu pre $\alpha = 1$) má tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a je divergentný.

Geometrický rad má tvar $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 \cdot q^n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n + \cdots$, kde $a_1 \neq 0$ a pre $|q| < 1$ je konvergentný, pre $|q| \geq 1$ je divergentný.

Súčet nekonečného geometrického radu je $s = \dfrac{a_1}{1-q}$, kde $|q| < 1$.

Príklad 8.2 Nájdime súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Riešenie:

n-tý člen radu $a_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ môžeme prepísať do tvaru $a_n = -\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{, kde}$$

prvý člen $a_1 = -\left(-\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$, kvocient $q = -\frac{2}{3}$ a platí $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$.

Súčet nekonečného geometrického radu je $s = \dfrac{\frac{2}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \dfrac{2}{5}$.

8.4 Kritériá konvergencie číselných radov

V tejto kapitole sa budeme zaoberať konvergenciou číselných radov výlučne s kladnými členmi.

Veta 8.2 (**D´Alembertovo podielové kritérium**)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečný rad a pre každé $n \in N$ nech $a_n > 0$.

a) Ak $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, tak je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konvergentný***.

b) Ak $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, tak je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***divergentný***.

Príklad 8.3 Vyšetrime konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{1}{n}$.

Riešenie:

Na základe D´Alembertovo kritéria

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}<1 .$$

Daný číselný rad konverguje.

Veta 8.3 (**Cauchyho odmocninové kritérium**)

Nech $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ je nekonečný rad, kde $a_n\geq 0$.

a) Ak $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$, tak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ***konvergentný***.

b) Ak $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1$, tak je rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ***divergentný***.

Príklad 8.4 Vyšetrime konvergenciu radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3n+2}$.

Riešenie:

Na základe Cauchyho odmocninového kritéria

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{\frac{3n+2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3+\frac{2}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{\frac{2}{n}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{3}\cdot 1=\frac{8}{125}<1.$$

Daný číselný rad konverguje.

Veta 8.4 (**Cauchyho integrálne kritérium**)

Nech pre rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, kde $a_n\geq 0$ existuje spojitá funkcia f na intervale $\langle K,\infty)$, pre ktorú platí:

1. $f(x)$ je nerastúca na $\langle K,\infty)$.

2. $f(n) = a_n$ pre všetky $n > K$.

Potom, ak $\int_K^{\infty} f(x)\,dx < \infty$, tak je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konvergentný.***

Ak $\int_K^{\infty} f(x)\,dx = \infty$, tak je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***divergentný***.

Príklad 8.5 Vyšetrime konvergenciu radu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n \ln n}$.

Riešenie:

Položme $f(x) = \frac{3}{x \ln x}$. Definičný obor je $D(f) = (0, \infty) - \{1\}$. Funkcia je teda spojitá na intervale $\langle 2, \infty)$. Je zrejmé, že pre každé $n \geq 2$ je $f(n) = \frac{3}{n \ln n} = a_n$.

Pretože $f'(x) = -\frac{3(1 + \ln x)}{(x \ln x)^2} < 0$, je funkcia $f(x)$ klesajúca na intervale $\langle 2, \infty)$ a možno teda použiť Cauchyho integrálne kritérium.

$$\int_2^{\infty} \frac{3}{x \ln x}\,dx = 3 \cdot \lim_{a \to \infty} \int_2^{a} \frac{1}{x \ln x}\,dx = 3 \cdot \lim_{a \to \infty} \big[\ln|\ln x|\big]_2^a = 3 \cdot \lim_{a \to \infty} (\ln|\ln a| - \ln|\ln 2|) =$$

$$= 3 \cdot \lim_{a \to \infty} \ln\left|\frac{\ln a}{\ln 2}\right| = 3 \cdot \infty = \infty.$$

Daný rad diverguje.

Veta 8.5 (**Porovnávacie kritérium**)

Majme rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pričom $0 \leq a_n \leq b_n$ pre $n = 1, 2, \ldots$

Ak majorantný rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom konverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak minorantný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, potom diverguje aj rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Poznámka Použitie porovnávacieho kritéria vyžaduje skúsenosti na skonštruovanie majorantného resp. minorantného radu na základe hypotézy o konvergencii, resp. divergencii vyšetrovaného radu.

8.5 Taylorov rad

Definícia 8.5 Nech $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na intervale $\langle a,b\rangle$, potom výraz $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazývame nekonečným ***funkcionálnym radom.***

Poznámka Ak $f_n(x)=a_n(x-a)^n$, rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nazývame ***mocninovým radom so stredom v bode*** a**.**

Definícia 8.6 Nech funkcia $f(x)$ má v bode a derivácie všetkých rádov. Mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ nazývame ***Taylorovým radom funkcie*** so stredom v bode *a*.

Definícia 8.7 Taylorov rad so stredom v bode $a=0$, čiže $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$ nazývame ***Maclaurinovým radom funkcie.***

Poznámka Rozvoj niektorých funkcií do Taylorovho radu so stredom v bode $a=0$

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ pre $x\in(-\infty,\infty)$,

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ pre $x\in(-1,1\rangle$,

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$ pre $x\in(-\infty,\infty)$,

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}$ pre $x\in(-\infty,\infty)$.

Príklad 8.6 Rozviňme funkciu $f(x)=x\ln(1+x^2)$ do Taylorovho radu.

Riešenie:

Ak namiesto x dosadíme x^2 do vzťahu $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$, dostaneme

$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}$$

$$x\ln(1+x^2)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{2n+1} \quad \text{pre } x\in(-1,1\rangle.$$

Príklad 8.7 Použijeme prvých 5 členov Taylorovho radu funkcie $f(x) = x\ln(1+x^2)$ na približný výpočet integrálu $\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx$.

Riešenie:

Z Príkladu 8.6 je $x\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n+1}$ a prvých 5 členov radu je $x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^7 - \frac{1}{4}x^9 + \frac{1}{5}x^{11}$, preto

$$\int_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx \doteq \int_0^1 (x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^7 - \frac{1}{4}x^9 + \frac{1}{5}x^{11})\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^6 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{40}x^{10} + \frac{1}{60}x^{12}\right]_0^1 = 0{,}2\,.$$

8.6 Úlohy

V úlohách 1-32 nájdite súčet radu:

		Výsledky:
1.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$	1/2
2.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$	1/3
3.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$	1/4
4.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9n+20}$	1/5
5.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$	5/12
6.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+8}$	7/24
7.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+8n+15}$	9/40
8.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+10n+24}$	11/30
9.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+3n}$	11/6
10.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+5n+4}$	13/12

11.	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$	3/4
12.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n^2+3n+2)(n+3)}$	1/6
13.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$	1/4
14.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+3n^2+2n}$	1/2
15.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3+3n^2+2n}$	1
16.	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{n^3-3n^2+2n}$	3/2
17.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$	1/2
18.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$	1/3
19.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$	1
20.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$	5/2
21.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$	-1/4
22.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$	-2/5
23.	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$	1
24.	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}$	27
25.	$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$	8/5
26.	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^{n+1}}$	-2/45
27.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$	1/2
28.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}}$	1/3

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}$ 5/6

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}$ 1/6

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}$ 1/2

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 3^n}{15^n}$ 3/4

V úlohách 33-62 vyšetrite pomocou D´Alembertovho kritéria konvergenciu radu:

Výsledky:

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{3}{8}\right)^n$ konverguje

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n-1}\left(\frac{7}{5}\right)^n$ diverguje

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4n+2}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ konverguje

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ konverguje

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n}{n+4}$ diverguje

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n-1) \cdot 2^n}$ konverguje

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 \cdot 3^n}$ konverguje

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n^2+1) \cdot 2^n}$ konverguje

42. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+4) \cdot 2^n}{n^2 - 1}$ diverguje

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot (n-1)!}$ konverguje

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 10^n \cdot n}{(n+1)!}$ konverguje

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (n-1)}{5^n \cdot n!}$ konverguje

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n \cdot (n+1)}$ diverguje

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n \cdot (n^2-1)}{n!}$ konverguje

48. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)!}{n^2-2}$ diverguje

49. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \cdot \frac{n}{(n+1)!}$ konverguje

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konverguje

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$ konverguje

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konverguje

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ konverguje

54. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ diverguje

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ konverguje

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n \cdot n^2}$ diverguje

57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 10^n \cdot n!}{(2n)!}$ konverguje

58. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2 \cdot e^n}$ konverguje

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$ konverguje

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$ diverguje

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot n!}{n^n}$ diverguje

62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)!}{3 \cdot 10^{n+2}}$ diverguje

V úlohách 63-84 vyšetrite pomocou Cauchyho odmocninového kritéria konvergenciu radu:

		Výsledky:
63.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^{n}$	konverguje
64.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n}$	konverguje
65.	$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{2n-5}\right)^{n}$	diverguje
66.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{4n-2}\right)^{n}$	konverguje
67.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{2n+1}\right)^{n}$	diverguje
68.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{3n-2}\right)^{2n+1}$	konverguje
69.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{2n-1}$	konverguje
70.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{3n-1}\right)^{n+3}$	diverguje
71.	$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{10n+3}{n-2}\right)^{3n+1}$	diverguje
72.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{3n^2+2}\right)^{2n+2}$	konverguje
73.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-2}\right)^{n+1}$	konverguje
74.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^3+n}{2n^3-1}\right)^{\frac{n}{3}}$	diverguje
75.	$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n-2}\right)^{n^2}$	diverguje
76.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{n^2}$	konverguje
77.	$\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{2n^2}$	diverguje
78.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$	diverguje

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ konverguje

80. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n \cdot \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$ diverguje

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ konverguje

82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^{n^2}}{3^n \cdot n^{n^2}}$ konverguje

83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{3^n \cdot n^{n^2}}$ konverguje

84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+2)^{n^2}}{3^n \cdot (n+1)^{n^2}}$ diverguje

V úlohách 85-102 vyšetrite pomocou Cauchyho integrálneho kritéria konvergenciu radu:

Výsledky:

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+3}$ diverguje

86. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3n-5}$ diverguje

87. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+1}$ diverguje

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n+7}$ diverguje

89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{1+n^2}$ diverguje

90. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$ diverguje

91. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{n^2-1}$ diverguje

92. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$ diverguje

93. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^2-2}}$ diverguje

94. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ diverguje

95. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+9}{n^4}$ konverguje

96. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4-7n^2+2}{n^6}$ konverguje

97. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n \cdot \ln n}$ diverguje

98. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ konverguje

99. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ konverguje

100. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$ diverguje

101. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverguje

102. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ konverguje

V úlohách 103-122 vyšetrite pomocou porovnávacieho kritéria konvergenciu radu:

Výsledky:

103. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+3}$ diverguje

104. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3n-5}$ diverguje

105. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n+1}$ diverguje

106. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n+7}$ diverguje

107. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{1+n^2}$ diverguje

108. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$ diverguje

109. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{n^2-1}$ diverguje

110. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3}$ konverguje

111. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n^2-4}$ konverguje

112. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+9}{n^4}$ konverguje

113. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4-7n^2+2}{n^6}$ konverguje

114. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{3,6}}$ konverguje

115. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n^3}}$ konverguje

116. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ diverguje

117. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{n^3}}$ diverguje

118. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{5}{7}\right)^n$ konverguje

119. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 7^n}{2\cdot 5^n}$ diverguje

120. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ konverguje

121. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6}\cdot\frac{2^{n+1}}{4^n}$ konverguje

122. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}\cdot\frac{3^n}{2^{n-1}}$ diverguje

V úlohách 123-139 pomocou základných mocninových radov určte Taylorov rad danej funkcie so stredom v bode $a=0$:

Výsledky:

123. $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}$

124. $f(x)=e^{2x}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\cdot x^n$

125. $f(x)=e^{-2x}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{2^n}{n!}\cdot x^n$

126. $f(x)=xe^x$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$

127. $f(x)=3xe^{2x}$ $\sum_{n=0}^{\infty} 3\frac{2^n}{n!}\cdot x^{n+1}$

128. $f\left(x\right)=x^2e^{-2x}$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{2^n}{n!}\cdot x^{n+2}$

129. $f\left(x\right)=2xe^{\frac{x^2}{2}}$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2^{n-1}\cdot n!}$

130. $f\left(x\right)=x^2e^{-x^2}$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{n!}x^{2n+2}$

131. $f\left(x\right)=x^3e^{x}$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+3}}{n!}$

132. $f\left(x\right)=x^3e^{-x}$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^{n+3}$

133. $f\left(x\right)=x\ln(1+x)$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}x^{n+1}$

134. $f\left(x\right)=x^2\ln(1+x)$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}x^{n+2}$

135. $f\left(x\right)=\ln(1+x^3)$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}x^{3n}$

136. $f\left(x\right)=x\ln(1+x^3)$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}x^{3n+1}$

137. $f\left(x\right)=x\sin x$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}$

138. $f\left(x\right)=x^2\cos x$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{(2n)!}x^{2n+2}$

139. $f\left(x\right)=\sin x^2$ $\qquad$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2}$

V úlohách 140-156 použite prvých 5 členov mocninového radu na približný výpočet určitého integrálu:

Výsledky:

140. $\int\limits_{-1}^{1}e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$ $\qquad$ 2,3898644

141. $\int\limits_{1}^{2}e^{2x}\,dx$ $\qquad$ 17,8

142. $\int\limits_{0,5}^{1}e^{-2x}\,dx$ $\qquad$ 0,15

143. $\int\limits_{0}^{1/2}xe^{x}\,dx$ $\qquad$ 0,1756293

144.	$\int_{-1}^{0} 3xe^{2x}\,dx$	-0,533333
145.	$\int_{0}^{1} x^2 e^{-2x}\,dx$	0,1063492
146.	$\int_{0}^{1} 2xe^{\frac{x^2}{2}}\,dx$	1,2973958
147.	$\int_{-1}^{1} x^2 e^{-x^2}\,dx$	0,3800482
148.	$\int_{0}^{1} x\ln(1+x)\,dx$	0,2619047
149.	$\int_{0}^{1} x^2\ln(1+x)\,dx$	0,1948412
150.	$\int_{0}^{1} \ln(1+x^3)\,dx$	0,2051739
151.	$\int_{0}^{1} x\ln(1+x^3)\,dx$	0,1617105
152.	$\int_{0}^{1} \sin x^2\,dx$	0,3102683

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1] *Demidovič, B. P.*: **Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu**, Nauka, Moskva 1977.

[2] *Džurina, J. - Grinčová, A. - Pirč, V.*: **Matematická analýza 2,** Košice 2005, ISBN 80-8073-413-5.

[3] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.*: **Zbierka úloh z vyššej matematiky 3**, ALFA, Bratislava 1967, ISBN 63-003-71.

[4] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.*: **Zbierka úloh z vyššej matematiky 4**, ALFA, Bratislava 1968, ISBN 63-026-70.

[5] *Grinčová, A.*: **Matematika II a jej využitie v ekonómii,** FEI TUKE Košice 2012, Košice 2005, ISBN 978-80-553-0851-7.

[6] *Ivan, J.*: **Matematika 2**, ALFA/SNTL, Bratislava 1989.

[7] *Jirásek, F. - Kriegelstein, E. - Tichý, Z.*: **Sbírka řešených přikladů z matematiky**, SNTL/ALFA, Praha 1982.

[8] *Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M.*: **Matematika II**, SVTL, Bratislava 1961.

[9] *Marčoková, M. - Moravčík, J. - Ružičková, M.*: **Matematika IV**, Žilinská univerzita, EDIS - vydavateľstvo ŽU 2000, ISBN 80-7100-697-1.

[10] *Pirč, V. - Haščák, A.*: **Matematická analýza II**, elfa s.r.o. Košice 1999, ISBN 80-88964-06-7.

[11] *Pták, P.*: **Calculus II**, ČVUT, Praha 1997, ISBN 80-01-01207-7.

NÁZOV: Matematika III a jej využitie v ekonómii
AUTOR: Grinčová Anna
VYDAVATEĽ: Technická univerzita v Košiciach
ROK: 2022
VYDANIE: prvé
ROZSAH: 136 strán
ISBN:

ISBN