FUNKCIA REÁLNEJ PREMENNEJ

Pojem funkcia

Definícia 1 Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny. Funkcia (zobrazenie) f je predpis, ktorý každému prvku x z množiny A priradí práve jeden prvok y z množiny B.
Zapisujeme

$$f : A \to B.$$

Prvku x funkcia f priraďuje prvok y, zapisujeme $y = f(x)$.

- Definičným oborom $D(f)$ funkcie f nazývame množinu A.
- Oborom hodnôt $H(f)$ funkcie f nazývame množinu tých prvkov z B, ktoré sú priradené nejakým prvkom z A.
- Grafom funkcie f nazývame množinu všetkých dvojíc $[x, y]$, kde prvá súradnica x patrí do definičného oboru funkcie a druhá súradnica y je hodnota funkcie v x.

Ohraničené funkcie

Definícia 2 Funkciu f nazývame zhora ohraničenou, ak je zhora ohraničná množina jej funkčných hodnôt.

Definícia 3 Funkciu f nazývame zdola ohraničenou, ak je zdola ohraničná množina jej funkčných hodnôt.

Definícia 4 Ak je funkcia f ohraničená zhora aj zdola, tak hovoríme, že je ohraničená.

Definícia 5 Ak má množina $H(f)$ najväčší prvok, tak toto číslo nazývame maximom funkcie f a označujeme $max\ f(x)$.

Definícia 6 Ak má množina $H(f)$ najmenší prvok, tak toto číslo nazývame minimom funkcie f a označujeme $min\ f(x)$.

Monotónne funkcie

Definícia 7 Funkciu f nazývame rastúcou na $D(f)$, ak pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.

Definícia 8 Funkciu f nazývame klesajúcou na $D(f)$, ak pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Poznámka: Každú rastúcu a každú klesajúcu funkciu nazývame rýdzomonotónnou funkciou.

Definícia 9 Funkciu f nazývame neklesajúcou na $D(f)$, ak pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definícia 10 Funkciu f nazývame nerastúcou na $D(f)$, ak pre každé dva prvky $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Poznámka: Každú nerastúcu a každú neklesajúcu funkciu nazývame monotónnou funkciou.

Párne a nepárne funkcie

Definícia 11 Funkcia f sa nazýva párna, ak platí

1. pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$,
2. $f(-x) = f(x)$, pre každé $x \in D(f)$.

Poznámka: Graf párnej funkcie je osovo súmerný podľa osi y.

Definícia 12 Funkcia f sa nazýva nepárna, ak platí

1. pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$,
2. $f(-x) = -f(x)$, pre každé $x \in D(f)$.

Poznámka: Graf nepárnej funkcie je stredovo súmerný podľa stredu súradnicového systému.

Periodické a zložené funkcie

Definícia 13 Funkciu f nazývame periodickou, ak existuje také reálne číslo $p \neq 0$, že pre každé $x \in D(f)$ platí $f(x+p) = f(x)$. Najmenšie také číslo p nazývame periódou funkcie f.

Definícia 14 Nech $g : A \to B$, $f : B \to C$. Potom funkciu $f\big(g(x)\big) : A \to C$ nazývame zloženou funkciou.

Prostá a inverzná funkcia

Definícia 15 Funkciu f nazývame prostou (injektívnou), ak pre každé $x_1, x_2 \in D(f)$ platí implikácia $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Poznámka: Každá rýdzomonotónna funkcia je prostá.

Definícia 16 Nech f je prostá funkcia s definičným oborom $D(f)$ a s oborom hodnôt $H(f)$. Funkciu f^{-1} nazývame inverznou funkciou k funkcii f, ak je

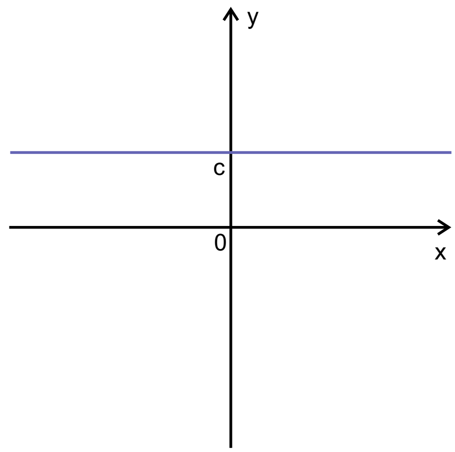
a) definovaná na $H(f)$,

b) priraďuje číslu $y \in H(f)$ číslo $x \in D(f)$, pre ktoré platí $y = f(x)$, čiže $f^{-1}(y) = x$.

Poznámka: Graf inverznej funkcie f^{-1} je súmerný ku grafu funkcie f podľa priamky $y = x$.

Elementárne funkcie

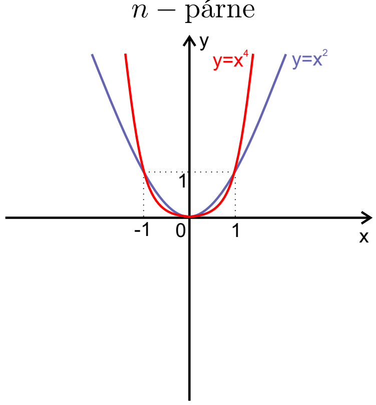
Konštantná funkcia $y = c$, $c \in \mathbb{R}$



$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \{c\}$, párna funkcia

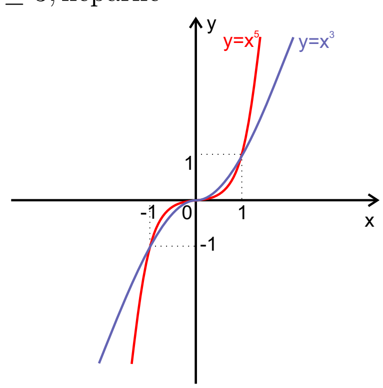
Mocninová funkcia $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$n -$ párne



$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle 0, \infty)$
párna funkcia

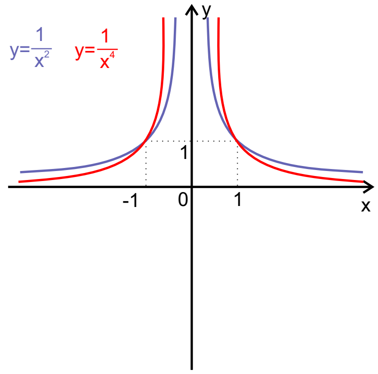
$n \geq 3$, nepárne



$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$
nepárna funkcia

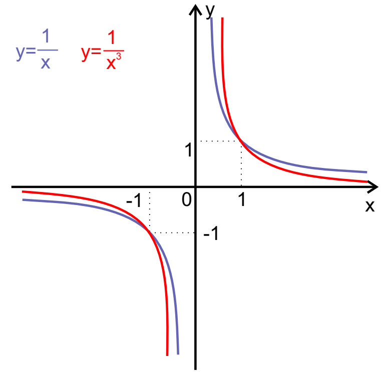
Mocninová funkcia $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$n -$ párne



$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = (0, \infty)$
párna funkcia

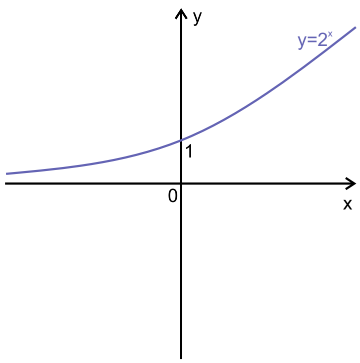
$n -$ nepárne



$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
nepárna funkcia

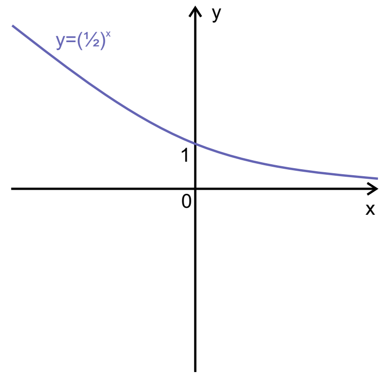
Exponenciálna funkcia $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$a > 1$



$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = (0, \infty)$
nie je párna ani nepárna

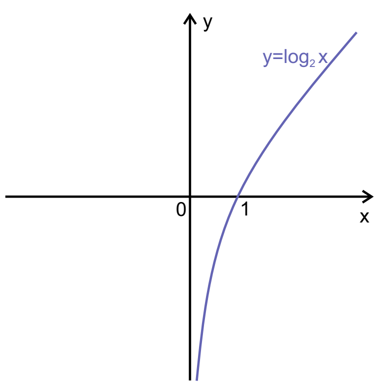
$0 < a < 1$



$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}, H(f) = (0, \infty)$
nie je párna ani nepárna

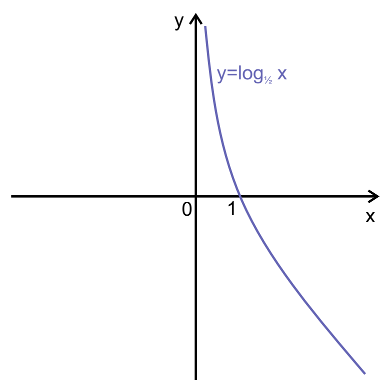
Logaritmická funkcia $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

$a > 1$



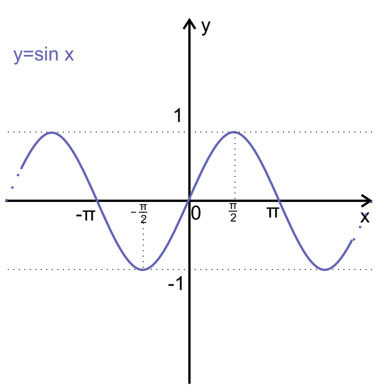
$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = \mathbb{R}$
nie je párna ani nepárna

$0 < a < 1$

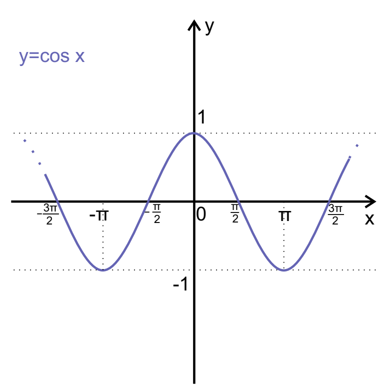


$D(f) = (0, \infty),\ H(f) = \mathbb{R}$
nie je párna ani nepárna

Goniometrické funkcie $y = \sin x$, $y = \cos x$

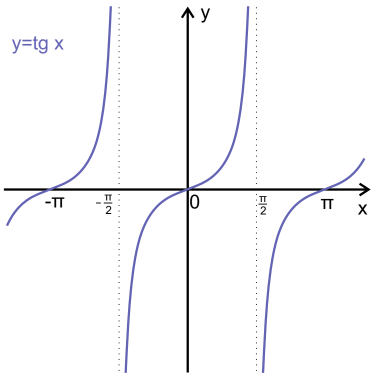


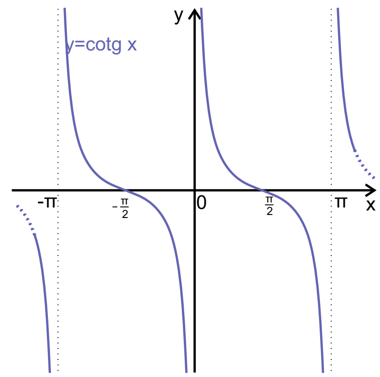
$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
nepárna funkcia



$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \langle -1, 1 \rangle$
párna funkcia

Goniometrické funkcie $y = tg\ x$, $y = cotg\ x$

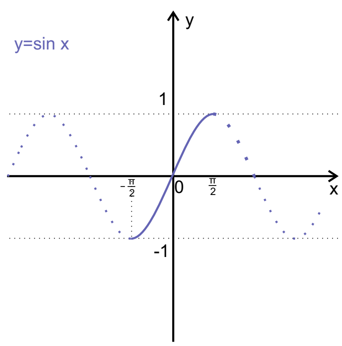


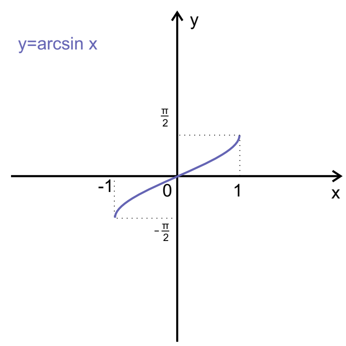


$D(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\},\ H(f) = \mathbb{R}$
nepárna funkcia

$D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi;\ ,k \in \mathbb{Z}\},\ H(f) = \mathbb{R}$
nepárna funkcia

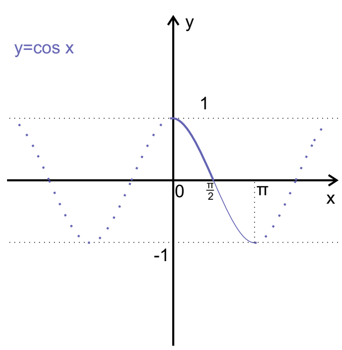
Cyklometrické funkcie $\mathbf{y}{=}\arcsin x$

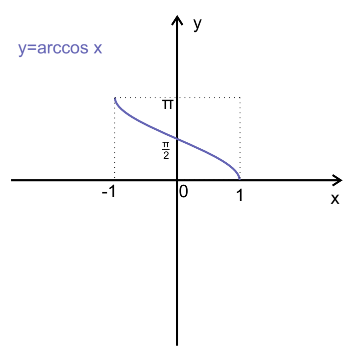




$D(f) = \langle -1, 1\rangle,\ H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$
nepárna funkcia

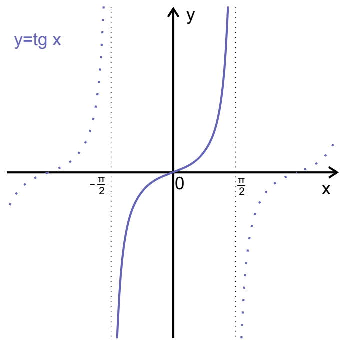
Cyklometrické funkcie $\mathbf{y}{=}\arccos x$

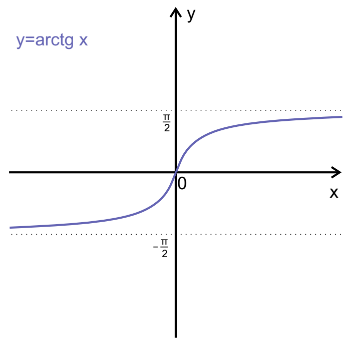




$D(f) = \langle -1, 1\rangle,\ H(f) = \langle 0, \pi\rangle$
nie je párna ani nepárna

Cyklometrické funkcie $y = arctg\ x$

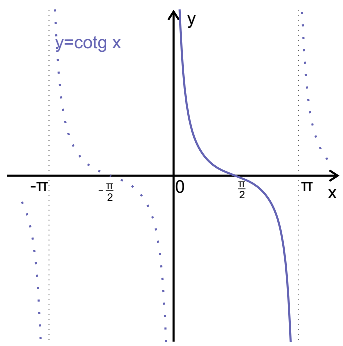


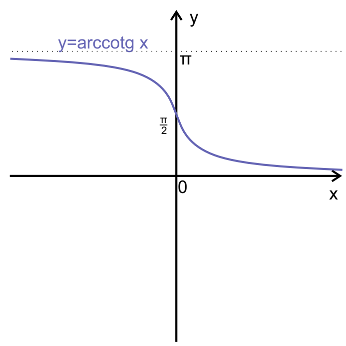


$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

nepárna funkcia

Cyklometrické funkcie $y = arccotg\ x$





$D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \langle 0, \pi \rangle$

nie je párna ani nepárna