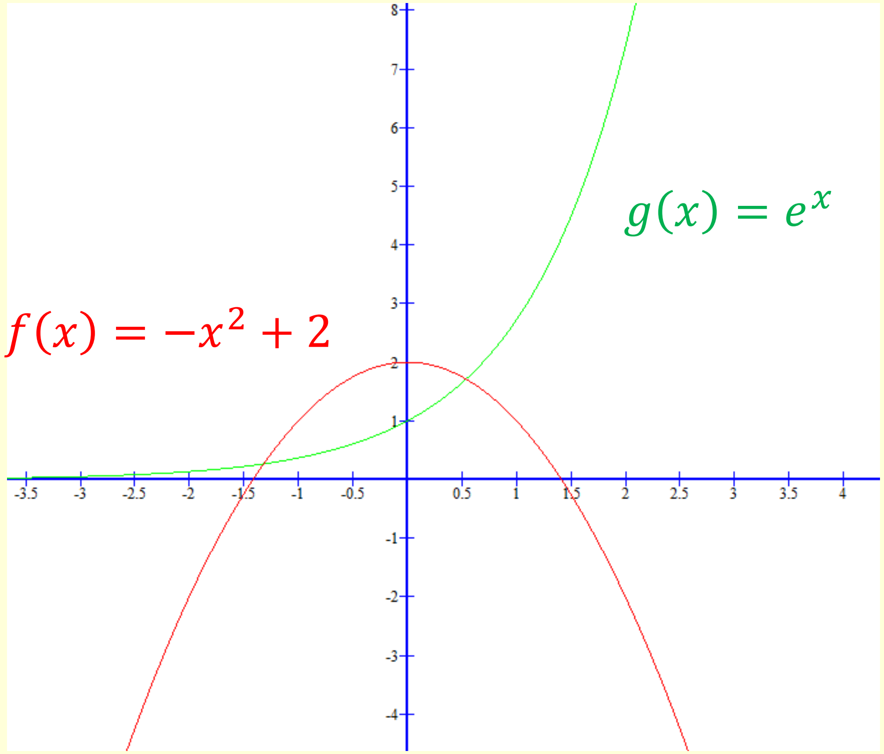
NMPaMŠ – 2.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Numerické riešenie nelineárnych rovníc
2. Newtonova metóda

Pr. 1 Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $e^x + x^2 - 2$.
Všetky korene určte pomocou Newtonovej metódy s presnosťou ε = 0,001.

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa



$$e^x + x^2 - 2 = 0$$
$$e^x = -x^2 + 2$$

$kladný\ koreň\ \alpha \in (0,1)$

2. Overíme, či pre interval $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ platí podmienka f (a) · f (b) < 0

$f(x) = e^x + x^2 - 2$
$f(0) = -1$
$f(1) = 1{,}7183$

3. Určime prvú a druhú deriváciu funkcie $f(x)$

$f\,'(x) = e^x + 2x$
$f\,''(x) = e^x + 2$

4. Overíme, či prvá a druhá derivácia funkcie $f(x)$ zachováva na intervale $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ znamienko

$f\,'(0) = e^0 + 0 = 1$
$f\,'(1) = 4{,}7183$
zachováva znamienko

$f\,''(0) = e^0 + 2 = 3$
$f\,''(1) = 4{,}7183$
zachováva znamienko

5. Zvolíme štartovací bod $x_0 \in \langle a, b \rangle$, pre ktorý má platiť $f(x_0) \, . \, f''(x_0) > 0$

$x_0 = 1 \quad f(1) \, . \, f''(1) > 0$

6. Zvolíme iteračný proces $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

7. Ak platí, že <u>prvá derivácia nemení na intervale znamienko</u>, potom odhad presnosti (koniec iterácie)

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon$$

$$\min_{x \in \langle 0,1 \rangle} |e^x + 2x| = 4,7183 \quad pre\ x = 1$$

$$= 1 \quad pre\ x = 0$$

$$m = \min_{x \in \langle a,b \rangle} |f'(x)|$$

$$m = 1$$

Poznámka: Ak <u>prvá derivácia **mení** na intervale **znamienko**</u>, potom odhad presnosti

$$f(x_n - \varepsilon) . f(x_n + \varepsilon) < 0$$

n	x_n	$f(x_n)$ $e^x + x^2 - 2$	$f'(x_n)$ $e^x + 2\boldsymbol{x}$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m} < \varepsilon$ $\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{} < \mathbf{0,001}$
0	1	1,7183	4,7183	1,7183 > 0,001
1	0,6358	0,2928	3,1601	0,2928 > 0,001
2	0,5431	0,0163	2,8075	0,0163 > 0,001
3	0,5373	0,00007		0,00007 $< \mathbf{0,001}$ koniec iterácie
4				

8. Aproximujeme koreň pomocou iterácie x_n **a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť.**

$x_3 = 0{,}5373$ $\alpha \approx 0{,}537$

Dú:

Graficky separujte všetky reálne korene rovnice. Určený koreň vypočítajte Newtonovou metódou s presnosťou ε.

1.15.

$\ln x - x + 2 = 0$; najväčší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[3{,}1462]$

1.24.

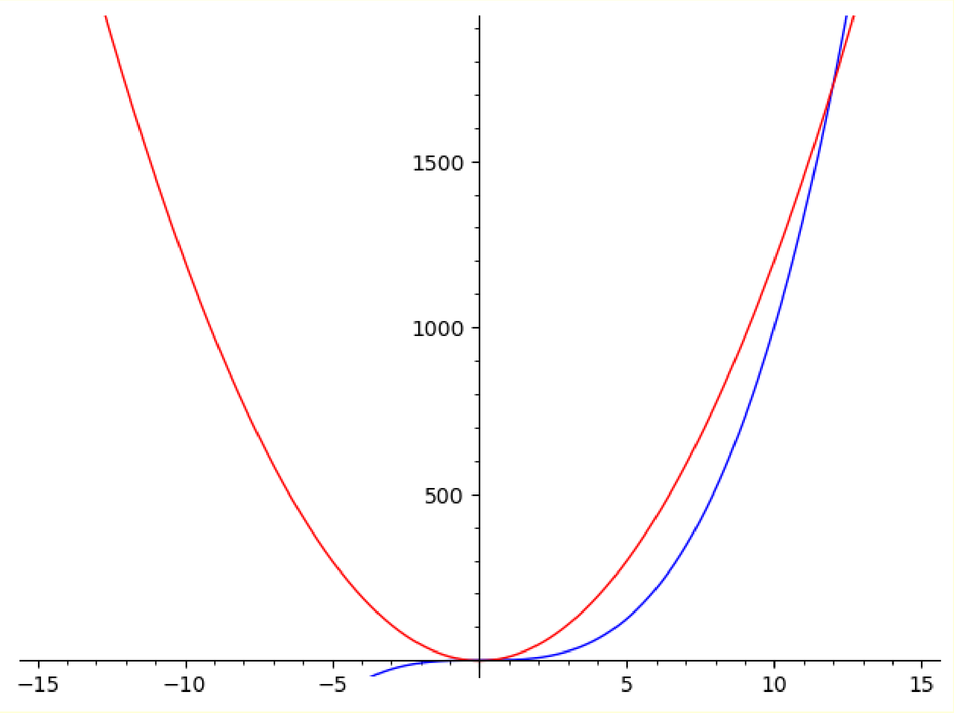
$x^5 - 5x + 3 = 0$; najmenší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[-1{,}6180]$

Numerické riešenie nelineárnych rovníc
3. Metóda prostej iterácie

Pr. 2 Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $x^3 - 12x^2 + 1$. Menší kladný koreň určte metódou prostej iterácie s presnosťou $\varepsilon = 0{,}01$.

1. Grafická separácia a voľba intervalu (a, b) koreňa



2. Určíme funkciu $x = \varphi(x)$

3. Vypočítame deriváciu $\varphi'(x)$

4. Overíme podmienku konvergencie $\varphi'(x)$

ak $M = \max_{x \in \langle a,b \rangle} |\varphi'(x)| < 1$

potom $\lambda = M$

5. Na určenie približnej hodnoty koreňa α zvolíme iteračný proces a počiatočný bod iterácie z intervalu $\langle a,b \rangle$

$\varphi(x_{n+1}) =$

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0		
1		
2		
3		
4		

V tabuľke hodnoty x_n zaokrúhľujeme o jedno desatinné číslo viac ako je daná presnosť ε.

V príklade dané $\varepsilon = 0{,}01$, v tabuľke x_n zaokrúhlime na tri desatinné miesta.

6. Iteračný proces ukončíme, keď

$$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert \leq \frac{1-\lambda}{\lambda}\varepsilon$$

7. Aproximujeme koreň pomocou iterácie x_n a zaokrúhlime na rovnaký počet ako je určená presnosť.

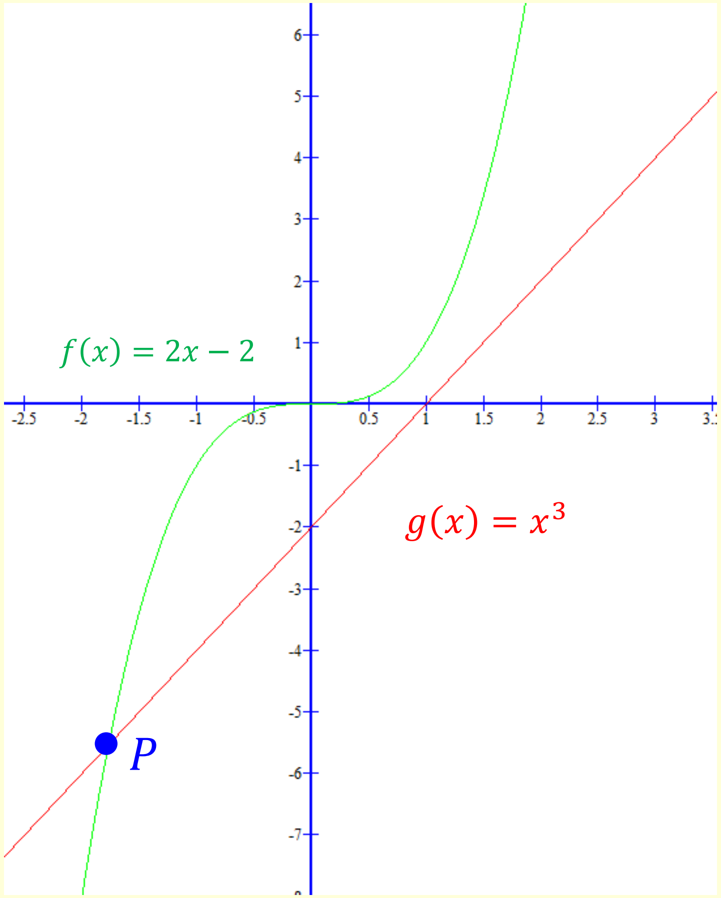
Pr. 3 Graficky separujte všetky reálne korene rovnice $x^3 - 2x + 2$. Menší kladný koreň určte metódou prostej iterácie s presnosťou $\varepsilon = 0{,}01$.

$$x^3 = 2x - 2$$

$$P \in (-2, -1)$$

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{2x - 2} \qquad \varphi(x) = \frac{x^3 + 2}{2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(2x-2)^2}} \qquad \varphi'(x) = \frac{3x^2}{2}$$



$$\mathrm{M} = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |\varphi'(x)| = \max_{x\in\langle -2,-1\rangle} \left|\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(2x-2)^2}}\right| < 1$$

$$x = -1, \quad \left|\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(-2-2)^2}}\right| = 0{,}26 < 1$$

$$x = -2, \quad \left|\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(-4-2)^2}}\right| = 0{,}2 < 1$$

$$\lambda = \mathrm{M} = 0{,}26$$

$$|\mathbf{x_{n+1}} - x_n| \leq \frac{\mathbf{1 - 0{,}26}}{\mathbf{0{,}26}}\mathbf{0{,}01 = 0{,}028}$$

$x_0 = -2$ $\varphi(x_{n+1}) = \sqrt[3]{2x_n - 2}$

n	x_n	$\lvert \mathbf{x_{n+1} - x_n} \rvert \le$ **0,028**
0	-2	0,183
1	-1,817	0,038
2	-1,779	0,007 < 0,028 Stop iterácie
3	-1,7713	
4		

$\alpha \approx -1{,}77$

Dú:

Graficky separujte všetky reálne korene rovnice. Určený koreň vypočítajte metódou prostej iterácie s presnosťou ε.

1.8.

$x^3 - 12x + 1 = 0$; najmenší reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-3}$.

$[-3.505]$

1.12.

$e^{2x} + x - 9 = 0$; reálny koreň s presnosťou $\varepsilon = 10^{-4}$.

$[1{,}0374]$

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Pri metóde prostej iterácie funkcia $\varphi'(x)$ konverguje, ak
   a) $M > 1$,
   b) $M = 1$,
   c) M < 1.

2. Hodnota čísla M sa pri metóde prostej iterácie určí ako
   a) $\min\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |\varphi'(x)|$,

   b) $\max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |\varphi(x)|$,

   c) $\max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |\varphi'(x)|$

   d) $\min\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |\varphi(x)|$.

3. Funkciu $\varphi(x)$ pri metóde prostej iterácie získame
   a) vyjadrením ľubovoľného x z danej rovnice,
   b) deriváciou danej rovnice,
   c) zvolením ľubovoľnej rovnice.

4. Iteračný proces pri metóde prostej iterácie sa ukončí, ak

a) $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1-\lambda}{\lambda}\varepsilon$,

b) $|x_{n+1} - x_n| \geq \frac{1-\lambda}{\lambda}\varepsilon$,

c) $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{\lambda-1}{\lambda}\varepsilon$,

d) $|x_{n+1} - x_n| \geq \frac{\lambda-1}{\lambda}\varepsilon$.

5. Získanú hodnotu koreňov nelineárnej rovnice zaokrúhľujeme

a) na ľubovoľný počet miest,

b) na rovnaký počet ako je určená presnosť,

c) na menší počet ako je určená presnosť.

Správne odpovede:

1c, 2c, 3a, 4a, 5b

Hodnotenie:

0 – 1 nesprávne odpovede – máš vedomosti o metódach riešenia nelineárnych rovníc

2 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

3 a viac nesprávnych odpovedí – tvoje vedomosti nie sú postačujúce, odporúčam sa na to ešte raz pozrieť