Matematika 2 – 1.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Cvičiaca: RNDr. Z. Gibová, PhD. , (zuzana.gibova@tuke.sk)

Boženy Nemcovej 32, 6. poschodie, č.k.: 614

konzultácie: utorok 10:00 - 11:00, 14:00 - 15:00, v iný deň dohodou

cvičenia (povinné), max. 3 ospravedlnené neúčasti (stačí ospravedlniť mailom, napísať aj študijnú skupinu), prednášky (link na stránke KMTI – Výučba – aktuálne predmety – Matematika II)

Prenášajúci: doc. RNDr. Blanka Baculíková, PhD.

Predmet končí KZ: 2 zápočtové písomky – získať v súčte aspoň 51 bodov

1ZP - 8. týždeň za 50 b (35 b – príklady + 15 b teória),

2ZP – 1. týždeň skúškového obdobia za 50 b (35 b +15 b za teóriu)

OZP – v skúškovom období

Možnosť získať bonusové body za aktivitu na cvičení **max 5 bodov**.

Všetky materiály z prednášok (ppt) ale aj dú z cvičenia na stránke KMTI v časti Prílohy

Literatúra k cvičeniam

Baculíková B., Grinčová A.: MATEMATIKA II v príkladoch (elektronická zbierka) https://kmti.fei.tuke.sk/sites/default/files/2022-05/zbierka_0.pdf

Matematika II – **prerekvizita** predmetov **Matematika III, Numerické metódy**

Komplexné čísla
Základné pojmy

Algebraický tvar komplexného čísla *z* - dvojici [*a*; *b*] priradíme komplexné číslo

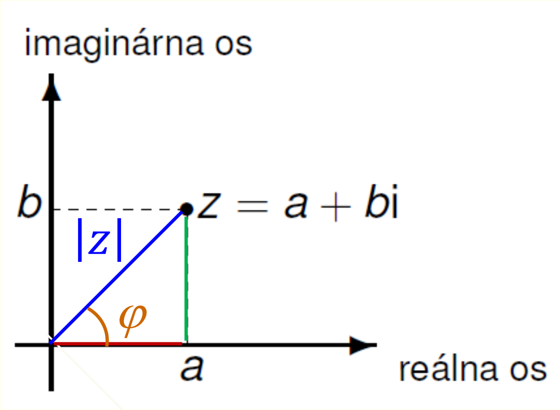
$z = a + bi$ — *a* nazývame reálna zložka

b nazývame imaginárna zložka

i - imaginárna jednotka [0; 1], $|i| = 1$

Platí: $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$

zobrazenie v rovine (Gausova rovina) [a; b]



Modul komplexného čísla (absolútna hodnota)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Goniometrický tvar komplexného čísla *z*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \wedge \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

$$\varphi - \text{argument}, \varphi \in R, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

exponenciálny tvar komplexného čísla *z*

$$z = |z|\, e^{i\varphi} \qquad\qquad e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Operácie s komplexnými číslami

Súčet (rozdiel) – sčítavame (odčítavame) po zložkách, osobitne reálne zložky a osobitne imaginárne zložky

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 \mathrm{i}) \pm (a_2 + b_2 \mathrm{i}) = a_1 \pm a_2 + \mathrm{i}(b_1 \pm b_2)$$

Súčin – násobíme každú zložku každou

$$z_1 . z_2 = (a_1 + b_1 \mathrm{i})(a_2 + b_2 \mathrm{i}) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + \mathrm{i}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Podiel – násobíme vhodnou jednotkou tak, aby sme sa v menovateli zbavili komplexného čísla, použijeme **komplexne združené číslo $\bar{z}$** k číslu v menovateli

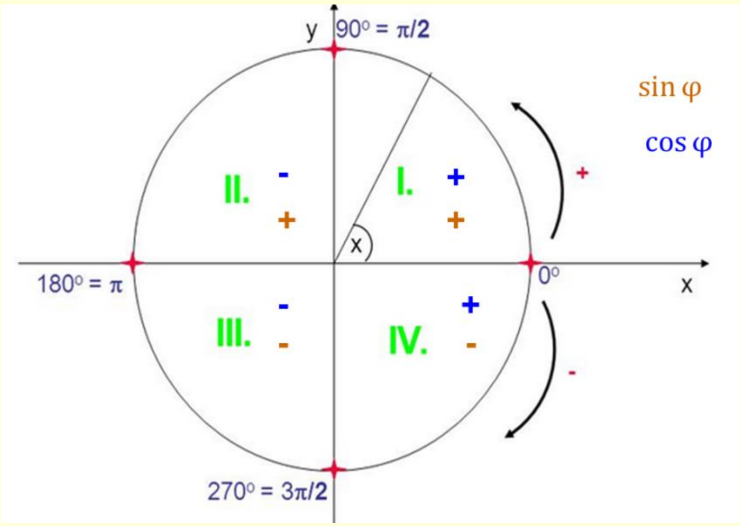
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 \mathrm{i})}{(a_2 + b_2 \mathrm{i})}\frac{(a_2 - b_2 \mathrm{i})}{(a_2 - b_2 \mathrm{i})} = \frac{(a_1 + b_1 \mathrm{i})(a_2 - b_2 \mathrm{i})}{a_2^2 + b_2^2}$$

komplexne združené číslo $\bar{z}$ k číslu $z = a + bi$ – je číslo, ktoré má rovnakú reálnu a imaginárnu zložku, ale opačné znamienko pred imaginárnou zložkou $\bar{z} = a - bi$

Umocňovanie – použitím **Moivreovej vety**

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi) \quad , n \in Z$$

Trochu goniometrie



I. Kvadrant: φ

II. Kvadrant: $\pi - \varphi$

III. Kvadrant: $\pi + \varphi$

IV. Kvadrant: $2\pi - \varphi$

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi \qquad \cos(-\varphi) = \cos\varphi$$

$$\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi \qquad \cos(\pi + \varphi) = -\cos\varphi$$

$$\sin(2\pi - \varphi) = -\sin\varphi \qquad \cos(2\pi - \varphi) = \cos\varphi$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	0	-1	0
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1	0	1

Pr. 1 Sú dané komplexné čísla $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$. Určte

a) $z_1 + z_2$,

b) $z_1 - z_2$,

c) $z_1 . z_2$,

d) $\frac{z_1}{z_2}$,

e) $|\, z_1|$,

f) ${z_2}^2 . i$

Pr. 2 – str. 54 / 3 Vypočítajte

$(2+3i)(4+i)$	$5+14i$

$$(2+3i)(4+i) = 2.4 + 2.i + 3i.4 + \underbrace{3i.i}_{3i.i\,=\,3i^2\,=\,3.(-1)} = 8 + 14i - 3 = 5 + 14i$$

Pr. 3 Je dané komplexné číslo $z = \frac{1-2i}{3+4i}$. Určte $|z|$.

$$\frac{1-2i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-6i-4i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{-5-10i}{9+16} = \frac{5(-1-2i)}{25} = \frac{-1-2i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

úprava pomocou komplexne združeného čísla 3 - 4i,
násobíme čitateľa aj menovateľa

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = -\frac{1}{5} \quad b = -\frac{2}{5}$$

$$\left|\frac{1-2i}{3+4i}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Pr. 4 Komplexné číslo $z = 1 + \sqrt{3}i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

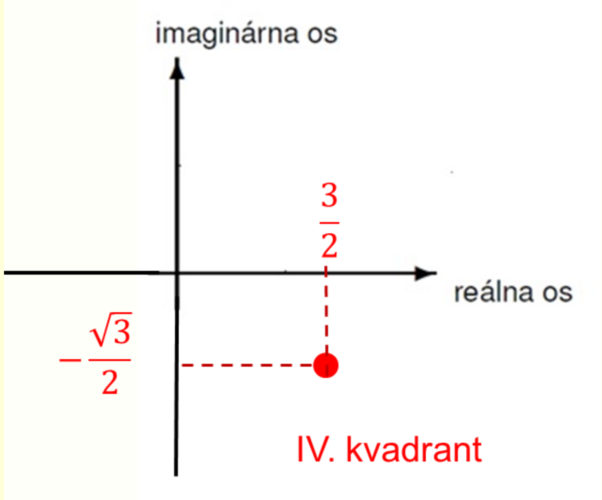
Pr. 5 – str. 55 / 15

Komplexné číslo $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

Pr. 6 – str. 55 / 18

Komplexné číslo $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \frac{3}{2} \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

IV. kvadrant:

$$\varphi = 2\pi - \varphi' = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$\boldsymbol{z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{11\pi}{6}}}$$

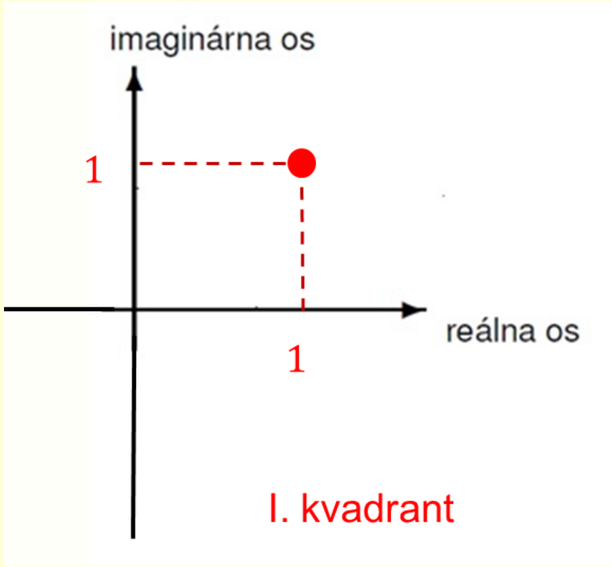
Pr. 7 – str. 55 / 13

Komplexné číslo $z = 1 + i$ zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = 1 \quad b = 1$$

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



I. kvadrant:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

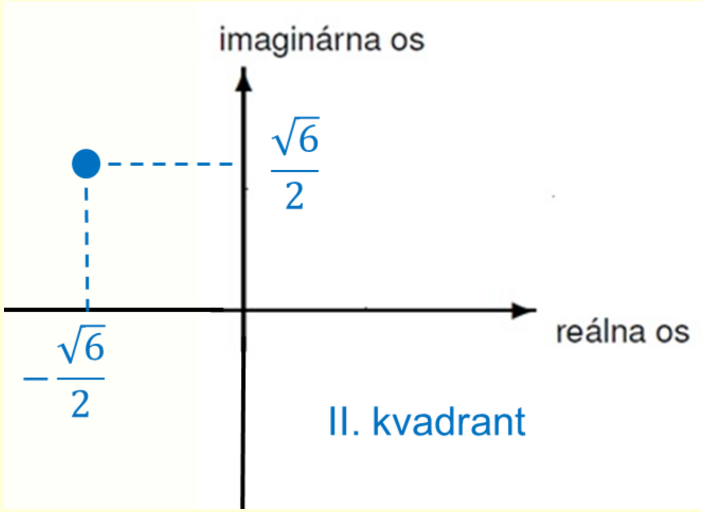
Pr.8 - str. 55 / 29

Určte z^5, ak $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Pr.9 - str. 55 / 31

Určte z^6, ak $z = (-2 - 2\sqrt{3}i)$.

Pr.10 - str. 55 / 25 Určte z^4, ak $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$.



$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$$a = -\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

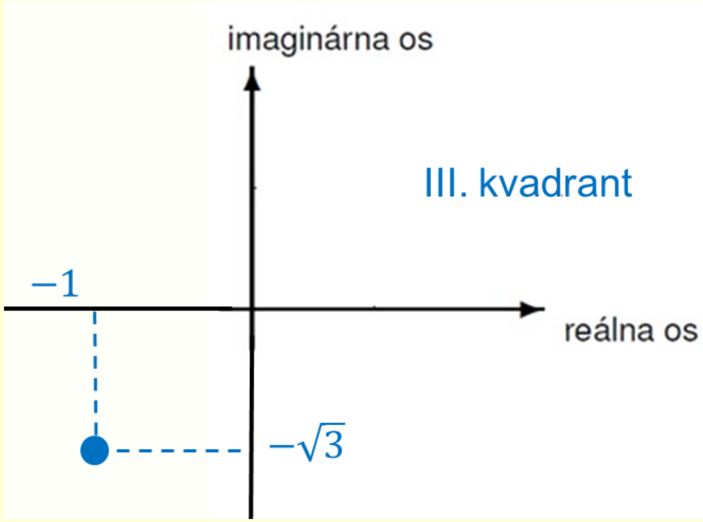
II. kvadrant: $\varphi = \pi - \varphi' = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{z^4 = \left(\sqrt{3}\right)^4 \left(\cos 4.\frac{3\pi}{4} + i\sin 4\frac{3\pi}{4}\right) = 9\left(\cos 3\pi + i\sin\ 3\pi\right) = 9(-1 + 0) = -9}$$

$$\cos 3\pi = \cos(\pi + 2\pi) = \cos\pi = -1 \qquad \sin 3\pi = \sin(\pi + 2\pi) = \sin\pi = 0$$

Pr.11 - str. 55 / 35 Určte z^5, ak $z = -1 - \sqrt{3}i$.



$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} \qquad a = -1 \quad b = -\sqrt{3}$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{-1}{2} \ \wedge\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

III. kvadrant: $\varphi = \pi + \varphi' = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$$z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

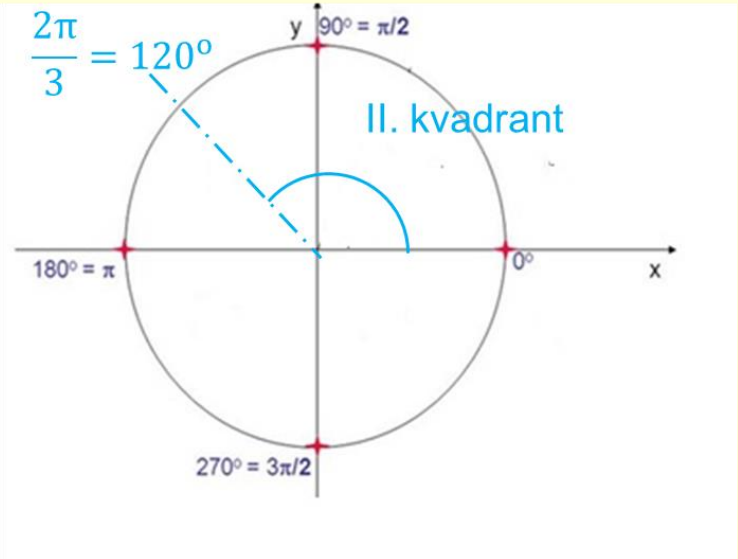
$$z^5 = 2^5\left(\cos 5\frac{4\pi}{3} + i\sin 5\frac{4\pi}{3}\right) = 2^5\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20}{3}\right)$$

Pr.11 - str. 55 / 35 Určte z^5, ak $z = -1 - \sqrt{3}i$.

$$z^5 = 2^5\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right) = 2^5\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^5\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\frac{20\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 18\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\sin\frac{20\pi}{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 18\pi\right) = \sin\frac{2\pi}{3}$$



II. kvadrant: $\varphi' = \pi - \varphi = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$$\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{z^5 = 2^5\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^4(-1 + i) = -16 + i16\sqrt{3})}$$

Dú: kap. Matematika I, str. 52 / 4, 6, 7, 8, 14, 16, 17, 18, 24, 26, 27, 28

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Komplexne združené číslo k číslu $z = -3 - 5i$ je
   a) $\bar{z} = -3 - 5i$,
   b) $\bar{z} = 3 + 5i$,
   c) $\bar{z} = -3 + 5i$.

2. Dve komplexné čísla násobíme tak,
   a) že vynásobíme samostatne reálne zložky a samostatne imaginárne zložky,
   b) že každú zložku vynásobíme každou zložkou,
   c) že druhé komplexné číslo násobíme komplexne združeným číslom.

3. Hodnota i^{7} je
   a) i,
   b -1,
   c) - i.

4. Dvojici [-2; 5] v Gaussovej rovine prináleží bod,
   a) ktorého prvá súradnica -2 leží na imaginárnej osi (y - ová os),
   b) ktorého druhá súradnica 5 leží na imaginárnej osi (y - ová os),
   c) ktorého druhá súradnica 5 leží na reálnej osi (x - ová os).

5. Modul komplexného čísla je daný

a) $|z| = \sqrt{a + b}$

b) $|z| = a^2 + b^2$

c) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

6. Zápis komplexného čísla $\mathrm{z} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nazývame

a) goniometrický tvar,

b) exponenciálny tvar,

c) algebraický tvar.

Správne odpovede: 1c, 2b, 3c, 4b, 5c, 6a

Hodnotenie:

0 – 1 nesprávna odpoveď – máš vedomosti o komplexných číslach

2 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

3 a viac nesprávnych odpovedí – odporúčam sa na to ešte raz pozrieť