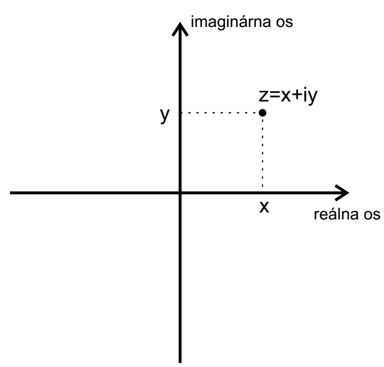
Komplexné čísla

Komplexné čísla v algebraickom tvare

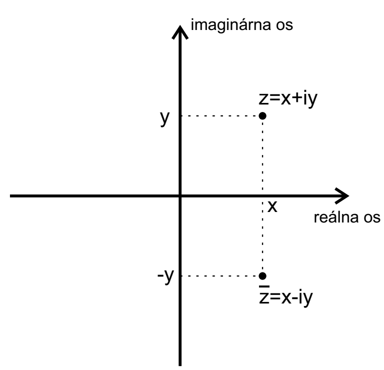
Každé komplexné číslo z vieme vyjadriť v tvare $z = x + iy$, kde

- i je imaginárna jednotka vyhovujúca podmienke $i^2 = -1$,
- reálne číslo x je reálna časť komplexného čísla ($x = Re(z)$),
- reálne číslo y je imaginárna časť komplexného čísla ($y = Im(z)$).

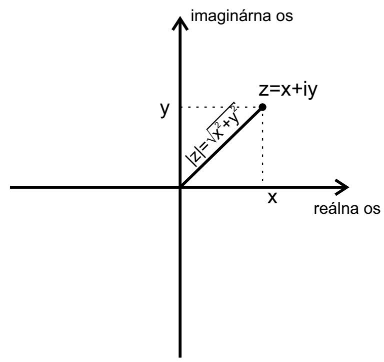
Tento tvar nazývame algebraický tvar komplexného čísla z.
Komplexné čísla znázorňujeme v Gaussovej rovine.



Komplexné číslo v tvare $\bar{z} = x - iy$ sa nazýva komplexne združené k číslu $z = x + iy$.



Absolútna hodnota (modul) komplexného čísla $z = x + iy$ je nezáporné reálne číslo dané vzťahom $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Poznámka: V Gaussovej rovine je to vzdialenosť medzi číslom z a začiatkom súradnicovej sústavy.

Matematické operácie s komplexnými číslami v algebraickom tvare

Nech $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$, potom:

- Súčet komplexných čísel z_1 a z_2 je komplexné číslo $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- k-násobok komplexného čísla z_1 je komplexné číslo $z = k \cdot z_1 = k \cdot x_1 + i(k \cdot y_1)$
- Súčin komplexných čísel z_1 a z_2 je komplexné číslo $z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$
- Podiel komplexných čísel z_1 a z_2 je komplexné číslo $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i(\frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2})$

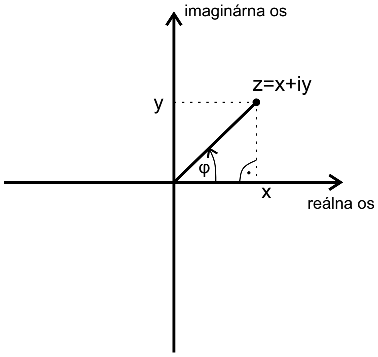
Dve komplexné čísla $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ sa rovnajú, ak sa rovnajú ich reálne zložky ($x_1 = x_2$) a súčasne sa rovnajú ich imaginárne zložky ($y_1 = y_2$).

Umocňovanie imaginárnej jednotky:

$$
\begin{array}{lll}
i^0 = 1 & i^4 = 1 & i^8 = 1 \\
i^1 = i & i^5 = i & . \\
i^2 = -1 & i^6 = -1 & . \\
i^3 = -i & i^7 = -i & .
\end{array}
$$

Komplexné čísla v goniometrickom tvare

Zápisu $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ hovoríme goniometrický tvar komplexného čísla z.



- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$
- $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$

Matematické operácie s komplexnými číslami v goniometrickom tvare

Nech $z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, potom:

- Súčin komplexných čísel z_1 a z_2 je komplexné číslo
  $z = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$
- Podiel komplexných čísel z_1 a z_2 je komplexné číslo
  $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$
- n-tá mocnina komplexného čísla z_1 je komplexné číslo
  $z = z_1^n = |z_1|^n\,[\cos(n\varphi_1) + i\sin(n\varphi_1)]$
- n-tá odmocnina komplexného čísla z_1 je komplexné číslo
  $z = \sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|}(\cos\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_1 + 2k\pi}{n})$,
  $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Komplexné čísla v exponenciálnom tvare

Zápisu $z = |z|\,\mathrm{e}^{\,i\varphi}$ hovoríme exponenciálny tvar komplexného čísla z.

Matematické operácie s komplexnými číslami v exponenciálnom tvare

Nech $z_1 = |z_1|\,\mathrm{e}^{\,i\varphi_1}$ a $z_2 = |z_2|\,\mathrm{e}^{\,i\varphi_2}$, potom:

- Súčin komplexných čísel z_1 a z_2 je komplexné číslo
  $z = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\,\mathrm{e}^{\,i(\varphi_1+\varphi_2)}$

- Podiel komplexných čísel z_1 a z_2 je komplexné číslo
  $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{e}^{\,i(\varphi_1-\varphi_2)}$

- n-tá mocnina komplexného čísla z_1 je komplexné číslo
  $z = z_1^n = |z_1|^n\,\mathrm{e}^{\,in\varphi_1}$

- n-tá odmocnina komplexného čísla z_1 je komplexné číslo
  $z = \sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{|z_1|}\,\mathrm{e}^{\,i\frac{\varphi_1+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \ldots, n-1$