Matematika 2 – 3.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr.1 - str. 10 / 58

$$3x^5 + 17x^4 - 6x^3 - 96x^2 + 32x$$

Zistite, ktorý z koreňov 2 a - 4 je dvojnásobný koreň polynómu a urobte kanonický rozklad

Kanonický rozklad je $x(x-3)^3(5x+2)$

Polynómy
Rozklad racionálnej funkcie na elementárne (parciálne) zlomky

Funkciu $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nazývame **racionálnou funkciou.**

Ak

I. *n* < *m* je funkcia *f* (*x*) **rýdzoracionálna**

II. *n* > *m* je funkcia *f* (*x*) **nerýdzoracionálna**

I. Vieme rozložiť na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{A}{x-\alpha}, \quad \frac{A}{(x-\alpha)^n}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

kde $A, B, C, \alpha, p, q \in R,\ n \in N,\ p^2 - 4q < 0.$

II. Predelíme a vyjadríme ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie, ktorú rozložíme na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, st\ R(x) < m$$

Príklady rozkladu na parciálne zlomky

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-\alpha)^1(x-\beta)^1(x-\gamma)^1} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$$

tri reálne korene

tri zlomky

počet zlomkov

= počet

exponentov

v menovateli

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{x-3}$$

2-násobný koreň

(súčet mocnín v menovateli $2+1=3$

tri zlomky

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-2)^2(x-3)^1(x^2+px+q)^1} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} + \frac{Dx+E}{x^2+px+q}$$

súčet exponentov

$2+1+1=4 \Rightarrow$ počet zlomkov $= 4$

Pr. 2 – str. 17 / 1 rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{2x^2+10x-18}{x^3-2x^2-5x+6}$

1. Zistíme, či je funkcia rýdzoracionálna – stupeň polynómu v čitateli (2) je menši ako v menovateli (3), je rýdzoracionálna môžeme hneď rozkladať na parciálne zlomky

2. Urobíme kanonický rozklad menovateľa na súčin koreňových činiteľov

x^3-2x^2-5x+6

$$\frac{D(6)}{D(1)} = \frac{\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}}{\{\pm 1\}} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$1-2-5+6=0 \Rightarrow$ 1 je koreň

$(x-1)$

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	

-2 je koreň $(x+2)$

$(x-3)$

rozklad menovateľa $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$

3 Vyjadríme racionálnu funkciu pomocou parciálnych zlomkov a upravíme na spoločného menovateľa

$$\frac{2x^2+10x-18}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

$$2x^2+10x-18 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+2)$$

4a. Na vyjadrenie koeficientov A, B, C použijeme dosadzovaciu metódu (za neznámu *x* v rovnici dosadzujeme korene menovateľa, prípadne ďalšie možné hodnoty, napr. 0)

$x = 1$

$$2\cdot 1 + 10\cdot 1 - 18 = A\cdot(1+2)(1-3)$$

$$-6 = -6A$$

$$\underline{\underline{1 = A}}$$

$x = -2$ $\qquad 2 \cdot 4 - 20 - 18 = 15B$

$$-30 = 15B$$

$$\underline{\underline{-2 = B}}$$

$x = 3$ $\qquad 2 \cdot 9 + 30 - 18 = 10C$

$$30 = 10C$$

$$\underline{\underline{3 = C}}$$

$$\frac{2x^2 + 10x - 18}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$$

4b. Na vyjadrenie koeficientov A, B, C použijeme porovnávaciu metódu (porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách)

$$2x^2 + 10x - 18 = A(x^2 - x - 6) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 + x - 2)$$

x^2: $2 = A + B + C$

x^1: $10 = -A - 4B + C$

x^0: $-18 = -6A + 3B - 2C$

Pre určenie koeficientov riešime sústavu troch rovníc o troch neznámych.

Pr.3 rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2}$

$$x^3+2x^2-x-2=x(x^2-1)+2(x^2-1)=(x^2-1)(x+2)=(x+1)(x-1)(x+2)$$

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

$$3x^2+2x+1=A(x+1)(x+2)+B(x+2)(x-1)+C(x+1)(x-1)$$

$x=-2$: $$3(-2)^2+2(-2)+1=C(-2+1)(-2-1)$$ $$9=3C$$ $$C=3$$

$x=-1$: $$3(-1)^2+2(-1)+1=B(-1+2)(-1-1)$$ $$2=-2B$$ $$B=-1$$

$x=1$: $$3(1)^2+2(1)+1=A(1+1)(1+2)$$ $$6=6A$$ $$A=1$$

$$\frac{3x^2+2x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+2}$$

Pr. 4 – str. 17 / 14

rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\frac{4x^2+3x+2}{2x^3+3x^2-1}$

$$\frac{4x^2+3x+2}{2x^3+3x^2-1} = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-1}$$

Pr. 5 rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{5x^2 - 13x + 9}{x^3 - 3x^2 + 4}$

možné korene $\dfrac{\mathbf{D(4)}}{\boldsymbol{D(1)}} = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{4}\}$

	1	**-3**	**0**	**4**
-1		-1	4	-4
	1	- 4	4	**0**
2		2	- 4	
	1	- 2	**0**	

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)(x-2) = (x+1)(x-2)^2$$

$$\frac{5x^2 - 13x + 9}{x^3 - 3x^2 + 4} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

Pr. 5 rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{5x^2-13x+9}{x^3-3x^2+4}$

$$\frac{5x^2-13x+9}{x^3-3x^2+4}=\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

$$5x^2-13x+9=A(x+1)+B(x-2)(x+1)+C(x-2)^2$$

$x=--1$: $\quad 5+13+9=9C$

$C=3$

$x=2$: $\quad 20-26+9=3A$

$A=1$

$x=0$: $\quad 9=A(0+1)+B(-2)+C4$

$9=1-2B+12$

$B=2$

$$\frac{5x^2-13x+9}{x^3-3x^2+4}=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+1}$$

Pr. 6 - str. 16 / Pr. 6

rozložte v **R** na parciálne zlomky:

$$\frac{5x^2 - 7x + 9}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}$$

$$\frac{5x^2 - 7x + 9}{x^3 - 3x^2 + 2x - 6} = \frac{2x - 1}{x^2 + 2} + \frac{3}{x - 3}$$

Pr. 7 - str. 17 / 28

rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{x^2+7x+3}{x^4+2x^3+x+2}$

$$x^4+2x^3+x+2 = x(x^3+1)+2(x^3+1) = (x^3+1)(x+2) = (x+1)(x^2-x+1)(x+2)$$

$$\frac{x^2+7x+3}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$$x^2+7x+3 = A(x^2-x+1)(x+2)+B(x^2-x+1)(x+1)+(Cx+D)(x+1)(x+2)$$

$x=-1$: $\quad 1-7+3 = A(1+1+1)$

$$-3 = 3A \qquad A=-1$$

$x=-2$: $\quad 4-14+3 = B(-1)(4+2+1)$

$$-7=-7B \qquad B=1$$

$x=0$: $\quad 3 = 2A+B+2D$

$$3=-2+1+2D \qquad D=2$$

$x=1$: $\quad 1+7+3 = 3A+2B+(C+D)6$

$$11 = -3+2+6C+12 \qquad C=0$$

$$\frac{x^2+7x+3}{x^4+2x^3+x+2} = \frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x^2-x+1}$$

Dú: kap. Mat 2 – str. 17 / 2, 8. 11, 12, 20, 21, 27

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Funkciu $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nazývame rýdzoracionálnou, ak
   a) $\text{st}\, P_n(x) > \text{st}\, Q_m(x)$,
   b) $\text{st}\, P_n(x) = \text{st}\, Q_m(x)$,
   c) $\text{st}\, P_n(x) < \text{st}\, _{Qm}(x)$.

2. Nerýdzoracionálnu funkciu $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ pred rozkladom na parciálne zlomky upravíme tak, že
   a) násobíme polynóm $P_n(x)$ polynómom $Q_m(x)$,
   b) delíme polynóm $P_n(x)$ polynómom $Q_m(x)$,
   c) delíme polynóm $Q_m(x)$ polynómom $P_n(x)$.

3. Pri rozklade na parciálne zlomky, výraz $(x-3)^5$ zapíšeme pomocou
   a) jedného parciálneho zlomku,
   b) troch parciálnych zlomkov,
   c) päť parciálnych zlomkov.

4. Pri rozklade na parciálne zlomky, výraz $x^2 + px + q$ zapíšeme pomocou
   a) jedného parciálneho zlomku,
   b) troch parciálnych zlomkov,
   c) päť parciálnych zlomkov.

5. Pri určovaní koeficientov A, B, C pri rozklade na parciálne zlomky pomocou dosadzovacej metódy
   a) delíme polynómy,
   b) porovnávame koeficienty pri rovnakej mocnine,
   c) dosadzujeme za *x* ľubovoľné hodnoty.

6. Ak polynóm v menovateli má trojnásobný koreň - 5, potom ho zapíšeme pomocou parciálnych zlomkov
   a) $\frac{A}{(x+5)^3}$,
   b) $\frac{Ax+B}{(x+5)^3} + \frac{Ax+B}{(x+5)^2} + \frac{Ax+B}{x+5}$,
   c) $\frac{A}{(x+5)^3} + \frac{B}{(x+5)^2} + \frac{C}{x+5}$,
   d) $\frac{A}{x+5}$.

7. Funkciu $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $Q_m(x) = (x-4)(x+1)\,(x-1)$ rozložíme na parciálne zlomky
   a) $\mathrm{f(x)} = \frac{A}{(x-4)^4} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$,
   b) $\mathrm{f(x)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$,
   c) $\mathrm{f(x)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x-1}$.

8. Funkciu $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $Q_m(x) = (x+3)(x^2+8x-3)$ rozložíme na parciálne zlomky

a) $\mathrm{f(x)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+8x-3}$,

b) $\mathrm{f(x)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x^2+8x-3}$,

c) $\mathrm{f(x)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{(x^2+8x-3)^2}$.

9. Funkciu $f(x) = \frac{x^3-1}{(x+2)^2(x-3)}$, rozložíme na parciálne zlomky

a) $f(x) = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+2)^2}$,

b) $f(x) = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2}$,

c) $f(x) = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{(x+2)^2}$.

10. Ak rozklad na parciálne zlomky je $f(x) = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x-1)^2} + \frac{Fx+G}{x^2+x-1}$, potom menovateľ funkcie *f* (x) je

a) $(x-4)(x+1)^2(x^2+x-1)^2$

b) $(x-4)(x+1)\ (x^2+x-1)$

c) $(x-4)(x+1)^2(x^2+x-1)$

d) $(x-4)(x+1)(x^2+x-1)^2$

Správne odpovede: 1c, 2b, 3c, 4a, 5c, 6c, 7b, 8a, 9b, 10a

Hodnotenie:
0 – 2 nesprávna odpoveď – máš vedomosti o rozklade funkcie na parciálne zlomky
3 – 5 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré
6 a viac nesprávnych odpovedí – odporúčam sa na to ešte raz pozrieť