Pojem postupnosť

Definícia

Funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *nazývame postupnosťou reálnych čísel a prvok* $a_n = f(n)$ *nazývame n-tý člen postupnosti.*
Označujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definícia

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sa nazýva*

- *rastúca, ak pre* $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n < a_{n+1}$
- *klesajúca, ak pre* $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n > a_{n+1}$
- *nerastúca, ak pre* $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \geq a_{n+1}$
- *neklesajúca, ak pre* $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \leq a_{n+1}$
- *zhora ohraničená, ak* $\exists K \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq K$
- *zdola ohraničená, ak* $\exists k \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq k$
- *ohraničená, ak je ohraničená zdola aj zhora*

Pojem limita postupnosti a jej základné vlastnosti

Definícia

Číslo b sa nazýva limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, ak ku každému $O_\varepsilon(b)$ existuje n_0 také, že pre každé $n > n_0$; $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \in O_\varepsilon(b)$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

Definícia

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Keď $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \in \mathbb{R}$, hovoríme, že postupnosť je konvergentná. V opačnom prípade (t.j. keď limita neexistuje alebo je rovná $\pm\infty$) hovoríme, že postupnosť je divergentná.

Veta

Ak je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná, tak je ohraničená.

Základné vlastnosti limity postupnosti

Veta

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sú konvergentné postupnosti. Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}^*$ *Potom platí*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n) = a . b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k$, $k \in \mathbb{Z}$

ak majú výrazy $a \pm b$, $a . b$, $\frac{a}{b}$, a^k *v* $\mathbb{R}^*$ *zmysel.*

Nekonečný číselný rad

Definícia

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel. Potom výraz* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ *nazývame nekonečný číselný rad, kde číslo* a_n *nazývame* n*–tým členom nekonečného číselného radu.*

Definícia

Postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definovanú* $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *nazývame postupnosť čiastočných súčtov.*

Definícia

Ak existuje konečná limita $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, *tak číslo* s *nazývame súčtom radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný. Označujeme* $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Ak neexistuje konečná limita* $\lim_{n\to\infty} s_n$, *tak je rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentný.*

Nutná podmienka konvergencie

Veta (Nutná podmienka konvergencie nekonečného číselného radu)

Ak je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentný, tak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definícia

Ak je nekonečný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$ *konvergentný, tak hovoríme, že nekonečný číselný rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolútne konvergentný.*

Ak je nekonečný číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentný a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je divergentný, tak hovoríme, že nekonečný číselný rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je relatívne konvergentný.*

Veta

Ak je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konvergentný, tak je rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentný.*

Harmonický a geometrický rad

Zovšeobecnený harmonický rad je rad v tvare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ pre $\alpha > 0$. Platí naledovné:

- ak $0 < \alpha \leq 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje,
- ak $\alpha > 1$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje.

Pre $\alpha = 1$ dostávame rad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ktorý nazývame harmonický rad (je divergentný).

Geometrický rad je rad, pre ktorý platí, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kde q je konštanta, ktorú nazývame kvocient geometrického radu. Geometrický rad je možné zapísať v tvare

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n + \cdots, a_1 \neq 0.$$

Tento rad je konvergentný pre $|q| < 1$ a divergentný pre $|q| \geq 1$.
Ak $|q| < 1$, potom súčet nekonečného geometrického radu je $s = \frac{a_1}{1-q}$.

Príklad

Nájdime súčet radu $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$.

Riešenie: Pre daný rad overíme, či je to geometrický rad. Ak áno, určíme, či je konvergentný. V kladnom prípade vypočítame jeho súčet.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}} = -\frac{2}{3}.$$

Podiel $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ je konštanta, teda sa jedná o geometrický rad s kvocientom $q = -\frac{2}{3}$. Pretože platí $|q| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$ rad je konvergentný.Pre výpočet súčtu potrebuje určiť prvý člen a_1. Získame ho dosadením $n = 2$ do a_n.

$$a_1 = (-1)^{2+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = -\frac{4}{9}.$$

Súčet tohto geometrického radu je

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\frac{4}{9}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}} = -\frac{4}{15}.$$

Kritériá konvergencie číselných radov

Veta (D'Alembertovo podielové kritérium)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečný číselný rad a nech* $\forall n \in N$ *platí, že* $a_n \neq 0$.

(a) *Ak* $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, *tak je rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konvergentný.*

(b) *Ak* $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$, *tak je rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentný.*

Príklad

Vyšetrime konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Riešenie: Máme $a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{konverguje.}$$

Veta (Cauchyho odmocninové kritérium)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je nekonečný číselný rad.*

(a) *Ak* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *tak je rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konvergentný.*

(b) *Ak* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *tak je rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentný.*

Príklad

Vyšetrime konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3n+2}$.

Riešenie: n-tý člen: $a_n = \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3n+2}$. Dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{\frac{3n+2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{3+\frac{2}{n}} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125} < 1.$$

Teda rad konverguje.

Rady so striedavými znamienkami

Veta (Leibnitzovo kritérium)

Nech $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *je rad so striedavými znamienkami. Nech postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerastúca. Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *je konvergentný práve vtedy, ak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Príklad

Vyšetrime konvergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Riešenie: Je to rad so striedavými znamienkami, pričom $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Platí $\forall n \in N$: $n < n+1 \Rightarrow 2n < 2(n+1) \Rightarrow \sqrt{2n} < \sqrt{2(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}$.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pre $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ je klesajúca, z čoho vyplýva, že je aj nerastúca.

Keďže $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0$, podľa Leibnizovho kritéria rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2n}}$ konverguje.

Funkcionálne rady

Definícia

Nech $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť funkcií definovaných na intervale* $\langle a, b\rangle$, *potom výraz* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *nazývame nekonečný funkcionálny rad.*

Definícia

Obor konvergencie (OK) nekonečného funkcionálneho radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *je množina všetkých reálnych čísel, pre ktoré príslušný číselný rad konverguje.*

Pre určenie oboru konvergencie funkcionálnych radov môžeme použiť upravené D'Alembertovo podielové kritérium alebo Cauchyho odmocninové kritérium. Teda ak $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| < 1$ resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} < 1$, tak funkcionálny rad konverguje v x.

Mocninové rady

Definícia

Ak $f_n(x) = a_n(x-a)^n$, *rad* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *nazývame mocninový rad so stredom v bode a.*

Ak existuje $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lambda$ resp. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, definujeme polomer konvergencie (ρ) mocninového radu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nasledovne:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{ak } 0 < \lambda < \infty; \\ \infty & \text{ak } \lambda = 0; \\ 0 & \text{ak } \lambda = \infty. \end{cases}$$

Interval $(a-\rho, a+\rho)$ nazývame interval konvergencie (IK).

Pre každý mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ nastáva jeden z prípadov:

- $\rho = 0 \Rightarrow$ rad konverguje len v bode $x = a$,teda $OK = \{a\}$;
- $\rho = \infty \Rightarrow$ rad konverguje pre pre všetky reálne čísla, teda $OK = \mathbb{R}$;
- $\rho \neq 0, \pm\infty \Rightarrow IK = (a-\rho, a+\rho)$. Krajné body intervalu konvergencie môžu, ale nemusia patriť do oboru konvergencie.

Príklad

Nájdime obor konvergencie mocninového radu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n(n+1)(n+2)}$.

Riešenie. Máme $a_n = \frac{1}{3^n(n+1)(n+2)}, a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}$. Vypočítame

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}}{\frac{1}{3^n(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{3(n+3)} = \frac{1}{3}.$$

Polomer konvergencie $\rho = \frac{1}{\lambda} = 3$. Stred radu je $a = -2$. Interval konvergencie je $(a-\rho, a+\rho) = (-2-3, -2+3) = (-5, 1)$.
Určíme konvergenciu radu v krajných bodoch.

1. Pre $x = -5$ dostaneme číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}.$$

Dostávame rad so striedavými znamienkami, kde $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ a podľa Leibnizovho kritéria zistíme, či daný rad konverguje. O postupnosti $\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ vieme, že je nerastúca a keďže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0$, rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ je konvergentný.

2. Pre $x = 1$ dostaneme číselný rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Daný číselný rad má súčet $s = \frac{1}{2}$ a teda je konvergentný.

Obor konvergencie je: $OK = \langle -5, 1 \rangle$.

Diferenciálne rovnice

Definícia

Diferenciálnou rovnicou *n*–**tého rádu** *nazývame rovnicu*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

pričom $y = y(x)$ *je neznáma funkcia.*

Definícia

Riešením diferenciálnej rovnice $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ *na intervale* I *nazývame každú n–krát diferencovateľnú funkciu* $y = \varphi(x)$, $x \in I$, *pre ktorú platí*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)})(x) = 0.$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice n–tého rádu *môžeme napísať v tvare* $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, *kde* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *sú nezávislé konštanty.*

Poznámka: Počet konštánt je rovnaký ako rád diferenciálnej rovnice. Ak za jednotlivé konštanty dosadíme konkrétne čísla, hovoríme o **partikulárnom riešení diferenciálnej rovnice**.

Diferenciálne rovnice prvého rádu so separovateľnými premennými

Definícia

Diferenciálna rovnica tvaru

$$\psi(y)\,dy = \varphi(x)\,dx,$$

kde funkcie $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sú spojité na intervale I, sa nazýva **diferenciálna rovnica so separovanými premennými**.

Diferenciálnu rovnicu so separovanými premennými formálne riešime nasledovne:

$$\int \psi(y)\,dy = \int \varphi(x)\,dx$$

(za predpokladu, že tieto integrály existujú).
Po vypočítaní integrálov dostávame riešenie danej diferenciálnej rovnice, ktoré môžeme vyjadriť v explicitnom ($y(x)$ je jednoznačne vyjadrené) alebo implicitnom tvare ($y(x)$ nie je možné jednoznačne vyjadriť).

Definícia

Diferenciálna rovnica tvaru

$$\varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy = \varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx$$

sa nazýva **diferenciálna rovnica so separovateľnými premennými**.

Poznámka: Ak platí $\psi_1(y)\,\varphi_2(x) \neq 0$, tak sa predchádzajúca diferenciálna rovnica dá upraviť na separovanú diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx.$$

Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu

Definícia

Lineárnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu s pravou stranou *nazývame rovnicu*

$$y' + p(x)\,y = q(x),$$

kde $p(x)$, $q(x)$ *sú funkcie spojité na intervale* I.

Poznámka: Ak $q(x) = 0$, tak diferenciálnu rovnicu $y' + p(x)\,y = 0$ nazývame **lineárnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu bez pravej strany**. Lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu bez pravej strany sa rieši separáciou premenných.

Riešenie LDR s pravou stranou

Diferenciálnu rovnicu

$$y' + p(x)\,y = q(x),$$

vynásobíme tzv. integračným faktorom $IF = e^{\int p(x)\,dx}$ a dostaneme

$$y' \cdot e^{\int p(x)\,dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,y = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}.$$

Všimnime si, že ľavá strana takto upravenej rovnice predstavuje deriváciu súčinu hľadaného riešenia a integračného faktora

$$[y \cdot e^{\int p(x)\,dx}]' = q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}.$$

Integrovaním oboch strán vzniknutej rovnice dostaneme

$$y \cdot e^{\int p(x)\,dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Prenásobením oboch strán rovnice výrazom $e^{-\int p(x)\,dx}$ eliminujeme hľadané riešenie y

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c \cdot e^{-\int p(x)\,dx},\ c \in \mathbb{R}.$$

Príklad

Nájdime všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y' - 5y = 2x$.

Riešenie: Diferenciálnu rovnicu

$$y' - 5y = 2x$$

vynásobíme integračným faktorom $IF = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int -5\,dx} = e^{-5x}$ a dostaneme

$$y' \cdot e^{-5x} - 5 \cdot e^{-5x} y = 2x \cdot e^{-5x}.$$

Všimnime si, že ľavá strana takto upravenej rovnice predstavuje deriváciu súčinu hľadaného riešenia a integračného faktora

$$[y \cdot e^{-5x}]' = 2x \cdot e^{-5x}.$$

Integrovaním oboch strán vzniknutej rovnice dostaneme

$$y \cdot e^{-5x} = \int 2x \cdot e^{-5x}\,dx.$$

Integrál $\int 2x\, e^{-5x} dx$ vzniknutý na pravej strane vypočítame pomocou metódy per partes

$$\int 2x \cdot e^{-5x}\, dx = -2\, e^{-5x} \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{25} \right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Rovnica je teraz v tvare

$$y \cdot e^{-5x} = -2\, e^{-5x} \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{25} \right) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Prenásobením oboch strán rovnice výrazom e^{5x} eliminujeme hľadané riešenie y. Všeobecné riešenie diferenciálne rovnice je v tvare

$$y = \left[-2\, e^{-5x} \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{25} \right) + c \right] e^{5x} = -\frac{2x}{5} - \frac{2}{25} + ce^{5x},\ c \in \mathbb{R}.$$

Lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientmi

Definícia

Lineárnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu s konštantnými koeficientmi bez pravej strany nazývame rovnicu

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0,$$

kde $a,\ b \in R$.

Riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu budeme hľadať v tvare $y = e^{\lambda x}$, kde λ je riešením charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Charakteristickú rovnicu dostaneme z diferenciálnej rovnice tak, že príslušné derivácie y nahradíme mocninami premennej λ.

Môžu nastať tri prípady:

1. Ak $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak koreňu λ_1 prislúcha riešenie diferenciálnej rovnice v tvare $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ a koreňu λ_2 prislúcha riešenie diferenciálnej rovnice v tvare $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Potom všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice zapíšeme ako lineárnu kombináciu riešení y_1 a y_2 v tvare

$$y = c_1\, e^{\lambda_1\, x} + c_2\, e^{\lambda_2\, x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Ak $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$, tak koreňu λ_1 prislúchajú dve riešenia diferenciálnej rovnice v tvare $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2 = x\, e^{\lambda_1 x}$. Potom všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice zapíšeme ako lineárnu kombináciu riešení y_1 a y_2 v tvare

$$y = c_1\, e^{\lambda_1\, x} + c_2\, x\, e^{\lambda_1\, x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Ak $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \alpha + \beta\, i$ a $\lambda_2 = \alpha - \beta\, i$, tak $y_1 = e^{\alpha\, x} \cos(\beta\, x)$ a $y_2 = e^{\alpha\, x} \sin(\beta\, x)$. Potom všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice zapíšeme ako lineárnu kombináciu riešení y_1 a y_2 v tvare

$$y = c_1\, e^{\alpha\, x} \cos(\beta\, x) + c_2\, e^{\alpha\, x} \sin(\beta\, x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad

Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 6y' + 5y = 0$.

Riešenie: Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Jej koreňmi sú $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$. Teda $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ a $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a tak im odpovedajú riešenia $y_1 = e^{5x}$, $y_2 = e^x$. Potom riešenie diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1\, e^{5x} + c_2\, e^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad

Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Riešenie: Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Jej 2–násobným koreňom je $\lambda = 3$ a tak mu odpovedajú riešenia $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = x\, e^{3x}$. Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1\, e^{3x} + c_2\, x\, e^{3x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad

Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 2y' + 2y = 0$.

Riešenie: Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Jej koreňmi sú komplexné združené čísla $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$, ktorým odpovedajú riešenia $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$. Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1\, e^x \cos x + c_2\, e^x \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Definícia

Lineárnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu s konštantnými koeficientmi s pravou stranou nazývame rovnicu

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(x),$$

kde $a,\ b \in R$ *a* $f(x)$ *je spojitá funkcia.*

Riešenie danej lineárnej diferenciálnej rovnice s pravou stranou dostaneme ako súčet riešenia rovnice bez pravej strany a partikulárneho riešenia rovnice s pravou stranou. Budeme riešiť lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu, kde na pravej strane rovnice sú nasledovné funkcie:

a) $f(x) = P_m(x)\,e^{\alpha x}$, kde $P_m(x)$ je polynóm stupňa m a $\alpha \in R$ je k–násobným koreňom charakteristickej rovnice danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany. Potom partikulárne riešenie hľadáme v tvare $y^* = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m)\,e^{\alpha x}\,x^k$, kde $\alpha \in R$ je k–násobným koreňom charakteristickej rovnice danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany.

b) $f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\, e^{\alpha x}$, kde $A, B, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ a $\alpha + \beta i$ je k–násobným koreňom charakteristickej rovnice danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany.
Potom
$y^* = M\,(\cos\beta x + N\sin\beta x)\, e^{\alpha x}\, x^k$, kde M, N sú neznáme konštanty.

c) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Potom $y^* = y_1^* + y_2^*$, kde y_1^*, y_2^* sú riešenia diferenciálnej rovnice s pravými stranami $f_1(x)$, $f_2(x)$.

Príklad

Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 8y' + 16y = x\,e^{2x}$.

Riešenie: Najprv riešime diferenciálnu rovnicu bez pravej strany

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0.$$

Jej 2–násobným koreňom je $\lambda = 4$, ktorému odpovedajú riešenia $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = x\,e^{4x}$. Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany je v tvare

$$y = c_1\,e^{4x} + c_2\,x\,e^{4x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou je v tvare

$$y = c_1\,e^{4x} + c_2\,x\,e^{4x} + y^*,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kde tvar y^* určíme podľa funkcie na pravej strane zadanej diferenciálnej rovnice.

Keďže pravá strana rovnice je rovná $x\,e^{2x}$, máme typ $f(x) = P_m(x)\,e^{\alpha x}$, kde $m = 1$ a $\alpha = 2$. Potom

$$y^* = (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m)\,e^{\alpha x}\,x^k = (ax + b)\,e^{2x}\,x^0 = (ax + b)\,e^{2x},$$

lebo $\alpha = 2$ nie je koreňom (teda je 0–násobným koreňom, t.j. $k = 0$) charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice bez pravej strany.

$$\begin{aligned}(y^*)' &= a\,e^{2x} + 2(ax + b)\,e^{2x},\\ (y^*)'' &= 2a\,e^{2x} + 2a\,e^{2x} + 4(ax + b)\,e^{2x} = 4a\,e^{2x} + 4(ax + b)\,e^{2x}\end{aligned}$$

a následne dosadíme y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ za y, y', y'' do zadanej diferenciálnej rovnice s pravou stranou

$$4a\,e^{2x} + 4(ax + b)\,e^{2x} - 8\left[a\,e^{2x} + 2(ax + b)\,e^{2x}\right] + 16(ax + b)\,e^{2x} = x\,e^{2x}.$$

Úpravou a porovnaním koeficientov polynómov na oboch stranách rovnice dostaneme $a = b = \frac{1}{4}$ a teda $y^* = (\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})e^{2x}$. Riešenie danej diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1\,e^{4x} + c_2\,x\,e^{4x} + y^* = c_1\,e^{4x} + c_2\,x\,e^{4x} + \frac{1}{4}(x + 1)e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Príklad

Nájdime riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + y = 2\sin x - \cos x$.

Riešenie: Najprv riešime diferenciálnu rovnicu bez pravej strany

$$y'' + y = 0.$$

Nahradením derivácií y mocninami λ zapíšeme charakteristickú rovnicu danej diferenciálnej rovnice

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Jej koreňmi sú $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, ktorým odpovedajú riešenia $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Potom riešenie danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany je v tvare

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice s pravou stranou je v tvare

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + y^*,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kde tvar y^* určíme podľa funkcie na pravej strane zadanej diferenciálnej rovnice.

Keďže pravá strana rovnice je rovná $2\sin x - \cos x$, máme typ $f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\, e^{\alpha x}$, kde $\alpha = 0$ a $\beta = 1$. Potom

$$y^* = (M\cos\beta x + N\sin\beta x)\, e^{\alpha x}\, x^k = (M\cos x + N\sin x)x,$$

lebo $\alpha + \beta i = i$ je jednoduchým koreňom (teda je 1–násobným koreňom, t. j. $k = 1$) charakteristickej rovnice diferenciálnej rovnice bez pravej strany. Zderivujeme y^*

$$(y^*)' = (-M\sin x + N\cos x)x + (M\cos x + N\sin x),$$
$$(y^*)'' = (-M\cos x - N\sin x)x + (-M\sin x + N\cos x) - M\sin x + N\cos x,$$

a následne dosadíme y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ za y, y', y'' do zadanej diferenciálnej rovnice s pravou stranou

$$(-M\cos x - N\sin x)x + (-M\sin x + N\cos x) - M\sin x + N\cos x - (M\cos x + N\sin x)x =$$
$$2\sin x - \cos x.$$

Úpravou a porovnaním koeficientov polynómov na oboch stranách rovnice dostaneme $M = -1$, $N = -\frac{1}{2}$ a teda $y^* = \left(-\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) x$. Riešenie diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + y^* = c_1\cos x + c_2\sin x - \left(\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) x.$$

Komplexné čísla

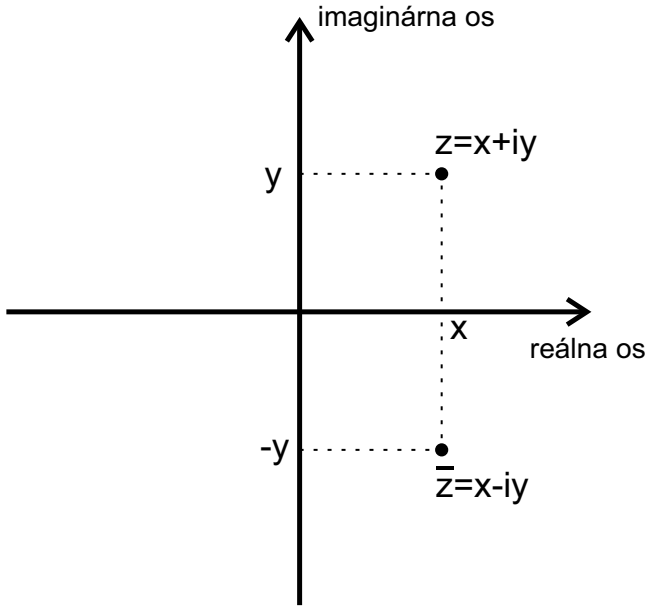
Každé komplexné číslo z vieme vyjadriť v tvare $z = x + iy$, kde

- i je imaginárna jednotka vyhovujúca podmienke $i^2 = -1$,
- reálne číslo x je reálna časť komplexného čísla ($x = Re(z)$),
- reálne číslo y je imaginárna časť komplexného čísla ($y = Im(z)$).

Tento tvar nazývame algebraický tvar komplexného čísla z. Komplexné číslo v tvare $\bar{z} = x - iy$ sa nazýva komplexne združené k číslu z.

Absolútna hodnota (modul) komplexného čísla z je nezáporné reálne číslo dané vzťahom $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mocniny imaginárnej jednotky:

$i^0 = 1,\ i^1 = 1,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1, i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1, \ldots$



Funkcia komplexnej premennej

Definícia

Na množine M komplexných čísel je definovaná **komplexná funkcia** f **komplexnej premennej**, *ak ku každému komplexnému číslu $z \in M$ je priradené práve jedno komplexné číslo $w = f(z)$. Množinu M nazývame* **definičným oborom funkcie** f *a množinu L všetkých čísel $f(z)$, $z \in M$ nazývame* **oborom hodnôt funkcie** f. *Komplexnú funkciu f komplexnej premennej s definičným oborom M môžeme zapísať aj v tvare*

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),$$

kde $z = x + i\, y$ a $u(x, y)$, $v(x, y)$ sú reálne funkcie dvoch reálnych premenných x a y.

Elementárne funkcie komplexnej premennej

- Polynóm komplexnej premennej je funkcia

$$w = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

- Racionálna funkcia je podiel dvoch polynómov, pričom menovateľ nie je nulový polynóm.
- Exponenciálna funkcia

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

- Goniometrické funkcie

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Analytická funkcie a derivácia funkcie komplexnej premennej

Definícia

Funkciu f komplexnej premennej nazývame **analytickou** *v bode* **a**, *$a \neq \infty$, ak existuje také okolie bodu* **a**, *že v každom jeho bode má funkcia f spojitú deriváciu. Bod* **a** *sa nazýva* **regulárny**, *ak je v danom bode funkcia f analytická. Bod* **a**, *v ktorom funkcia f nie je analytická, sa nazýva* **singulárny**.

Veta

Funkcia komplexnej premennej $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, kde $z = x + i\, y$, má v komplexnom čísle a deriváciu $f'(z)$ práve vtedy, keď funkcie $u(x, y)$, $v(x, y)$ sú v čísle a diferencovateľné a platia Cauchy–Riemanove vzťahy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Ak funkcia komplexnej premennej $f(z)$ má v komplexnom čísle a deriváciu, tak

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Príklad

Zistite, či funkcia $f(z) = z^3$ je analytická a ak áno, určte jej deriváciu.

Riešenie: Určíme reálnu a imaginárnu zložku $f(z)$. Dostávame $f(z) = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3 = x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2y - y^3)$, teda

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad \text{a} \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3.$$

Aby funkcia $f(z)$ bola analytická, musia pre ňu platiť Cauchy–Riemanove vzťahy. Vypočítame parciálne derivácie:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy.$$

Keďže platia Cauchy–Riemanove vzťahy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

tak funkcia $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\,(3x^2 - y^3)$ je analytická. Dostávame

$$f'(z) = (3x^2 - 3y^2) + 6ixy = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3(x+iy)^2 = 3z^2.$$

Laplaceova transformácia

Laplaceova transformácia je transformácia, ktorá umožňuje zjednodušiť riešenie niektorých typov úloh týkajúcich sa predovšetkým diferenciálnych rovníc. Každej funkcii $f(t)$ z určitej triedy funkcií, budeme ju nazývať **predmetom** (originálom, vzorom), určíme na základe určitých pravidiel jej **obraz** $F(p)$, $p \in \mathbb{C}$, pričom zložitejším operáciám v množine predmetov $\{f(t)\}$ by mali odpovedať jednoduchšie operácie v množine obrazov $\{F(p)\}$. Uvedenú vlastnosť zapisujeme v tvare $f(t) \doteqdot F(p)$ a hovoríme, že predmet $f(t)$ korešponduje s obrazom $F(p)$. Laplaceov obraz $F(p)$ je pritom daný pomocou vzťahu

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt.$$

Tabuľka korešpondencií základných funkcií

Predmet		**Obraz**
1	$\doteqdot$	$\frac{1}{p}$
e^{at}	$\doteqdot$	$\frac{1}{p-a}$
t^n	$\doteqdot$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\doteqdot$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\doteqdot$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

Základné vety korešpondencií $f(t) \doteqdot F(p)$

1. $\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p)$ (veta o lineárnosti)
2. $e^{at} f(t) \doteqdot F(p-a)$ (veta o tlmení)
3. $f'(t) \doteqdot p\,F(p) - f(0)$ (veta o derivovaní predmetu)

   $f''(t) \doteqdot p^2\,F(p) - pf(0) - f'(0)$
4. $-t\,f(t) \doteqdot F'(p)$ (veta o derivovaní obrazu)
5. $\dfrac{f(t)}{t} \doteqdot \int_{p}^{\infty} F(z)dz$ (veta o integrovaní obrazu)

Príklad

Nájdime Laplaceov obraz $F(p)$ ku predmetu $f(t) = 8t\,e^{-t}$.

Riešenie: Použijeme vety o tlmení. Podľa tabuľky korešpondencií platí

$$t \doteqdot \frac{1}{p^2}.$$

Využitím vety o tlmení (násobiť predmet $f(t)$ výrazom e^{at}, $a = -1$, znamená odčítať od argumentu p obrazu $F(p)$ konštantu a) môžeme zapísať

$$t\,e^{-t} \doteqdot \frac{1}{(p+1)^2}$$

a nakoniec využitím vety o lineárnosti (násobiť predmet $f(t)$ konštantou $c = 8$ znamená násobiť obraz $F(p)$ rovnakou konštantou $c = 8$) dostávame

$$8t\,e^{-t} \doteqdot \frac{8}{(p+1)^2}.$$

Príklad

Nájdime Laplaceov obraz $F(p)$ ku predmetu $f(t) = t^2 \cos t$.

Riešenie: Podľa tabuľky korešpondencií platí

$$\cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}.$$

Využitím vety o derivovaní obrazu (násobiť predmet $f(t)$ výrazom $-t$ znamená derivovať obraz $F(p)$) môžeme zapísať

$$-t \cos t \doteqdot \left(\frac{p}{p^2+1}\right)' = \frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}.$$

Opätovným využitím vety o derivovaní obrazu dostaneme

$$t^2 \cos t = -t\,(-t \cos t) \doteqdot \left(\frac{1-p^2}{(p^2+1)^2}\right)' = \frac{2p(p^2-3)}{(p^2+1)^3}.$$

Spätná Laplaceova transformácia

Obrátený postup, teda ak ku známemu obrazu $F(p)$ priradíme korešpondujúci predmet $f(t)$, nazývame **spätná Laplaceova transformácia**. Pomocou nej môžeme nájsť riešenie niektorých diferenciálnych rovníc resp. systémov obyčajných diferenciálnych rovníc oveľa jednoduchšie a rýchlejšie.
Ak funkcia $F(p)$ je analytická až na konečný počet singulárnych bodov $a_k \in C$, $k = 1, \ldots, m$ a a_k sú póly funkcie $F(p)$, tak k danému obrazu $F(p)$ môžeme nájsť predmet $f(t)$:

1. pomocou rezíduí v póloch

$$f(t) = \begin{cases} \sum\limits_k \operatorname{res}\left[F(p)\, e^{pt}\right]_{p=a_k} & \text{pre} \quad t > 0, \\ 0 & \text{pre} \quad t \leq 0, \end{cases}$$

2. rozkladom $F(p)$ na parciálne zlomky a následným použitím tabuľky korešpondencií základných funkcií a základných viet.

Rezíduum funkcie

1. Ak bod $p = a_k$ je jednoduchý pól funkcie $F(p)$ (1-násobný nulový bod menovateľa), potom

$$\operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=a_k} = \lim_{p\to a_k}[(p-a_k)F(p)e^{pt}]$$

2. Ak bod $p = a_k$ je m-násobný pól funkcie $F(p)$ (m-násobný nulový bod menovateľa), potom

$$\operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=a_k} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{p\to a_k}[(p-a_k)^m F(p)e^{pt}]^{(m-1)}$$

Príklad

Pomocou spätnej Laplaceovej transformácie nájdime predmet $f(t)$ k obrazu $F(p) = \dfrac{p-2}{p(p+4)}$.

Riešenie: Úlohu vyriešime pre porovnanie oboma spôsobmi.
1. Ak chceme nájsť predmet $f(t)$ pomocou rezíduí, musíme najprv nájsť póly funkcie $F(p) = \frac{p-2}{p(p+4)}$. Funkcia $F(p)$ má dva jednoduché póly ($m = 0$) a to $a_1 = 0$, $a_2 = -4$. Vypočítame rezíduá v týchto póloch:

$$\operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=a_1} = \operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=0} = \lim_{p\to 0}\left[(p-0)\,\frac{p-2}{p(p+4)}\,e^{pt}\right] == -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=a_2} = \operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=-4} = \lim_{p\to 0}\left[(p+4)\,\frac{p-2}{p(p+4)}\,e^{pt}\right] = \frac{3}{2}\,e^{-4t}.$$

Teda

$$f(t) = \operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=0} + \operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=-4} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,e^{-4t}.$$

2. Rozkladom $F(p)$ na parciálne zlomky dostaneme

$$F(p) = \frac{p-2}{p(p+4)} = \frac{-\frac{1}{2}}{p} + \frac{\frac{3}{2}}{p+4}.$$

Z tabuľky korešpondencií vyplýva

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{p} \doteqdot -\frac{1}{2}\,1 = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{2}\,\frac{1}{p+4} \doteqdot \frac{3}{2}\,e^{-4t}.$$

Využitím vety o lineárnosti (1) (násobiť predmet $f(t)$ konštantou c znamená násobiť obraz $F(p)$ rovnakou konštantou c) dostávame

$$f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,e^{-4t}.$$

Príklad

Pomocou spätnej Laplaceovej transformácie nájdime predmet $f(t)$ ku obrazu $F(p) = \dfrac{p+3}{(p+1)^3}$.

Riešenie: Úlohu vyriešime pomocou rezíduí. Funkcia $F(p)$ má práve jeden trojnásobný pól ($k = 3$) a to $a = -1$. Rezíduum v póle $a = -1$ je

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=a} &= \operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=-1} = \frac{1}{2!}\lim_{p\to-1}\left[(p+1)^3\,\frac{p+3}{(p+1)^3}\,e^{pt}\right]'' = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\left[(p+3)\,e^{pt}\right]'' = \frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\left[e^{pt} + (p+3)\,t\,e^{pt}\right]' = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\left[t\,e^{pt} + t\,e^{pt} + (p+3)\,t^2\,e^{pt}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left(2\,t\,e^{-t} + 2\,t^2\,e^{-t}\right) = t\,e^{-t}(1+t).
\end{aligned}$$

Preto

$$f(t) = \operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt}\right]_{p=-1} = t\,e^{-t}(1+t).$$