NMPaMŠ – 1.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Cvičiaca: RNDr. Z. Gibová, PhD.
zuzana.gibova@tuke.sk
Boženy Nemcovej 32, 6. poschodie, č.k.: 614

konzultácie: utorok 10:00 - 11:00, 14:00 - 15:00, v iný deň dohodou

- cvičenia (povinné) max. 3 ospravedlnené neúčasti (stačí ospravedlniť mailom, napísať aj študijnú skupinu do 3 dní), prednášky

Prenášajúca: **doc. RNDr. Helena Myšková, PhD**

Podmienky zápočtu: 2 zápočtové písomky, získať v súčte aspoň 16 b z 30 b

1ZP –7. týždeň na prednáške

2ZP – 10. – 12. týždeň

Bonusové body ku skúške – 5 bodov (2b aktivita na cvičení, 3b malé písomky na cvičení)

Všetky materiály na stránke KMTI / aktuálne predmety /NMPaMŚ

Literatúra k cvičeniam

- Učebnica Daňo, Ostertagová: Numerické metódy, pravdepodobnosť a matematická štatistika v príkladoch – na stránke v prílohách

Numerické riešenie nelineárnych rovníc

nelineárna rovnica - rovnice jednej premennej, f (x) = 0

napr. $\ln x - x + 3x^2 = 0$

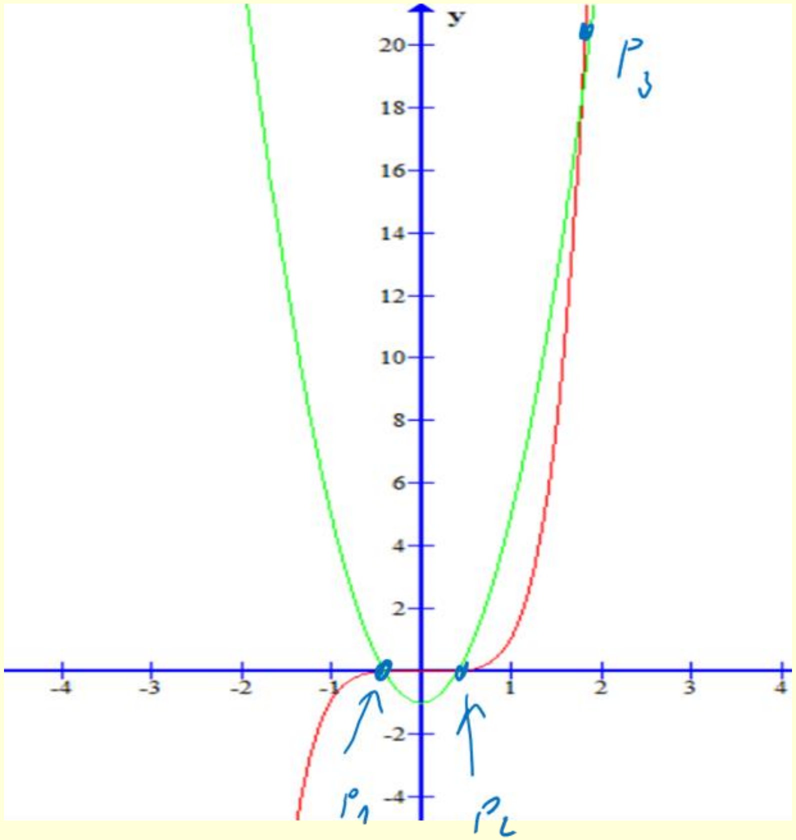
koreň rovnice α, pre ktoré f (α) = 0

Metódy riešenia – a) Metóda polovičného delenia intervalu
b) Metóda prostej iterácie
c) Newtonova metóda

Pri všetkých metódach používame **grafickú separáciu na dve funkcie,** x- ové súradnice priesečníkov predstavujú približné hodnoty koreňov rovnice.

Grafická separácia na dve funkcie

$$f(x) = x^5 - 6x^2 + 1 = 0$$



Upravíme rovnicu tak, aby sme dostali dve základné funkcie, ktoré vieme graficky zobraziť – **separácia**:

$$x^5 - 6x^2 + 1 = 0$$
$$x^5 = 6x^2 - 1$$

$h(x) = x^5$ $\qquad$ $g(x) = 6x^2 - 1$

Zostrojíme grafy funkcií h(x) a g(x) do jedného grafu.

Nájdeme x – ové súradnice priesečníkov funkcií = **korene** rovnice *f(x)* = 0 a určíme intervaly priesečníkov = **intervaly koreňov**

funkcia má tri priesečníky na intervaloch: (-1, 0), (0, 1), (1,2)

- ak máme určiť záporný reálny koreň, tak volíme interval (-1, 0),
- ak väčší reálny koreň → (1,2)
- ak všetky reálne korene → všetky intervaly

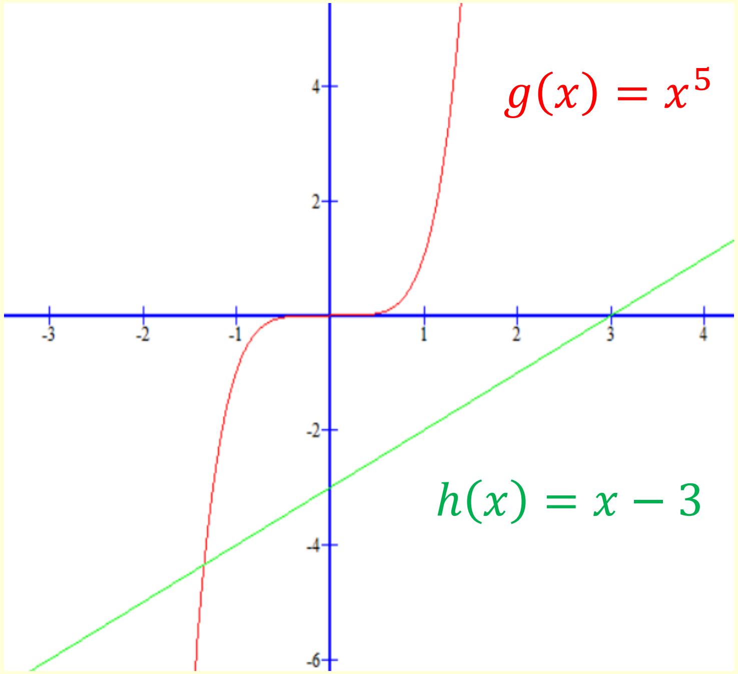
Pr. 1: Graficky separujte na dve funkcie nasledujúcu rovnicu: $x^5 - x + 3 = 0$,

Upravíme rovnicu (necháme na jednej strane výraz x^5 a všetko ostatné prenesieme na druhú stranu $x^5 = x - 3$

Dostaneme dve základné funkcie, ktorých grafy vieme zostrojiť: $g(x) = x^5$

$h(x) = x - 3$

Stačí pre tri ľubovoľné hodnoty x dopočítať y – ové súradnice a použiť ich na zostrojenie grafu g(x) (napr. x = 0, y = 0, x = 1, y = 1, x = -1, y = -1, keďže je to mocninová funkcia vieme, aký bude mať tvar). Pre zostrojenie grafu h(x) stačí zvoliť dve hodnoty x, lebo grafom je priamka (napr. x = 3, y = 0, x = 0, y = - 3).



Zostrojíme grafy funkcií h(x) a g(x) do jedného grafu. Grafy funkcií majú jeden priesečník, ktorého x – ová súradnica leží v intervale (-2,-1).
Táto súradnica priesečníka bude predstavovať približnú hodnotu koreňa danej rovnice

$f(x) = x^5 - x + 3 = 0$

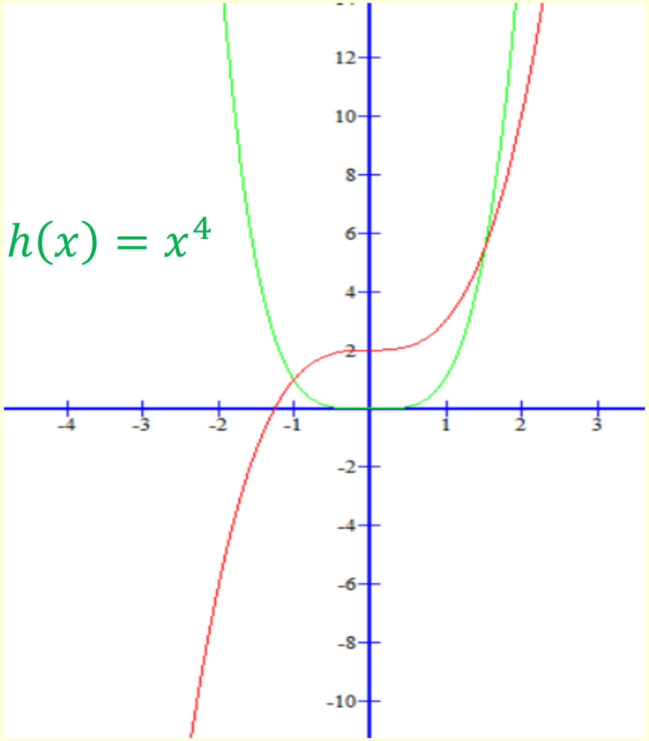
Pr. 2 Graficky separujte na dve funkcie nasledujúce rovnice:

a) $x^4 - x^3 - 2 = 0.$

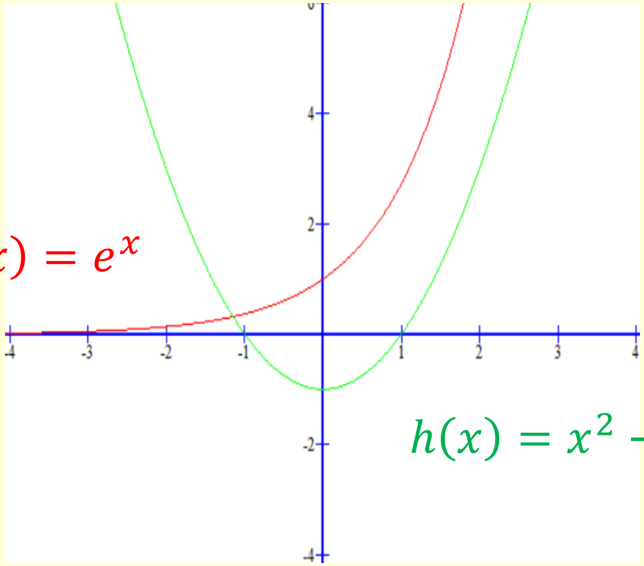
b) $e^x - x^2 + 1 = 0$

Určte všetky ich priesečníky.

a) dva priesečníky, intervaly (-1,0), (1,2)



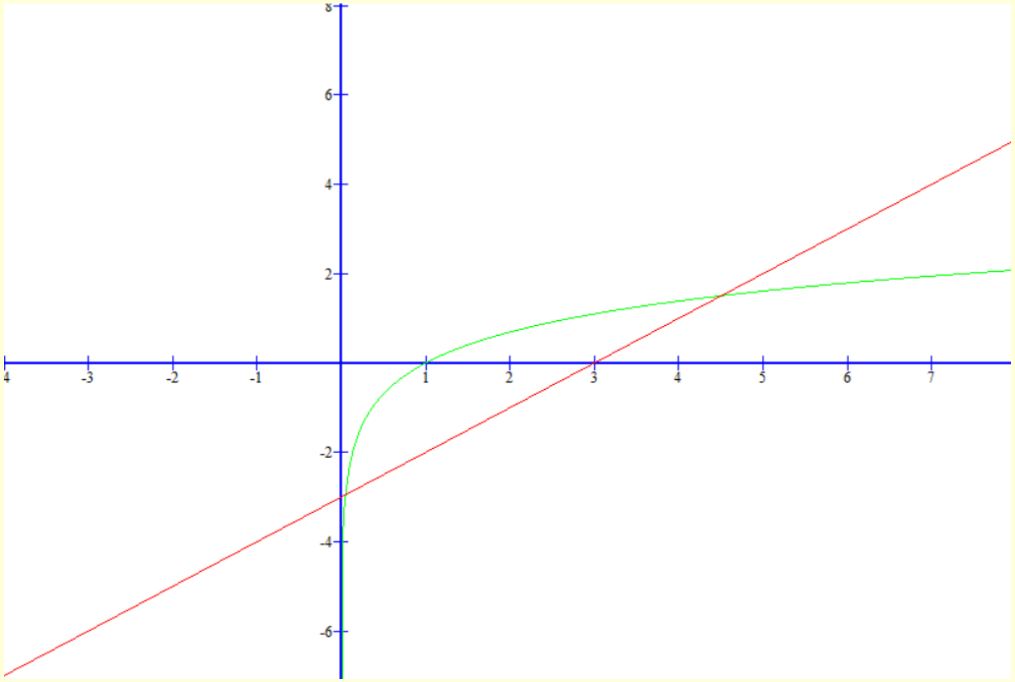
b) jeden priesečník, interval (-2, -1)



1. Metóda polovičného delenia intervalu (bisekcie)

Pr. 3 **Príklad 1.1.** Metódou polovičného delenia intervalu vypočítajte väčší reálny koreň rovnice $\ln x - x + 3 = 0$ s presnosťou $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$.

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa



1. $f(x) = \ln x - x + 3 = 0$

$\ln x = x - 3$

$h(x) = x - 3$

$x = 0 \quad y = -3$

$y = 0 \quad x = 3$

$g(x) = \ln x$

$P_1 \in (0, 1)$

$P_2 \in (4, 5)$ väčší koreň

2. Definujeme interval ⟨a , b⟩ a overíme, či sa koreň α nachádza v zvolenom intervale

Musí platiť **$f(a) \cdot f(b) < 0$**

$x \in \langle 4,5 \rangle \quad a = 4 \quad b = 5$ $\quad f(4) \cdot f(5) < 0$ vhodný interval

$f(4) = 0,3950$

$f(5) = -0,39 < 0$

Poznámka. Rovnica $f(x) = 0$ môže mať v intervale (a, b) nulový bod aj v prípade, keď $f(a) \cdot f(b) > 0$. V tomto prípade je počet koreňov v intervale (a, b) párny.

3. Určime počet iterácii (potom neurčujeme podmienku ukončenia)

$$\frac{|b-a|}{\varepsilon} < 2^{n+1}$$

$$2^{n+1} > \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{5-4}{0,05} = 20$$

$n+1 = 5$

$n = 4$ - iterácie

$2^{n+1} > 20$

$2^5 = 32 > 20$

alebo podmienku ukončenia delenia intervalu (potom neurčujeme počet iterácií)

$$|b_n - a_n| < 2\varepsilon = 2.5.10^{-2} = 0,1$$

4. Určíme počiatočné hodnoty a_n , b_n , c_n

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$a_0 = 4 \quad b_0 = 5 \qquad c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

5. Urobíme n delení intervalu $\langle a_n, b_n \rangle$ na interval $\langle a_n, c_n \rangle$ alebo $\langle c_n, b_n \rangle$ (píšeme do tabuľky) podľa pravidiel:

Ak interval $\langle a_n, c_n \rangle$ musí platiť $\mathbf{f(a_n) \cdot f(c_n) < 0}$

Ak interval $\langle c_n, b_n \rangle$ musí platiť $\mathbf{f(a_n) \cdot f(c_n) > 0}$

n	a_n $f(a_n)$	b_n $f(b_n)$	c_n $f(c_n)$	$f(a_n).f(c_n)$	$\lvert b_n - a_n \rvert$
0	4 (+)	5 (−)	4,5 (+)	+ $\langle c_n, b_n \rangle$	1
1	4,5 (+)	5 (−)	4,75 (−)	− $\langle a_n, c_n \rangle$	0,5
2	4,5 (+)	4,75 (−)	4,625 (−)	− $\langle a_n, c_n \rangle$	0,25
3	4,5 (+)	4,625 (−)	4,5625 (−)	− $\langle a_n, c_n \rangle$	0,125
4	4,5 (+)	4,5625 (−)	4,53125		0,0625 < 0,1

$\boldsymbol{f(x) = \ln x - x + 3} \rightarrow \boldsymbol{f}(a_n) = \boldsymbol{ln}\, a_n - a_n + 3$

6. Delenie ukončíme, ak $|\mathbf{b_n} - \mathbf{a_n}| < 2\varepsilon$ a súčasne $\mathbf{f(b_n).f(a_n)} < 0$

$f(4{,}5) \cdot f(4{,}5625) < 0$

$|\mathbf{b_n} - \mathbf{a_n}| < 2\varepsilon = 0{,}1$

7. Aproximujeme koreň pomocou c_n a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť.

$x_4 = 4{,}53125 \qquad \alpha \approx 4{,}53$

Dú:

Graficky separujte všetky reálne korene rovnice. Určený koreň vypočítajte metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou ε.

1.4.

$x^3 + 2.7x^2 - 2.1 = 0$; väčší záporný reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-5}$.

$[-1{,}17252]$

1.7.

$e^x + x - 2 = 0$; reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 5.10^{-3}$.

$[0{,}442]$

Numerické riešenie nelineárnych rovníc
2. Newtonova metóda

Pr. 4 Graficky separujte všetky reálne korene rovnice. Určený koreň vypočítajte Newtonovou metódou s presnosťou ε .

$x^3 - 12x + 1$ najmenší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 0{,}001$

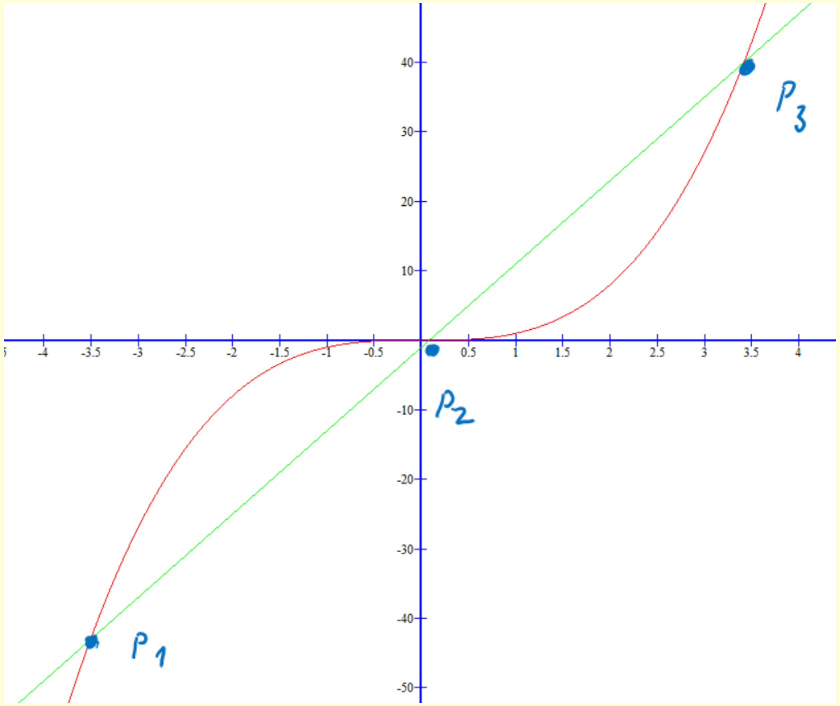
1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa

$f(x) = x^3 - 12x + 1$

$h(x) = x^3$

$g(x) = 12x - 1$

$P_1 \in \langle -4, -3 \rangle$ najmenší reálny koreň



2. Overíme, či pre interval ⟨a , b⟩ platí podmienka f (a) · f (b) < 0

$f(x) = x^3 - 12x + 1$

$f(-4) = -4^3 - 12 \cdot (-4) + 1 = -15$

$f(-3) = -3^3 - 12 \cdot (-3) + 1 = 10$

$f(-4) \cdot f(-3) < 0$

3. Určime prvú a druhú deriváciu funkcie *f*(*x*)

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f''(x) = 6x$

4. Overíme, či prvá a druhá derivácia funkcie *f*(*x*) zachováva na intervale ⟨a , b⟩ znamienko

$f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 15$

$f'(-4) = 3(-4)^2 - 12 = 36$

$f''(-3) = 6 \cdot (-3) = -18$

$f''(-4) = 6 \cdot (-4) = -24$

zachovávajú znamienko na $\langle -4, -3 \rangle$

5. Zvolíme štartovací bod $x_0 \in \langle a\,, b\rangle$, pre ktorý má platiť $f(x_0).\, f''(x_0) > 0$

$x_0 = -4 \qquad f(-4)\cdot f''(-4) = -15 \cdot \underset{3}{-24} > 0$

6. Zvolíme iteračný proces $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 12x_n + 1}{3x_n^2 - 12}$$

7. Ak platí, že prvá derivácia nemení na intervale znamienko, potom odhad presnosti

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon$$

$$m \leq \min_{x \in \langle a,b \rangle} |f'(x)|$$

$m \leq \min\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |f'(x)| = \min\limits_{x \in \langle -4,-3 \rangle} |3x^2 - 12| = 15$

$x = -3 \quad f'(x) = 15$

$x = -4 \quad f'(x) = 36$

Poznámka: ak prvá derivácia **mení** na intervale **znamienko**, alebo m = 0 potom odhad presnosti

$$f(x_n - \varepsilon).\, f(x_n + \varepsilon) < 0$$

n	x_n	$f(x_n)$ $x^3 - 12x + 1$	$f'(x_n)$ $3x^2 - 12$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m}$, $m = 15$	
0	-4	-15	36	$\frac{\lvert -15\rvert}{15} = 1 > \varepsilon = 0{,}001$	
1	$-3{,}5833$	$-2{,}0101$	$26{,}5201$	$0{,}1340 > \varepsilon$	
2	$-3{,}5075$	$-0{,}0612$	$24{,}9077$	$0{,}004 > \varepsilon$	
3	$-3{,}5050$	$0{,}0009$	$24{,}8550$	$0{,}00006 < \varepsilon$	koniec iterácie

V tabuľke všetky hodnoty zaokrúhľujeme o jedno desatinné číslo viac ako je daná presnosť ε.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -4 - \frac{-15}{36} = -3{,}5833$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -3{,}5833 - \frac{-2{,}0101}{26{,}5201} = -3{,}5075$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -3{,}5075 - \frac{-0{,}0612}{24{,}9077} = -3{,}5050$$

8. Aproximujeme koreň pomocou iterácie x_n a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť.

$x_3 = -3{,}5050$ $\qquad\qquad$ $\alpha \approx -3{,}505$

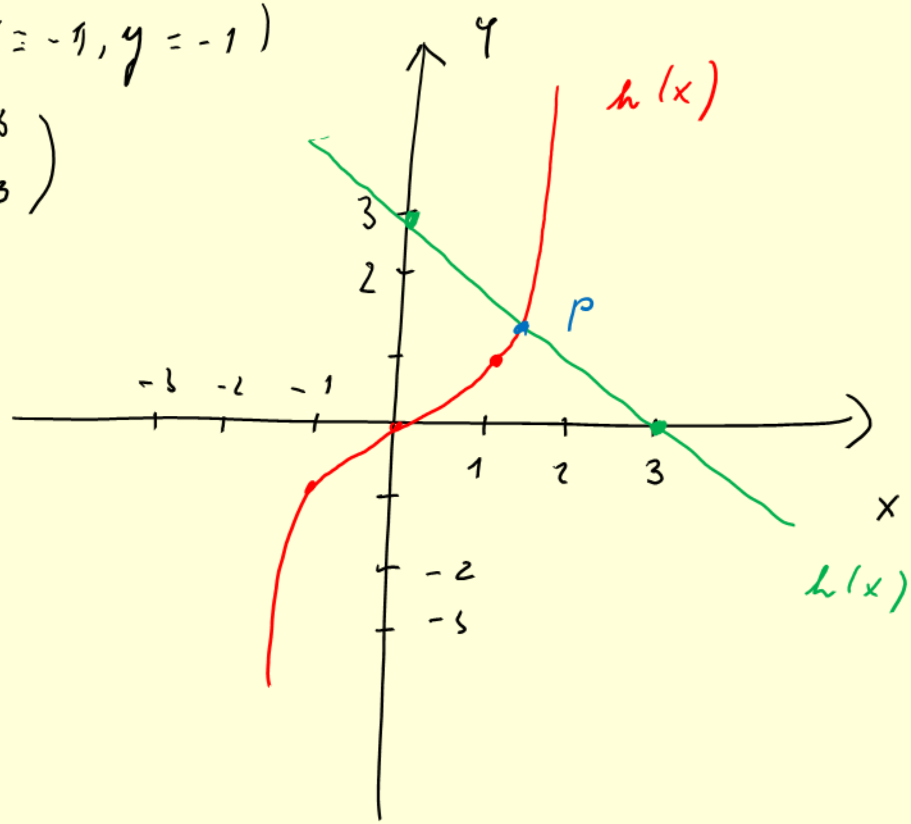
Pr. 5 Graficky separujte všetky reálne korene rovnice. Určený koreň vypočítajte Newtonovou metódou s presnosťou ε .

$x^3 + x - 3$ reálny koreň s presnosťou ε = 0,001

$f(x) = x^3 + x - 3$

$h(x) = x^3 \quad (x = 1 \ \ y = 1, \ x = -1, y = -1)$

$g(x) = -x + 3 \quad (x = 0 \ \ y = 3; \ \ y = 0 \ \ x = 3)$



$P \in \langle 1, 2 \rangle$

$f(1) = 1^3 + 1 - 3 = -1$

$f(2) = 2^3 + 2 - 3 = 7$

$f(1) \cdot f(2) < 0$ ✓

$$f(x) = x^3 + x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 1 = 13$$

zachováva znamienko na $\langle 1, 2 \rangle$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 = 12$$

zachováva znamienko na $\langle 1, 2 \rangle$

počiatočný bod

$$x_0 = 2 \in \langle 1, 2 \rangle$$

$$f(2) \cdot f''(2) = 7 \cdot 12 > 0 \checkmark$$

iteračný proces

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x^2 + x - 3}{3x^2 + 1}$$

$$m \leqq \min_{x \in \langle 1, 2 \rangle} |f'(x)| = \min_{x \in \langle 1, 2 \rangle} |3x^2 + 1| = 4$$

$$\wedge \quad x = 1 \quad f'(x) = 4$$

$$x = 2 \quad f'(x) = 13$$

$$\frac{|f(x)|}{4} < \varepsilon = 10^{-3}$$

n	x_n	$f(x_n)$ $x^3 + x - 3$	$f'(x_n)$ $3x^2 + 1$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m}$, $m = 4$
0	2	7	13	$\frac{7}{4} = 1{,}75 > \varepsilon$
1	1,4615	1,5832	7,4079	0,396 > ε
2	1,2478	0,1906	5,6710	0,0477 > ε = 0,001
3	1,2142	0,0043	5,4228	0,00106 > ε
4	1,2134	−0,00006		0,000015 < ε koniec iterácie

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{7}{13} = 1{,}4615$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}4615 - \frac{1{,}5832}{7{,}4079} = 1{,}2478$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}2478 - \frac{0{,}1906}{5{,}671} = 1{,}2142$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1{,}2142 - \frac{0{,}0043}{5{,}4228} = 1{,}2134$$

$x_4 = 1{,}2134 \qquad \alpha \approx 1{,}213$

Dú:

Graficky separujte všetky reálne korene rovnice. Určený koreň vypočítajte Newtonovou metódou s presnosťou ε.

1.15.

$\ln x - x + 2 = 0$; najväčší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[3{,}1463]$

1.24.

$x^5 - 5x + 3 = 0$; najmenší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[-1{,}6180]$

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Nelineárnou rovnicou nazývame
   a) rovnicu dvoch premenných,
   b) rovnicu troch premenných,
   c) rovnicu jednej premennej.

2. Číslo α pre ktoré platí $f(\alpha) = 0$, kde f je funkcia reálnej premennej nazývame
   a) výsledok,
   b) koreň,
   c) prienik.

3. Funkcia má v bode $c \in (a, b)$ koreň, ak je na tomto intervale spojitá a
   a) $f(a).f(b) = 0$,
   b) $f(a).f(c) < 0$,
   c) $f(a).f(b) < 0$,
   d) $f(c).f(b) < 0$.

4. Ak $f(a).f(b) > 0$ funkcia na intervale (a, b)
   a) nemá koreň,
   b) má jeden koreň,
   c) má párny počet koreňov.

5. Na určenie koreňov nelineárnej rovnice používame metódu

a) grafickej derivácie,
b) grafickej integrácie,
c) grafickej separácie.

6. Pri grafickom odhade koreňov rovnice ich približné hodnoty určujú

a) y - ové súradnice priesečníkov,
b) x - ové súradnice priesečníkov,
c) x - ové súradnice dotyčníc,
d) y - ové súradnice dotyčníc.

7. Podmienka ukončenie delenia pri metóde bisekcie je

a) $|\mathrm{b_n} - \mathrm{a_n}| < \varepsilon$,
b) $|\mathrm{b_n} - \mathrm{a_n}| < 2\varepsilon$,
c) $|\mathrm{b_n} - \mathrm{a_n}| > 2\varepsilon$,
d) $|\mathrm{b_n} - \mathrm{a_n}| > \varepsilon$.

8. Pre štartovací bod $x_0 \in \langle a , b \rangle$ pri Newtonovej metóde musí platiť

a) $f(x_0).\ f''(x_0) > 0$,
b) $f(x_0).\ f'(x_0) > 0$,
c) $f(x_0).\ f''(x_0) < 0$,
d) $f(x_0).\ f'(x_0) < 0$.

9. Iteračný proces daný predpisom $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f\,'(x_n)}$ sa používa pri

a) metóde polovičného delenia intervalu

b) metóde prostej iterácie

c) Newtonovej metóde.

10. Ak pri Newtonovej metóde platí, že prvá derivácia nemení na intervale znamienko, potom odhad presnosti je daný $|\boldsymbol{x_n - \alpha}| \leq \frac{|f(x_n)|}{\boldsymbol{m}} < \boldsymbol{\varepsilon}$, kde

a) $m \geq \min\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |f\,'(x)|$

b) $m \leq \max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |f\,'(x)|$

c) $m \leq \min\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |f\,'(x)|$

d) $m \geq \max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |f\,'(x)|$.

Správne odpovede:

1c, 2b, 3c, 4c, 5c, 6b, 7b, 8a, 9c, 10c

Hodnotenie:

0 – 2 nesprávne odpovede – máš vedomosti o metódach riešenia nelineárnych rovníc

3 – 4 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

5 a viac nesprávnych odpovedí – tvoje vedomosti nie sú postačujúce, odporúčam sa na to ešte raz pozrieť