V nasledujúcich úlohách separujte všetky reálne korene a Newtonovou alebo iteračnou metódou (podľa zadania) vypočítajte daný koreň s presnosťou ε.

1. $4x^3 - x^2 + 1 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$; najmenší koreň [1 koreň, $\alpha \approx -0,55682$]
2. $2x^4 + 4x - 3 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$; najväčší koreň [2 korene, $\alpha \approx 0,65694$]
3. $e^{2x} + 3x - 3 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-2}$; najväčší koreň [1 koreň, $\alpha \approx 0,3416$]
4. $\ln x + 2x - 4 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-2}$; najväčší koreň [1 koreň, $\alpha \approx 1,727$]
5. $e^x + x - 2 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-2}$; najväčší koreň [1 koreň, $\alpha \approx 0,443$]
6. $x^3 - 7x - 7 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-2}$; najväčší koreň [1 koreň, $\alpha \approx 3,0491$]
7. $x^4 - 7x - 7 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-2}$; najväčší koreň [2 korene, $\alpha \approx 2,17075$]
8. $x^4 + 2x - 4 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$; najmenší koreň [2 korene, $\alpha \approx -1,6430$]
9. $x^4 - 5x^2 + 3 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$; najväčší koreň [4 korene, $\alpha \approx 2,07488$]
10. $x^4 + 6x - 3 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3}$; najväčší koreň [2 korene, $\alpha \approx 0,49035$]

Newtonovou metódou riešte danú sústavu rovníc z daného počiatočného bodu. Urobte dve iterácie.

1. $\begin{array}{l} x^3 - y^2 - 1 = 0 \\ xy^3 - y - 4 = 0 \end{array}$ $\quad (x^{(0)}, y^{(0)}) = (2, 1)$; $\quad [(x^{(1)}, y^{(1)}) = (1.6129; 1,6774), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = (1,5139, 1,5610)]$
2. $\begin{array}{l} 9x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ 2xy + 4y - 5 = 0 \end{array}$ $\quad (x^{(0)}, y^{(0)}) = (1; 0,5)$; $[(x^{(1)}, y^{(1)}) = (1,02336; 0.82944), \ (x^{(2)}, y^{(2)}) = (1,01728, 0,82857]$
3. $\begin{array}{l} 5xy + 4y^2 - 3 = 0 \\ x^2y + x - y = 0 \end{array}$ $\quad (x_0, y_0) = (0, 2)$; $\quad [(x^{(1)}, y^{(1)}) = (0,73077; 0,73077), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = (0,51769, 0,62259)]$
4. $\begin{array}{l} xy^2 - x + 1 = 0 \\ xy^3 - 3x^2y + 9 = 0 \end{array}$ $\quad (x_0, y_0) = (2, 1)$; $\quad [(x^{(1)}, y^{(1)}) = (2,0455; 0,75), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = (2,1209, 0,7265)]$
5. $\begin{array}{l} x^2y - xy + 1 = 0 \\ y^3 - 3xy + 5 = 0 \end{array}$ $\quad (x_0, y_0) = (2, 1)$. $\quad [(x^{(1)}, y^{(1)}) = (-1, 4), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = (-0,495, 2,53)]$

Pre hodnoty zadané tabuľkou nájdite Lagrangeov interpolačný polynóm a vypočítajte hodnotu funkcie v danom bode.

1.

x	-1	0	1	3
y	-14	-6	-8	6

; $x = 2$. [$2x^3 - 5x^2 + x - 6$; $f(2) \approx -8$]

2.

x	-2	-1	1	2
y	-6	6	6	30

; $x = 0$; [$3x^3 + 2x^2 - 3x + 4$; $f(0) \approx 4$]

3.

x_i	-1	0	1	3
y_i	6	1	0	10

; $x = 0.5$. [$2x^2 - 3x + 1$; $f(0.5) \approx 0$]

4.

x	-2	0	3
y	26	6	21

; $x = 1$. [$3x^2 - 4x + 6$; $f(1) \approx 5$]

5.

x	-2	-1	1
y	23	11	-1

; $x = 0.5$. [$2x^2 - 6x + 3$; $f(0.5) \approx 0.5$]

6.

x	-1	1	3
y	-8	0	32

; $x = 2$. [$3x^2 + 4x - 7$; $f(2) \approx 13$]

Pre hodnoty zadané tabuľkou určte metódou najmenších štvorcov optimálne koeficienty a_0 a a_1 v danej závislosti.

1.

x	1	3	4	6
y	2,0	15,3	18,5	27,8

v závislosti $y(x) = a_0 \cdot x + a_1 \cdot x^2$; [$y = 4,546x + 0,0223x^2$]

2.

x	0	1	2	3	4
y	2,1	3,5	5	6,7	8

v závislosti $y(x) = a_0 + a_1 \cdot x$; [$y = 2,06 + 1,5x$]

3.

x	1	3	4
y	6	2	1

v závislosti $y = a_0 \cdot \frac{1}{x} + a_1 \cdot x$; [$y = 6,1278 \cdot \frac{1}{x} - 0,0917x$]

4.

x	1	3	5	6
y	-2	22	70	103

v závislosti $y(x) = a_0 \cdot x^2 + a_1$ $[y = 3x^2 - 5]$;

5.

x	0,78	1,56	2,34	3,12
y	2,5	1,2	1,12	2,25

v závislosti $y = a_0 + a_1 \cdot x \cos 2x$. $[y = 1,689 + 0,2107 \cdot x \cos 2x]$

6.

x	1	3	5	6
y	$-5{,}0$	3,7	10,2	13,3

v závislosti $y(x) = a_0 + a_1 \cdot e^x$. $[y = 0,29994 + 0,036544 \cdot e^x]$

7.

x	1	3	4	6
y	2,0	2,7	2,9	3,6

v závisloti $y(x) = a_0 \cdot \sqrt{x} + a_1$. $[y = 1,07232 \cdot \sqrt{x} + 0,87476]$

8.

x	-2	-1	1	3
y	8,1	5,5	3,5	6,5

v závislosti $y(x) = a_0 \cdot x^2 + a_1 \cdot x$. $[y = 1,3112x^2 - 1,5742x]$

Lichobežníkovou metódou vypočítajte nasledujúce integrály pre daný počet delení a odhadnite chybu výpočtu.

1. $\int_0^{1.5} e^{\frac{x^2}{2}} dx, \qquad n = 6;$ $[L(6) = 2,340677;\ R_L(6) = 0,0782]$;
2. $\int\limits_1^3 x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x, \qquad n = 8;$ $[L(8) = 2,94947;\ R_L(8) = 0,0104]$;
3. $\int\limits_1^2 x^2 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x, \qquad n = 5;$ $[L(5) = 1,08319;\ R_L(5) = 0,01462]$;
4. $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx, \qquad n = 4$ $[L(4) = 0,26916;\ R_L(4) = 0,0104]$;
5. $\int_1^3 \frac{1}{(1+3x)^2} dx, \qquad n = 5;$ $[L(5) = 0,060323;\ R_L(5) = 0,0189]$;

Lichobežníkovou metódou vypočítajte nasledujúce integrály s danou presnosťou ε.

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(1+2x)^2} dx, \qquad \varepsilon = 4 \cdot 10^{-3};$ $[n = 8;\ L(8) = 0,09596]$
2. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(1+x)^2} dx, \qquad \varepsilon = 0,02;$ $[n = 6;\ L(6) = 0,30408]$
3. $\int_1^5 \frac{1}{1+5x} dx, \qquad \varepsilon = 2 \cdot 10^{-2};$ $[n = 8;\ L(8) = 0.29596]$
4. $\int_0^1 e^{x^2} dx, \qquad \varepsilon = 0,05;$ $[n = 6;\ L(6) = 1,4752]$
5. $\int_1^4 \sqrt{1 + 3x}\, dx, \qquad \varepsilon = 0,01;$ $[n = 8;\ L(8) = 8,63435]$

Simpsonovou metódou vypočítajte nasledujúce integrály pre daný počet delení a odhadnite chybu výpočtu.

1. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} dx, \qquad n = 8$ $[S(8) = 3.19459;\ R_S(8) = 0.0016]$
2. $\int\limits_1^3 x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x, \qquad n = 8;$ $[S(8) = 2,94377;\ R_S(8) = 8,68 \cdot 10^{-5}]$
3. $\int\limits_1^3 x^2 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x, \qquad n = 8;$ $[S(8) = 6,99868;\ R_S(8) = 8,68 \cdot 10^{-5}]$
4. $\int_1^3 \sqrt{1 + 2x}\, dx, \qquad n = 8;$ $[S(8) = 6,66286;\ R_S(8) = 1,4 \cdot 10^{-5}]$
5. $\int\limits_2^4 \ln(x + 2) \, \mathrm{d}x, \qquad n = 10;$ $[S(10) = 3,20533;\ R_S(8) = 1,67 \cdot 10^{-6}]$