Technická univerzita v Košiciach

KATEDRA MATEMATIKY A TEORETICKEJ INFORMATIKY

MATEMATIKA I v príkladoch

FEI

Blanka Baculíková – Anna Grinčová

Košice 2021

Technická univerzita v Košiciach

KATEDRA MATEMATIKY A TEORETICKEJ INFORMATIKY

MATEMATIKA I v príkladoch

FEI

Blanka Baculíková – Anna Grinčová

Košice 2021

RECENZOVALI: prof. RNDr. Jozef Džurina, CSc.
doc. RNDr. Miriam Andrejiová, PhD.

1. vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-553-1501-0

OBSAH

ÚVOD

Táto učebná pomôcka je určená pre študentov prvého ročníka bakalárskej formy štúdia Fakulty elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach (FEI TU), ale môže poslúžiť aj študentom iných fakúlt.

Učebnica je rozdelená do siedmich kapitol, ktoré obsahujú základné teoretické poznatky potrebné k riešeniu príkladov, vzorové riešené aj neriešené úlohy k učivu preberanému v predmete Matematika I.

Cieľom tejto učebnej pomôcky nebolo podať ucelený teoretický prehľad riešenej problematiky v predmete Matematika I, preto je vhodné kombinovať používanie tejto učebnice s voľne dostupnými e-learningovými materiálmi Katedry matematiky a teoretickej informatiky FEI TU.

Na záver ďakujeme prof. RNDr. Jozefovi Džurinovi, CSc. a doc. RNDr. Miriam Andrejiovej, PhD. za starostlivé prečítanie rukopisu a za cenné pripomienky, ktorými prispeli k zlepšeniu textu tejto učebnice.

Autorky

1 FUNKCIA

1.1 Definičný obor funkcie

Pri hľadaní definičného oboru funkcie je potrebné najčastejšie vziať do úvahy, že:

- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule,
- výraz pod párnou odmocninou musí byť nezáporný,
- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument,
  ak $a > 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $x \geq 1$,
  ak $0 < a < 1$, potom $\log_a x \geq 0$ práve vtedy, ak $0 < x \leq 1$,
- funkcie $y = \arcsin x$ a $y = \arccos x$ sú definované pre $-1 \leq x \leq 1$.

Príklad 1 *Nájdime definičný obor funkcie f:* $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$.

Riešenie: Keďže výraz v menovateli musí byť rôzny od nuly, platí

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0$$

$$(x-2)(x-3) \neq 0$$

$$\underline{\underline{x \neq 2}} \wedge \underline{\underline{x \neq 3}}$$

Odtiaľ vyplýva, že $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3, \infty)$ alebo $D(f) = R - \{2,3\}$.

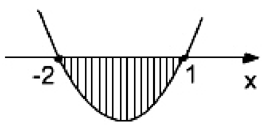
Príklad 2 *Nájdime definičný obor funkcie f:* $y = \sqrt{2 - x - x^2}$.

Riešenie: Výraz pod druhou odmocninou musí byť nezáporný, potom platí

$$2 - x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$(x+2)(x-1) \leq 0$$



Definičný obor funkcie je $D(f) = \langle -2, 1 \rangle$.

Príklad 3 *Nájdime definičný obor funkcie f:* $y = \ln(4x - 8)$.

Riešenie: Logaritmus je definovaný len pre kladné čísla, preto musí byť

$$4x - 8 > 0$$

$$\underline{\underline{x > 2}}$$

Definičný obor funkcie je $D(f) = (2, \infty)$.

Príklad 4 *Nájdime definičný obor funkcie f:* $y=\dfrac{e^x}{\sqrt{x-2}}$.

Riešenie: Z podmienky, že menovateľ sa nesmie rovnať nule platí

$$\sqrt{x-2}\neq 0$$

a z podmienky, že výraz po párnou odmocninou môže byť len nezáporný platí

$$x-2\geq 0\,.$$

Z obidvoch podmienok vyplýva

$$\underline{\underline{x>2}}\,.$$

Definičný obor funkcie je $D(f)=(2,\infty)$.

Príklad 5 *Nájdime definičný obor funkcie f:* $y=\sqrt{\log_5(3x+2)}$.

Riešenie: Z podmienok pre výraz pod párnou odmocninou a pre argument logaritmu pri základe $a=5$ vyplývajú tieto nerovnice

$$\log_5(3x+2)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x+2\geq 1$$

$$\underline{\underline{x\geq -\frac{1}{3}}}\,.$$

Definičný obor funkcie je $D(f)=\left\langle -\frac{1}{3},\infty\right)$.

Príklad 6 *Nájdime definičný obor funkcie f:* $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x+2)}$.

Riešenie: Z podmienok pre výraz pod párnou odmocninou a pre argument logaritmu pri základe $a=\frac{1}{2}$ vyplývajú tieto nerovnice

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x+2)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0<3x+2\leq 1$$

Riešime sústavu nerovníc

$$3x+2>0 \quad\wedge\quad 3x+2\leq 1$$

$$\underline{\underline{x>-\frac{2}{3}}} \quad\wedge\quad \underline{\underline{x\leq -\frac{1}{3}}}\,,$$

potom definičný obor funkcie je $D(f)=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right\rangle$.

Príklad 7 *Nájdime definičný obor funkcie f:* $y=\arcsin\dfrac{2x-5}{4}$.

Riešenie: Funkcia $y=\arcsin t$ je definovaná pre t na intervale $\langle -1,1\rangle$, preto

$$-1\leq \frac{2x-5}{4}\leq 1$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} \le x \le \frac{9}{2}}}.$$

Definičný obor funkcie je $D(f) = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{9}{2} \right\rangle$.

Príklad 8 *Nájdime definičný obor funkcie f:* $y = \sqrt{25 - x} - 3\log\frac{-2}{x}$.

Riešenie: Výraz pod druhou odmocninou musí byť nezáporný a súčasne výraz pod logaritmom musí byť kladný, teda platí

$$25 - x \ge 0 \qquad \wedge \qquad \frac{-2}{x} > 0,$$

$$\underline{\underline{x \le 25}} \qquad \wedge \qquad \underline{\underline{x < 0}}$$

prienik týchto intervalov je definičný obor $D(f) = (-\infty, 0)$.

V úlohách 1 – 62 nájdite definičné obory funkcií:

		Výsledky:
1.	$f: y = \frac{2+x}{x-2}$	$\mathbf{R} - \{2\}$
2.	$f: y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$	$\mathbf{R} - \{2, 3\}$
3.	$f: y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$	$\mathbf{R} - \{1\}$
4.	$f: y = \sqrt{x+3}$	$\langle -3, \infty)$
5.	$f: y = \sqrt{x^2 - x - 2}$	$(-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, \infty)$
6.	$f: y = \sqrt{2 + x - x^2}$	$\langle -1, 2\rangle$
7.	$f: y = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$	$(1, \infty)$
8.	$f: y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$	$(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$
9.	$f: y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$	$(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
10.	$f: y = \sqrt{\frac{3}{x-4}}$	$(4, \infty)$
11.	$f: y = \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}$	$(-\infty, -4) \cup \langle 3, \infty)$
12.	$f: y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}}$	$(-\infty, -2) \cup \langle 1, \infty)$

13.	$f: y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}}$	$(-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,2) \cup (3,\infty)$
14.	$f: y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$	$(-1,1\rangle \cup \langle 2,3)$
15.	$f: y=\ln(x-5)$	$(5,\infty)$
16.	$f: y=\ln(x^2+4x)$	$(-\infty,-4)\cup(0,\infty)$
17.	$f: y=\log\dfrac{1}{x-1}$	$(1,\infty)$
18.	$f: y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}$	$(2,\infty)$
19.	$f: y=\log_3\dfrac{2}{x^2-4x+4}$	$\mathbf{R}-\{2\}$
20.	$f: y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$	$(-1,1)$
21.	$f: y=\log_4\sqrt{x^2-x-2}$	$(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$
22.	$f: y=\log_{\frac{1}{4}}\sqrt{2-x-x^2}$	$(-2,1)$
23.	$f: y=\sqrt{\log_2\dfrac{3}{x-3}}$	$(3,6\rangle$
24.	$f: y=\sqrt{\log_2\dfrac{3x}{x-3}}$	$\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right\rangle \cup (3,\infty)$
25.	$f: y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1)}$	$\langle 0,1)\cup(1,2\rangle$
26.	$f: y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2x-1}{5+3x}}$	$(-\infty,-6\rangle \cup \left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$
27.	$f: y=\lvert x^2-7x+12\rvert$	$\mathbf{R}$
28.	$f: y=\left\lvert\dfrac{2x+3}{x-6}\right\rvert$	$\mathbf{R}-\{6\}$
29.	$f: y=\dfrac{x^5}{\lvert x^2-1\rvert}$	$\mathbf{R}-\{\pm 1\}$
30.	$f: y=\sqrt{\dfrac{1}{\lvert x^3\rvert}}$	$\mathbf{R}-\{0\}$
31.	$f: y=\log\lvert 3x-6\rvert$	$\mathbf{R}-\{2\}$
32.	$f: y=e^{\frac{x}{x+1}}$	$\mathbf{R}-\{-1\}$
33.	$f: y=2^{\sqrt{x^2+5x+6}}$	$(-\infty,-3\rangle \cup \langle -2,\infty)$
34.	$f: y=10^{\ln(x-4)}$	$(4,\infty)$

35.	$f: y=\dfrac{2^{4x+2}}{3^{2x+1}}$	**R**
36.	$f: y=\arcsin\dfrac{1-2x}{4}$	$\left\langle -\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right\rangle$
37.	$f: y=\arcsin(x^2-3)$	$\left\langle -2,-\sqrt{2}\right\rangle\cup\left\langle \sqrt{2},2\right\rangle$
38.	$f: y=\arccos\dfrac{3x+2}{4}$	$\left\langle -2,\dfrac{2}{3}\right\rangle$
39.	$f: y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$	$\left\langle -\dfrac{1}{3},1\right\rangle$
40.	$f: y=\mathrm{arctg}\dfrac{x-1}{6}$	**R**
41.	$f: y=\mathrm{arccotg}\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$	$(-\infty,-3)\cup\langle 2,\infty)$
42.	$f: y=\arcsin(\log\dfrac{x}{10})$	$\langle 1,100\rangle$
43.	$f: y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\log(2x-3)$	$\left(\dfrac{3}{2},2\right)\cup(2,\infty)$
44.	$f: y=\sqrt{x}+\sqrt[5]{\dfrac{1}{2x-5}}+\ln(2x-3)$	$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{2},\infty\right)$
45.	$f: y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$	$\langle -1,3\rangle$
46.	$f: y=\sqrt{\sin x}+\sqrt[4]{9-x^2}$	$\langle 0,3\rangle$
47.	$f: y=\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+2}}+\sqrt{4-x^2}$	$(-2,2\rangle$
48.	$f: y=\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+2}}-3\log(x^2+4x+4)$	**R** - $\{-2\}$
49.	$f: y=\log_{12}(2x+6)+\sqrt{x^2-4x+3}$	$(-3,1\rangle\cup\langle 3,\infty)$
50.	$f: y=\dfrac{\ln x}{x-3}+\sqrt{6x-x^2-9}$	$\{\ \}$
51.	$f: y=\log(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x})$	$\langle 4,6\rangle$
52.	$f: y=\log(1-\log(x^2-5x+16))$	$(2,3)$
53.	$f: y=\dfrac{1}{\mathrm{arctg}(x-\frac{\pi}{2})}+\mathrm{tg}\,x-\sqrt{4-x^2}$	$\left\langle -2,-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},2\right\rangle$
54.	$f: y=\arcsin\dfrac{x-1}{x+1}+\sqrt{\log(x+2)}$	$\langle 0,\infty)$
55.	$f: y=\ln(x^2-4x+3)+\arccos\dfrac{x-4}{2}$	$(3,6\rangle$

56.	$f: y = \ln(x^2 - x - 12) + 2\arcsin\dfrac{3x}{20}$	$\left\langle -\dfrac{20}{3}, -3\right) \cup \left(4, \dfrac{20}{3}\right\rangle$
57.	$f: y = \dfrac{x}{\sqrt{2x+8}} - \arccos(3x+10)$	$\left\langle -\dfrac{11}{3}, -3\right\rangle$
58.	$f: y = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{\ln x} + \arcsin\dfrac{1-2x}{4}$	$\left\langle 2, \dfrac{5}{2}\right\rangle$
59.	$f: y = \dfrac{\ln(3x+21)}{x^3 - 3x^2 + 2x}$	$(-7,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$
60.	$f: y = \dfrac{\ln(3-2x)}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$	$(-\infty, -5) \cup \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$
61.	$f: y = \dfrac{\ln x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$	$(0,2) \cup (3,\infty)$
62.	$f: y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}{\ln(3-2x)} + \operatorname{arctg}(e^x + 2)$	$(-\infty, -5\rangle \cup \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

1.2 Inverzná funkcia

Algoritmus hľadania inverznej funkcie $y^{-1} = f^{-1}(x)$ k funkcii $y = f(x)$ je takýto:

- zistíme, na akom intervale je funkcia f prostá, teda kde k nej inverzná funkcia f^{-1} existuje,
- vymeníme x za y a naopak,
- vyjadríme y pomocou x.

Príklad 1 *K funkcii* $f: y = 2\ln(x+5)$ *nájdime inverznú funkciu.*

Riešenie: Funkcia f je prostá na celom svojom definičnom obore $D(f) = (-5,\infty)$, preto k nej existuje inverzná funkcia na celom definičnom obore.

$$y = 2\ln(x+5),$$

vymeníme navzájom x a y

$$x = 2\ln(y+5),$$

osamostatníme výraz obsahujúci y,

$$\frac{x}{2} = \ln(y+5),$$

aby sme vyjadrili y, použijeme inverznú funkciu k logaritmickej funkcii, exponenciálnu funkciu

$$e^{\frac{x}{2}} = y + 5$$

$$y = e^{\frac{x}{2}} - 5$$

Inverzná funkcia k f je $f^{-1}: y = e^{\frac{x}{2}} - 5$.

Príklad 2 *K funkcii* $f: y = 3 + 5\arccos\dfrac{2x-3}{5}$ *nájdime inverznú funkciu.*

Riešenie: Funkcia f je prostá na celom svojom definičnom obore $D(f) = \langle -1, 4\rangle$, preto k nej môžeme hľadať na celom definičnom obore inverznú funkciu.

$$y = 3 + 5\arccos\frac{2x-3}{5},$$

vymeníme navzájom x a y

$$x = 3 + 5\arccos\frac{2y-3}{5},$$

osamostatníme výraz obsahujúci y,

$$\frac{x-3}{5} = \arccos\frac{2y-3}{5},$$

,

aby sme vyjadrili y, použijeme inverznú funkciu k funkcii $y = \arccos x$

$$\cos\frac{x-3}{5} = \frac{2y-3}{5}$$

$$y = \frac{3 + 5\cos\frac{x-3}{5}}{2}$$

Inverzná funkcia k f je $f^{-1}: y = \dfrac{3 + 5\cos\frac{x-3}{5}}{2}$.

Príklad 3 *K funkcii* $f: y = \dfrac{4^x - 2}{12 - 3\cdot 4^x}$ *nájdime inverznú funkciu.*

Riešenie: Funkcia f je prostá na intervale $(-\infty, 1)$ a na intervale $(1, \infty)$, preto k nej môžeme hľadať inverznú funkciu len na jednotlivých zúženiach definičného oboru.

$$y = \frac{4^x - 2}{12 - 3\cdot 4^x},$$

vymeníme navzájom x a y

$$x = \frac{4^y - 2}{12 - 3\cdot 4^y},$$

osamostatníme výraz obsahujúci y,

$$4^y = \frac{12x + 2}{3x + 1},$$

aby sme vyjadrili y, použijeme inverznú funkciu k funkcii $y = 4^x$

$$y = \log_4\left(\frac{12x+2}{3x+1}\right).$$

Inverzná funkcia k f je $f^{-1}: y = \log_4\left(\frac{12x+2}{3x+1}\right)$.

V úlohách 1 – 23 nájdite k daným funkciám inverzné funkcie:

Výsledky:

1. $f: y = \frac{1-x}{1+x}$ — $f^{-1} = \frac{1-x}{1+x}$
2. $f: y = \frac{3x-1}{4x+5}$ — $f^{-1} = \frac{5x+1}{3-4x}$
3. $f: y = \log_2(2x+2)$ — $f^{-1} = \frac{2^x-2}{2}$
4. $f: y = \frac{3-2^x}{4+2^x}$ — $f^{-1} = \log_2\frac{3-4x}{x+1}$
5. $f: y = \frac{2.5^x-4}{3.5^x+2}$ — $f^{-1} = \log_5\frac{4+2x}{2-3x}$
6. $f: y = 7\log(2-2^x)$ — $f^{-1} = \log_2\left(2-10^{\frac{x}{7}}\right)$
7. $f: y = 3-2\arccos\left(\frac{3x+1}{2}\right)$ — $f^{-1} = \frac{2\cos\left(\frac{3-x}{2}\right)-1}{3}$
8. $f: y = 5+\sqrt{4+e^{5x}}$ — $f^{-1} = \frac{1}{5}\ln(x^2-10x+21)$
9. $f: y = 1+\sin\frac{x-1}{x+1}$ — $f^{-1} = \frac{1+\arcsin(x-1)}{1-\arcsin(x-1)}$
10. $f: y = 3^{2-\operatorname{arccotg} x}$ — $f^{-1} = \operatorname{cotg}(2-\log_3 x)$
11. $f: y = \ln e^{\frac{x+2}{2}}$ — $f^{-1} = 2x-2$
12. $f: y = 2+7\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{3}$ — $f^{-1} = \frac{1+3\operatorname{tg}\frac{x-2}{7}}{2}$
13. $f: y = \sin(2x-1)$ — $f^{-1} = \frac{1+\arcsin x}{2}$
14. $f: y = 1+\arcsin\frac{x-1}{2}$ — $f^{-1} = 1+2\sin(x-1)$
15. $f: y = \sqrt{2+3^x}$ — $f^{-1} = \log_3(x^2-2)$
16. $f: y = \cos\frac{x}{3}$ — $f^{-1} = 3\arccos x$
17. $f: y = 1-\operatorname{arccotg}\frac{x-4}{2}$ — $f^{-1} = 4+2\operatorname{cotg}(1-x)$
18. $f: y = 3^{\cos x}$ — $f^{-1} = \arccos(\log_3 x)$

19. $f: y = 2^{\frac{x}{x+1}}$ $\qquad f^{-1} = \dfrac{\log_2 x}{1-\log_2 x}$

20. $f: y = 3 + 4\arccos(2x-1)$ $\qquad f^{-1} = \dfrac{1+\cos\frac{x-3}{4}}{2}$

21. $f: y = \ln(1-2x)$ $\qquad f^{-1} = \dfrac{1-e^x}{2}$

22. $f: y = 3^{1+\ln\sqrt{x-1}}$ $\qquad f^{-1} = 1 + e^{2(\log_3 x - 1)}$

23. $f: y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2-\sqrt[3]{x}}$ $\qquad f^{-1} = \left(\dfrac{2x}{1+x}\right)^3$

1.3 Párnosť a nepárnosť funkcie

- Funkciu $y = f(x)$ nazývame párnou, ak pre každé x aj $-x$ z jej $D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$.
- Funkciu $y = f(x)$ nazývame nepárnou, ak pre každé x aj $-x$ z jej $D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$.
- Funkcia, ktorá nespĺňa ani jednu z prechádzajúcich vlastností nie je ani párna ani nepárna.
- Graf párnej funkcie je osovo súmerný podľa o_y (napr. $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$, ...).
- Graf nepárnej funkcie je stredovo súmerný podľa bodu $O = [0,0]$ (napr. $y = x$, $y = \sin x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{tg} x$, ...).

Príklad 1 *Vyšetrime párnosť, resp. nepárnosť funkcie* $f: y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Riešenie: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ a pre každé x aj $-x$ z $D(f)$ je

$$\underline{\underline{f(-x)}} = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = \underline{\underline{f(x)}}.$$

Pretože $f(-x) = f(x)$, funkcia je párna.

Príklad 2 *Vyšetrime párnosť, resp. nepárnosť funkcie* $f: y = \dfrac{2^x+1}{2^x-1}$.

Riešenie: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ a pre každé x aj $-x$ z $D(f)$ je

$$\underline{\underline{f(-x)}} = \frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1} = \frac{\frac{1}{2^x}+1}{\frac{1}{2^x}-1} = \frac{\frac{1+2^x}{2^x}}{\frac{1-2^x}{2^x}} = \frac{1+2^x}{1-2^x} = -\frac{2^x+1}{2^x-1} = \underline{\underline{-f(x)}}.$$

Pretože $f(-x) = -f(x)$, funkcia je nepárna.

Príklad 3 *Vyšetrime párnosť, resp. nepárnosť funkcie* $f: y = 3^{\sin x}$.

Riešenie: $D(f) = \mathbf{R}$ a pre každé x aj $-x$ z $D(f)$ je

$$\underline{\underline{f(-x)}} = 3^{\sin(-x)} = 3^{-\sin x} = \frac{1}{3^{\sin x}} \neq \underline{\underline{\pm f(x)}}.$$

Pretože $f(-x) \neq \pm f(x)$, funkcia nie je ani párna ani nepárna.

Príklad 4 *Vyšetrime párnosť, resp. nepárnosť funkcie* $f: y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Riešenie: $D(f) = \mathbf{R} - \{1\}$ a preto neplatí, že pre každé x je aj $-x$ z $D(f)$ funkcie. Napríklad, k číslu $x = -1$, ktoré patrí do definičného oboru funkcie, neexistuje číslo opačné, čiže číslo $x = 1$, ktoré by tiež patrilo do definičného oboru funkcie. Na základe toho je zrejmé, že nie je splnená nutná podmienka pre to, aby mohla byť funkcia párna alebo nepárna.

Teda funkcia, funkcia $f: y = \dfrac{x^2}{x-1}$ nie je ani párna ani nepárna.

V úlohách 1 – 16 vyšetrite párnosť, resp. nepárnosť funkcií na intervaloch, kde je funkcia prostá

		Výsledky:
1.	$f: y = x^5 - x$	nepárna
2.	$f: y = \dfrac{x-2}{x+2}$	ani párna ani nepárna
3.	$f: y = \sin x + \cos x$	ani párna ani nepárna
4.	$f: y = \dfrac{\cos x}{x}$	nepárna
5.	$f: y = \log\dfrac{2-x}{2+x}$	nepárna
6.	$f: y = \cos^2 x - \sin^2 x$	párna
7.	$f: y = x^2 + \sin x^2$	párna
8.	$f: y = 2\sin x \cos x$	nepárna
9.	$f: y = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$	párna
10.	$f: y = x\log\lvert x\rvert$	nepárna
11.	$f: y = 5^x + \cos x$	ani párna ani nepárna
12.	$f: y = x^2 - \cos x^2$	párna
13.	$f: y = \cos(\pi - x)$	párna
14.	$f: y = \sin(\pi + x)$	nepárna
15.	$f: y = \dfrac{1}{x}.\cos\dfrac{1}{x}$	nepárna
16.	$f: y = x + \sin x$	nepárna

2 LIMITA FUNKCIE

2.1 Výpočet limity funkcie

Pri počítaní limít postupujeme takto:

- zistíme typ neurčitosti (typ limity),
- vhodnou úpravou odstránime neurčitosť,
- dosadením limitu vypočítame.

Príklad 1 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Riešenie: Po dosadení $x=2$ do funkcie zistíme, že sa jedná o neurčitosť typu $\dfrac{0}{0}$, to znamená, že číslo $x=2$ je koreňom polynómu v čitateli aj v menovateli. V takomto prípade predelíme aj čitateľa aj menovateľa výrazom $(x-2)$, potom

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{-1}{-8}=\frac{1}{8}.$$

Príklad 2 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

Riešenie: Po dosadení $x=0$ do funkcie zistíme, že sa jedná o neurčitosť typu $\dfrac{0}{0}$, ale pri počítaní takejto limity je vhodná úprava tzv. rozšírenie „vhodnou jednotkou“, v našom prípade v tvare $\dfrac{\sqrt{1+3x}+1}{\sqrt{1+3x}+1}$. Táto úprava využitím vzťahu $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ odstráni odmocninu v menovateli.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+3x}+1}{\sqrt{1+3x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sqrt{1+3x}+1)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Príklad 3 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Riešenie: V prípadoch, keď počítame limitu funkcie, v ktorej vystupuje goniometrická funkcia a typ neurčitosti $\dfrac{0}{0}$, využijeme zväčša vzorec $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.
Našou úlohou je funkciu najprv vhodne upraviť (rozšíriť „vhodnou jednotkou“), aby sme mohli uvedený vzorec použiť.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Príklad 4 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5}{3x^2+6x+2}$.

Riešenie: Počítame limitu neurčitosti typu $\frac{\infty}{\infty}$, kde sa najčastejšie využíva úprava „delenie čitateľa aj menovateľa x-om s najvyššou mocninou menovateľa“.
V tomto prípade je v menovateli najvyššou mocninou x^2. Preto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2+6x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{2-0}{3+0+0}=\frac{2}{3}.$$

Príklad 5 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5}{3x^4+6x+2}$.

Riešenie: Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade, ale čitateľa a menovateľa funkcie delíme x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^4+6x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^4}}{3+\frac{6}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0-0}{3+0+0}=0.$$

Príklad 6 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6+10x^2+5}{100x^3-2}$.

Riešenie: Tak, ako v oboch predchádzajúcich príkladoch, aj tu riešime limitu funkcie s neurčitosťou $\frac{\infty}{\infty}$, ale čitateľa a menovateľa funkcie delíme x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^6+10x^2+5}{100x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}}{100-\frac{2}{x^3}}=\frac{\infty+0+0}{100-0}=\infty.$$

Príklad 7 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Riešenie: Pri limite s neurčitosťou typu $\infty-\infty$ funkciu rozšírime „vhodnou jednotkou“, teraz v tvare $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ a potom počítame podobným postupom ako v Príkladoch 4, 5, 6.

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot(x^2+1-x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}.$$

V úlohách 1 – 36 vypočítajte limity funkcií:

		Výsledky:
1.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$	9
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$	$\frac{3}{4}$
3.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$	4
4.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$	0
5.	$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$	0
6.	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$	-2
7.	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+6x+5}$	$-\frac{1}{2}$
8.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2+4x-12}$	$\frac{3}{4}$
9.	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$	$-\frac{2}{5}$
10.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$	$\frac{1}{2}$
11.	$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$	-1
12.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
13.	$\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$	$\frac{1}{4}$
14.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$	0
15.	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$	$\frac{1}{4}$

16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ $\quad -\dfrac{1}{3}$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ $\quad 3$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ $\quad 3$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{x}$ $\quad 5$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ $\quad \dfrac{2}{3}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$ $\quad \dfrac{11}{3}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x}{\sin 5x}$ $\quad \dfrac{2}{5}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x}{\mathrm{tg}6x}$ $\quad \dfrac{5}{6}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x.\sin x}$ $\quad 2$

25. $\lim\limits_{x\to 0} x\mathrm{cotg}x$ $\quad 1$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right)$ $\quad 0$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$ $\quad 1$

28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\mathrm{tg}\,x}$ $\quad -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$ $\quad 0$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x}{10x^2-3x+1}$ $\quad \infty$

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$ $\quad \dfrac{1}{2}$

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$ $\quad -1$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$ $\quad 0$

34. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$ $\quad 0$

35. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ $\quad 0$

36. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$ $\quad \dfrac{5}{2}$

2.2 Výpočet limity postupnosti

Pri limitách postupnosti sa najčastejšie stretávame s neurčitosťami typu $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ktoré počítame analogicky ako pri limite funkcie.

Príklad 1 *Vypočítajme* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3+2n^2-1}{3n^3-5n+2}$.

Riešenie: Jedná sa o neurčitosť typu $\frac{\infty}{\infty}$, v tomto prípade postupujeme tak ako pri limite funkcie, čiže čitateľa a menovateľa predelíme n^k, kde k je najväčší mocniteľ menovateľa.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+2n^2-1}{3n^3-5n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}}{3-\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}}=\frac{4+0-0}{3-0+0}=\frac{4}{3}.$$

Príklad 2 *Vypočítajme* $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{n^2+2})$.

Riešenie: Táto limita je typu $\infty-\infty$ a znova postupujeme podobne ako pri limite funkcie s touto neurčitosťou, teda výraz rozšírime „vhodnou jednotkou“, potom dostaneme neurčitosť typu $\frac{\infty}{\infty}$ a ďalej postupujeme tak ako v predchádzajúcom príklade.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{n^2+2})\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n-1}+\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+2n-1}+\sqrt{n^2+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{\sqrt{n^2+2n-1}+\sqrt{n^2+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}=\frac{2-0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1+0}}=1$$

Príklad 3 *Vypočítajme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{4n-3}$.

Riešenie: Po dosadení zistíme, že táto limita je typu 1^{∞}. Pri počítaní takýchto limít je dôležité poznať vzťah $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1\pm\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{\pm1}$.

Našou úlohou je teda upraviť výraz v limite tak, aby sme mohli použiť uvedený vzorec.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{4n-3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2+3}{3n-2}\right)^{4n-3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n-2}+\frac{3}{3n-2}\right)^{4n-3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n-2}{3}}\right)^{4n-3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n-2}{3}}\right)^{\frac{3n-2}{3}\cdot\frac{3}{3n-2}\cdot(4n-3)}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n-2}{3}}\right)^{\frac{3n-2}{3}}\right]^{\frac{3}{3n-2}\cdot(4n-3)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot(4n-3)}{3n-2}}=e^4.$$

Príklad 4 *Vypočítajme* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+4)!}{(n+5)!}$.

Riešenie: Najprv potrebujeme výraz v čitateli a menovateli upraviť tak, aby sme odstránili faktoriály. Väčšie výrazy s faktoriálom upravíme pomocou menších výrazov, ktoré budeme vyberať pred zátvorku, aby sme ich mohli krátiť.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!+(n+4)!}{(n+5)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!+(n+4)(n+3)!}{(n+5)\cdot(n+4)(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!(n+5)}{(n+3)!(n+5)(n+4)}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)}{(n+5)(n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+4}=0.$$

Príklad 5 *Vypočítajme* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$.

Riešenie: V tomto prípade je nutné použiť najprv vzorec pre súčet n členov aritmetickej postupnosti $s_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(1+n)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

Príklad 6 *Vypočítajme* $\lim\limits_{n\to\infty}n[\ln(n-2)-\ln(n+1)]$.

Riešenie: S využitím vzťahov, ktoré platia pre logaritmy upravíme výraz pod limitou a dostaneme sa k neurčitosti typu 1^∞, s ktorou sme sa stretli v Príklade 3.

$$\lim_{n\to\infty}n[\ln(n-2)-\ln(n+1)]=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n=\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n\right]=\ln\left[e^{-3}\right]=-3.$$

V úlohách 1 – 40 vypočítajte limity postupností:

Výsledky:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{5n}\right)$ — 2

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4-1}$ — 0

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}+3$ — 4

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{10}$ — 1

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+5}{3n-1}$ — $\dfrac{2}{3}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$ — $\dfrac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-5n+2}{2n^2+3}$ — 2

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{3n+2}$ — $\dfrac{1}{3}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$ — 0

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^4-7n^2+10}{n-1}$ — ∞

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5}+1}{\sqrt{n^3}-n+2}$ — ∞

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{n}}{n}$ — 0

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$ — 1

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n}$ — 1

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3}$ — 1

16. $\lim\limits_{n\to\infty} 4^{\frac{3n+1}{6n-5}}$ — 2

17. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\frac{2n^2-1}{n^2+1}}$ — 9

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \log\dfrac{n}{2n-3}$ — $\log\dfrac{1}{2}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\dfrac{3n^2+1}{3n^2-1}$ — 0

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2\dfrac{n}{3}$ — ∞

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n+3}\right)^{n}$ — e^2

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{n-1}$ $\quad e^{-3}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n+2}\right)^{2n}$ $\quad e^{-1}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n}$ $\quad e^{-1}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n}$ $\quad e^{-2}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$ $\quad e$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2+1}$ $\quad e^{-1}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n-2}\right)^{\frac{n}{2}}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{2n-1}\right)^{n}$ $\quad 0$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{4n-3}\right)^{n-1}$ $\quad 0$

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{2n}\right)^{n}$ $\quad \infty$

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2-5}{2n^2-1}\right)^{\frac{n+1}{3}}$ $\quad \infty$

33. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ $\quad 0$

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}.(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ $\quad \dfrac{1}{2}$

35. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln n-\ln(n+1)]$ $\quad -1$

36. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+2)-\ln(n+1)]$ $\quad 1$

37. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n-1)-\ln n]$ $\quad -1$

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$ $\quad 0$

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$ $\quad 0$

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$ $\quad 1$

3 DERIVÁCIA FUNKCIE

3.1 Výpočet derivácie funkcie

Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú v bode x_0 derivácie $f'(x_0)$ a $g'(x_0)$, nech $c \in \mathbf{R}$. Potom funkcie cf, $f+g$, fg a ak $g(x_0) \neq 0$, tak aj funkcia $\frac{f}{g}$ majú derivácie v bode x_0 pre ktoré platí:

- $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$,
- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

Základné vzorce pre výpočet derivácie platné na množine, kde derivácie existujú:

$(c)' = 0$, $c \in R$

$(x^a)' = a\,x^{a-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0, a \neq 1$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{cotg}\, x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arccotg}\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = \left[e^{g(x) \cdot \ln f(x)}\right]'$

Príklad 1 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x)=x^5+x^{\frac{7}{3}}-2$.

Riešenie:

$$f'(x)=5\cdot x^{5-1}+\frac{7}{3}\cdot x^{\frac{7}{3}-1}-0=5x^4+\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}=5x^4+\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}\,.$$

Príklad 2 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x)=\sqrt[3]{x}+e^x+5\cdot 4^x-\log_2 x$.

Riešenie:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1}+e^x+5\cdot 4^x\cdot\ln 4-\frac{1}{x\ln 2}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+e^x+5\cdot 4^x\cdot\ln 4-\frac{1}{x\ln 2}=$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+e^x+5\cdot 4^x\cdot\ln 4-\frac{1}{x\ln 2}.$$

Príklad 3 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x)=e^x\cdot\sin x$.

Riešenie: Funkcia f je v tvare súčinu

$$f'(x)=(e^x)'\cdot\sin x+e^x\cdot(\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)\,.$$

Príklad 4 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Riešenie: Funkcia f je v tvare podielu

$$f'(x)=\frac{(\operatorname{arctg} x)'\cdot x-\operatorname{arctg} x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x-\operatorname{arctg} x\cdot 1}{x^2}=\frac{x-(1+x^2)\cdot\operatorname{arctg} x}{x^2\cdot(1+x^2)}\,.$$

Príklad 5 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Riešenie: Funkciu vyjadríme v tvare $f(x)=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$ a potom použijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Príklad 6 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x) = \operatorname{arccotg} \dfrac{x+1}{x-1}$.

Riešenie:

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{\frac{2(x^2+1)}{(x-1)^2}} \cdot \frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= -\frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} \cdot \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Príklad 7 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x) = \sin^2 x^5$.

Riešenie: Funkciu upravíme na tvar $f(x) = (\sin x^5)^2$ a znova použijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie

$$f'(x) = 2(\sin x^5)^{2-1} \cdot (\sin x^5)' = 2(\sin x^5)(\cos x^5)\cdot(x^5)' = 2(\sin x^5)(\cos x^5)\, 5x^{5-1} =$$

$$= 2(\sin x^5)(\cos x^5)\cdot 5x^4 = 10x^4(\sin x^5)(\cos x^5)\ .$$

Príklad 8 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x) = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{(1+2x)^3}$.

Riešenie: Funkciu upravíme na tvar $f(x) = \ln \operatorname{arctg}\, (1+2x)^{\frac{3}{2}}$ a znova použijeme vzorec pre deriváciu zloženej funkcie

$$f'(x) = \left(\ln \operatorname{arctg}\,(1+2x)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\,(1+2x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\operatorname{arctg}\,(1+2x)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\,(1+2x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{1+(1+2x)^3} \cdot$$

$$\left((1+2x)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\,(1+2x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{1+(1+2x)^3} \cdot \frac{3}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x)' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{(1+2x)^3}} \cdot \frac{3\sqrt{1+2x}}{1+(1+2x)^3}.$$

Príklad 9 *Vypočítajme deriváciu funkcie* $f(x) = (x^2+1)^{\sin x}$.

Riešenie: Funkciu upravíme na tvar $f(x) = e^{\sin x \cdot \ln(x^2+1)}$ a derivujeme ju ako zloženú funkciu

$$f'(x) = e^{\sin x \cdot \ln(x^2+1)} \cdot \left[\sin x \cdot \ln(x^2+1)\right]' =$$

$$= e^{\sin x \cdot \ln(x^2+1)} \cdot \left[(\sin x)' \cdot \ln(x^2+1) + \sin x \cdot (\ln(x^2+1))'\right] =$$

$$= (x^2+1)^{\sin x}\left[\cos x \cdot \ln(x^2+1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right] =$$

$$= (x^2+1)^{\sin x}\left[\cos x \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2x \sin x}{x^2+1}\right].$$

V úlohách 1 – 35 zderivujte funkciu $f(x)$

Výsledky:

1. $f(x)=x^5-7x^2+3x-5$ — $f'(x)=5x^4-14x+3$

2. $f(x)=\sqrt[3]{x^4}+5^x-\ln x$ — $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}+5^x\ln 5-\frac{1}{x}$

3. $f(x)=(x^3-x+1)\cos x$ — $f'(x)=(3x^2-1)\cos x-(x^3-x+1)\sin x$

4. $f(x)=2^x\log_2 x$ — $f'(x)=2^x\left(\ln 2\cdot\log_2 x+\frac{1}{x\ln 2}\right)$

5. $f(x)=x10^{-x}$ — $f'(x)=10^{-x}(1-x\ln 10)$

6. $f(x)=\frac{\sin x}{x-1}$ — $f'(x)=\frac{(x-1)\cos x-\sin x}{(x-1)^2}$

7. $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ — $f'(x)=\frac{1}{x\cos^2 x}-\frac{\operatorname{tg} x}{x^2}$

8. $f(x)=\frac{x^2+5x+2}{x^2-5x+1}$ — $f'(x)=\frac{15-2x-10x^2}{(x^2-5x+1)^2}$

9. $f(x)=\ln\sin 2x$ — $f'(x)=2\operatorname{cotg}2x$

10. $f(x)=\ln\frac{5+4x}{3+7x}$ — $f'(x)=\frac{-23}{(3+7x)(5+4x)}$

11. $f(x)=\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$ — $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}}$

12. $f(x)=\sqrt{\sin\frac{2x}{3}}$ — $f'(x)=\frac{\cos\frac{2x}{3}}{3\sqrt{\sin\frac{2x}{3}}}$

13. $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+x+\operatorname{tg} x$ — $f'(x)=\frac{\operatorname{tg} x+\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$

14. $f(x)=\sin\sqrt{1+x^2}+\sin(\sin x)$ — $f'(x)=\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}+\cos x\cdot\cos(\sin x)$

15. $f(x)=\arcsin^2 x$ — $f'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$ — $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

17. $f(x)=\arccos\frac{3x-1}{4}$ — $f'(x)=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5+2x-3x^2}}$

18. $f(x)=\operatorname{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{2+2x^2}$

19. $f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$ $\qquad f'(x)=1$

20. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$

21. $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ $\qquad f'(x)=\arcsin x$

22. $f(x)=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$ $\qquad f'(x)=\arccos x$

23. $f(x)=\ln^4\sin x+\ln(x^2-2x)$ $\qquad f'(x)=4\ln^3\sin x\cdot\operatorname{cotg}x+\dfrac{2x-2}{x^2-2x}$

24. $f(x)=\sqrt[3]{\ln\sin\dfrac{x}{2}}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{\operatorname{cotg}\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x}{2}}}$

25. $f(x)=x^x$ $\qquad f'(x)=x^x(1+\ln x)$

26. $f(x)=x^{e^x}$ $\qquad f'(x)=e^x x^{e^x}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

27. $f(x)=x^{\sin x}$ $\qquad f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

28. $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$ $\qquad f'(x)=(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right)$

29. $f(x)=x^{\ln x}$ $\qquad f'(x)=2x^{\ln x-1}\ln x$

30. $f(x)=(\sin x)^x$ $\qquad f'(x)=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{cotg}x)$

31. $f(x)=\sqrt[x]{x}$ $\qquad f'(x)=\sqrt[x]{x}\left(\dfrac{1-\ln x}{x^2}\right)$

32. $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{3x^3}+\ln\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arctg}x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{x^5+1}{x^4(1+x^2)}$

33. $f(x)=\ln\cos\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^x+e^{-x}}$

34. $f(x)=x(\arcsin x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$

$f'(x)=(\arcsin x)^2$

35. $f(x)=\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$ $\qquad f'(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^4-1}$

3.2 Geometrický význam derivácie

- Derivácia $f'(x_0)$ funkcie je smernica k_t dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v dotykovom bode $T[x_0, y_0]$, čiže $f'(x_0) = k_t$ a smernica normály je $-\dfrac{1}{f'(x_0)} = k_n$.
- Rovnica dotyčnice je $t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
- Rovnica normály, ak $f'(x_0) \neq 0$ je $n: y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.
- V úlohách často využívame poznatok, že ak sú dve priamky rovnobežné, majú rovnakú smernicu k.

Príklad 1 *Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie* $f(x) = x^2 + 1$ *v bode* $T = [1,?]$.

Riešenie: Najprv vypočítame y- ovú súradnicu dotykového bodu T. Keďže bod T je dotykový, leží teda na parabole danej funkciou $f(x) = x^2 + 1$, y- ová súradnica je vlastne funkčná hodnota $f(1) = 2$.
Bod $T = [1,2]$.

Do rovnice dotyčnice potrebujeme dosadiť aj smernicu, čiže $f'(x_0) = f'(1) = [2x]_{x_0=1} = 2$.

Rovnica dotyčnice t:
$$y - 2 = 2(x - 1)$$
$$2x - y = 0$$

Rovnica normály n:
$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$
$$x + 2y - 5 = 0$$

Príklad 2 *Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie* $f(x) = \ln x$, *ak je dotyčnica rovnobežná s priamkou* $p: y = x + 1$.

Riešenie: Našou úlohou je nájsť súradnice dotykového bodu T. Pretože dotyčnica má byť rovnobežná s priamkou p, musia byť ich smernice rovnaké
$$k_t = k_p$$
$$f'(x_0) = 1$$
$$\frac{1}{x_0} = 1$$
$$x_0 = 1$$
ďalší postup je rovnaký ako v predchádzajúcom príklade, bod $T = [1,0]$.

Rovnica dotyčnice t:
$$y - 0 = 1(x - 1)$$
$$x - y - 1 = 0$$

Rovnica normály n:
$$y-0=-\frac{1}{1}(x-1)$$
$$x+y-1=0$$

Príklad 3 *Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie* $f(x)=\frac{1}{x}$, *ak je normála kolmá na priamku* $p: y=-\frac{1}{9}x$.

Riešenie: Normála má byť kolmá na priamku p, preto musí byť dotyčnica s priamkou p rovnobežná. Tým sme úlohu previedli na predchádzajúci typ, hľadáme teda dotyčnicu rovnobežnú s priamkou p.

$$k_t=k_p$$
$$f'(x_0)=-\frac{1}{9}$$
$$-\frac{1}{(x_0)^2}=-\frac{1}{9}$$
$$(x_0)^2=9$$
$$x_0=\pm 3$$

Ďalší postup je rovnaký ako v Príklade 1, bod
$$T_1=\left[3,\frac{1}{3}\right]$$
$$T_2=\left[-3,-\frac{1}{3}\right]$$

Rovnica dotyčnice t_1:
$$y-\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}(x-3)$$
$$x+9y-6=0$$

Rovnica dotyčnice t_2:
$$y+\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}(x+3)$$
$$x+9y+6=0$$

Rovnica normály n_1:
$$y-\frac{1}{3}=9(x-3)$$
$$27x-3y-80=0$$

Rovnica normály n_2:
$$y+\frac{1}{3}=9(x+3)$$
$$27x-3y+80=0$$

Príklad 4 *Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie* $f(x)=x^2+2$, *ak je dotyčnica kolmá na priamku* $p: y=-\frac{1}{2}x+1$.

Riešenie: Dotyčnica má byť kolmá na priamku p, preto musí byť normála s priamkou p rovnobežná. Smernica normály a priamky musí byť rovnaká

$$k_n = k_p$$

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2x_0} = -\frac{1}{2}$$

$$x_0 = 1$$

Dotykový bod je $T = [1,3]$.

Rovnica dotyčnice t:

$$y - 3 = 2(x-1)$$
$$2x - y + 1 = 0$$

Rovnica normály n:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x-1)$$
$$x + 2y - 7 = 0$$

V úlohách 1 – 10 nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v dotykovom bode $T[x_0, y_0]$.

			Výsledky:
1.	$f(x) = x^3 - 2x$	$T[1,?]$	$t: x - y - 2 = 0$ $n: x + y = 0$
2.	$f(x) = x^2 - 7x + 4$	$T[1,?]$	$t: 5x + y - 3 = 0$ $n: x - 5y - 11 = 0$
3.	$f(x) = x^3 + 9x + 2$	$T[0,?]$	$t: 9x - y + 2 = 0$ $n: x + 9y - 18 = 0$
4.	$f(x) = \sqrt{x^3}$	$T[1,?]$	$t: 3x - 2y - 1 = 0$ $n: 2x + 3y - 5 = 0$
5.	$f(x) = \sqrt{2x}$	$T\left[\frac{1}{2},?\right]$	$t: 2x - 2y + 1 = 0$ $n: 2x + 2y - 3 = 0$
6.	$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$	$T[0,?]$	$t: 2x - y + 1 = 0$ $n: x + 2y - 2 = 0$
7.	$f(x) = 2x\ln x$	$T[1,?]$	$t: 2x - y - 2 = 0$ $n: x + 2y - 1 = 0$
8.	$f(x) = \frac{\ln x}{x}$	$T[1,?]$	$t: x - y - 1 = 0$

			$n: x+y-1=0$
9.	$f(x)=\dfrac{e^x}{2}+1$	$T[0,?]$	$t: x-2y+3=0$ $n: 4x+2y-3=0$
10.	$f(x)=2\sqrt{2}\sin x$	$T\left[\dfrac{\pi}{4},?\right]$	$t: 4x-2y+4-\pi=0$ $n: 4x+8y-16-\pi=0$

V úlohách 11 – 15 nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$, ak je dotyčnica rovnobežná s priamkou *p*.

11.	$f(x)=x^3+9x+2$	$p: 9x-y+1=0$	$t: 9x-y+2=0$ $n: x+9y-18=0$
12.	$f(x)=\dfrac{2}{x}$	$p: 18x+y+2=0$	$t_1: 18x+y-12=0$ $n_1: x-18y+\dfrac{323}{3}=0$ $t_2: 18x+y+12=0$ $n_2: x-18y-\dfrac{323}{3}=0$
13.	$f(x)=\sqrt{x}$	$p: x-2y-2=0$	$t: x-2y+1=0$ $n: 2x+y-3=0$
14.	$f(x)=2x\ln x$	$p: 2x-y+2=0$	$t: 2x-y-2=0$ $n: x+2y-1=0$
15.	$f(x)=\ln(x+1)$	$p: x-y+3=0$	$t: x-y=0$ $n: x+y=0$

V úlohách 16 – 19 nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$, ak je dotyčnica kolmá na priamku *p*.

16.	$f(x)=x^2-7x+4$	$p: x-5y+5=0$	$t: 5x+y-3=0$ $n: x-5y-11=0$
17.	$f(x)=6x-3x^2$	$p: 6y-x+1=0$	$t: 6x+y-12=0$ $n: x-6y-2=0$
18.	$f(x)=x\ln x$	$p: x-5y+5=0$	$t: 5x+y+e^{-6}=0$ $n: x-5y-31e^{-6}=0$
19.	$f(x)=\sqrt{x^3}$	$p: 4x+6y-9=0$	$t: 3x-2y-1=0$ $n: 2x+3y-5=0$

3.3 L´Hospitalovo pravidlo

- Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$ a nech existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Potom existuje aj $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
- Pre výpočet limít s neurčitosťou $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\infty}{\infty}$ použijeme priamo toto pravidlo.
- Pri neurčitostiach ostatných typov $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, \infty^0, 0^0$ je potrebné funkciu upraviť na neurčitosť typu $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

I. Ak počítame limitu s neurčitosťou $0\cdot\infty$, čiže počítame $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$, upravíme ju takto:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} \quad \textbf{alebo} \quad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

Dostaneme neurčitosť typu $\dfrac{0}{0}$ alebo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

II. Ak počítame limitu s neurčitosťou $\infty-\infty$, teda počítame $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ a pritom je možná úprava na spoločného menovateľa, po jej použití dostaneme limitu s neurčitosťou $\dfrac{0}{0}$.

III. Ak počítame limitu s neurčitosťami $1^{\infty}, \infty^0, 0^0$, čiže počítame $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, použijeme už známu úpravu $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln f(x)}$, teda

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)}.$$

Limita, ktorá vznikne v exponente novej funkcie bude typu $0\cdot\infty$.

Príklad 1 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x}$.

Riešenie: Po dosadení $x=0$ dostaneme neurčitý výraz typu $\dfrac{0}{0}$, takže priamo použijeme L´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln\cos x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1} = 0.$$

Príklad 2 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

Riešenie: V tomto prípade je to neurčitosť typu $\dfrac{\infty}{\infty}$ a opäť použijeme L´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)'}{(2x^2+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x+1}.$$

Teraz po dosadení dostaneme znova neurčitosť typu $\dfrac{\infty}{\infty}$ a opäť môžeme použiť L´Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(4x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Príklad 3 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$.

Riešenie: V tomto prípade ide o limitu typu $\dfrac{\infty}{\infty}$. Použitím L´Hospitalovho pravidla dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x-2}}}{\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x+3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$$

zopakovaním L´Hospitalovho pravidla sa dostaneme k pôvodnej limite. Preto je lepšie pred jeho použitím použiť jednoduchú úpravu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+3}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}}=1.$$

Príklad 4 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to 0+}x\cdot\ln x$.

Riešenie: Počítame s neurčitosťou typu $0\cdot(-\infty)$, postupujeme ako v I.

$$\lim_{x\to 0+}x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0.$$

Príklad 5 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Riešenie: Počítame s neurčitosťou typu $\infty-\infty$, postupujeme ako v II.

$$\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\sin x-x}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\right)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}\right)=\frac{0}{2}=0\,.$$

Príklad 6 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{cotg}x}$.

Riešenie: Počítame s neurčitosťou typu ∞^0, postupujeme ako v III.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{cotg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}e^{\operatorname{cotg}x\cdot\ln\operatorname{tg}x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{cotg}x\cdot\ln\operatorname{tg}x},$$

limita v exponente je neurčitosti typu $0\cdot\infty$ a vypočítame ju zvlášť.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{cotg}x\cdot\ln\operatorname{tg}x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{1}{\operatorname{tg}x}=0\,,$$

vrátime sa k pôvodnej limite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{cotg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}e^{\operatorname{cotg}x\cdot\ln\operatorname{tg}x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{cotg}x\cdot\ln\operatorname{tg}x}=e^0=1\,.$$

Príklad 7 *Vypočítajme* $\lim\limits_{x\to0+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

Riešenie: Počítame s neurčitosťou typu 0^0, postupujeme ako v III.

$$\lim_{x\to0+}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}},$$

limita v exponente je neurčitosti typu $\dfrac{-\infty}{-\infty}$ a vypočítame ju zvlášť.

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}}=\lim_{x\to0+}\frac{e^x-1}{xe^x},$$

po ďalšom dosadení do poslednej limity nájdeme neurčitosť $\dfrac{0}{0}$ a znova použijeme L´Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^x-1}{xe^x}=\lim_{x\to0+}\frac{e^x}{e^x+xe^x}=\frac{1}{1+0}=1\,,$$

vrátime sa k pôvodnej limite

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}} = e^1 = e\,.$$

V úlohách 1 – 32 pomocou L´Hospitalovho pravidla vypočítajte limity funkcií:

		Výsledky:
1.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$	2
2.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$	$\dfrac{1}{6}$
3.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$	1
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 2^x}{2^x-1}$	$\dfrac{1}{\ln 2}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^x}{x}$	$\ln 2$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x^2}$	$-\dfrac{3}{2}$
7.	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
8.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$	1
9.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-2x-1}{\sin 3x}$	$\dfrac{2}{3}$
10.	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+}\dfrac{\operatorname{cotg} 5x}{2\operatorname{cotg} 3x}$	$\dfrac{5}{6}$
11.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^2}$	∞
12.	$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$	0
13.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0
14.	$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$	$\dfrac{4}{9}$
15.	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-}\dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{tg} x}$	0
16.	$\lim\limits_{x\to 1+}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$	$\dfrac{1}{2}$

17. $\lim\limits_{x\to 1+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$ -1

18. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ 0

19. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ $-\infty$

20. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ $\frac{1}{2}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$ 0

22. $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x^2}}$ ∞

23. $\lim\limits_{x\to 2-}\frac{x^2-4}{x^2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$ $-\frac{4}{\pi}$

24. $\lim\limits_{x\to 0+}\arcsin x\cdot\operatorname{cotg} x$ 1

25. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$ 1

26. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ e^{-2}

27. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ 1

28. $\lim\limits_{x\to 1-} x^{\frac{1}{1-x}}$ e^{-1}

29. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ 1

30. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$ 1

31. $\lim\limits_{x\to 0+}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$ e^2

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$ 1

3.4 Taylorov polynóm

Polynóm

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{(k)},$$

sa nazýva ***Taylorov polynóm funkcie*** f v bode x_0.

Použitím Taylorovej vety dostávame:

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x \approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!}.$$

Príklad 1 *Napíšte Taylorov polynóm 3. stupňa funkcie* $f(x)=\sqrt{x}$ *v bode* $x_0=1$.

Riešenie: Vypočítame prvú až tretiu deriváciu funkcie:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}},\quad f'''(x)=\frac{3}{8\sqrt{x^5}}.$$

Teda $f(1)=1$, $f'(1)=\frac{1}{2}$, $f''(1)=-\frac{1}{4}$, $f'''(1)=\frac{3}{8}$.

Po dosadení dostávame:

$$T_3(\sqrt{x}, 1, x)=1+\frac{x-1}{2}-\frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{3}{8}\frac{(x-1)^3}{3!}.$$

V úlohách 1 – 5 napíšte Taylorov polynóm n – tého stupňa danej funkcie f v bode x_0:

Výsledky:

1.	$f(x)=\arcsin x,\ n=2,\ x_0=0$	x
2.	$f(x)=\sqrt[3]{x^2},\ n=3,\ x_0=1$	$1+\frac{2}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2+\frac{4}{81}(x-1)^3$
3.	$f(x)=\frac{1}{x},\ n=4,\ x_0=2$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\frac{1}{32}(x-2)^4$
4.	$f(x)=\ln x,\ n=4,\ x_0=4$	$\ln 4+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{32}(x-4)^2+\frac{1}{192}(x-4)^3-\frac{1}{1024}(x-4)^4$
5.	$f(x)=\ln\cos x,\ n=3,\ x_0=0$	$-\frac{1}{2}x^2$

4 PRIEBEH FUNKCIE

4.1 Vyšetrovanie priebehu funkcie

Pri vyšetrovaní priebehu funkcie postupujeme takto:

- **A1** nájdeme definičný obor funkcie,
- **A2** vypočítame limity v koncových bodoch definičného oboru,
- **A3** vypočítame jednostranné limity v bodoch nespojitosti a napíšeme rovnice pre asymptoty bez smernice (ABS), [stačí, aby aspoň jedna z jednostranných limít v bode x_0 bola nevlastné číslo $+\infty$ alebo $-\infty$ a priamka $x = x_0$ bude ABS],
- **A4** nájdeme asymptoty so smernicou (ASS), [ASS je priamka $y = kx + q$, ktorej koeficienty počítame takto: $\begin{array}{l} k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ q_1 = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - k_1 x] \end{array}$ alebo $\begin{array}{l} k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ q_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - k_2 x] \end{array}$, pričom koeficienty k a q musia byť vlastné čísla],
- **A5** vyšetrime párnosť, nepárnosť funkcie,
- **A6** nájdeme priesečníky so súradným systémom, [priesečník s osou o_y tak, že položíme $x = 0$ a dopočítame y, priesečníky s o_x tak, že položíme $y = 0$ a dopočítame x],
- **A7** vypočítame prvú deriváciu funkcie a na základe toho vyšetríme monotónnosť a lokálne extrémy funkcie,
  - o na intervaloch, kde je prvá derivácia kladná, teda $f'(x) > 0$, je funkcia $f(x)$ rastúca ↗
  - o na intervaloch, kde je prvá derivácia záporná, teda $f'(x) < 0$, je funkcia $f(x)$ klesajúca ↘
  - o monotónnosť funkcie sa môže meniť v bodoch, v ktorých $f'(x) = 0$ alebo v bodoch, v ktorých $f'(x)$ neexistuje,
  - o body, v ktorých $f'(x) = 0$, sa nazývajú stacionárne body (SB),
  - o ak na intervale vľavo od SB funkcia klesá a vpravo rastie, je v tomto SB extrém – lokálne minimum, ↘ SB ↗
  - o ak na intervale vľavo od SB funkcia rastie a vpravo klesá, je v tomto SB extrém – lokálne maximum, ↗ SB ↘
- **A8** vypočítame druhú deriváciu funkcie a na základe toho vyšetríme konvexnosť, konkávnosť a inflexné body (IB) funkcie,
  - o na intervaloch, kde $f''(x) > 0$, je funkcia $f(x)$ konvexná $\cup$,
  - o na intervaloch, kde $f''(x) < 0$, je funkcia $f(x)$ konkávna $\cap$,
  - o konvexnosť a konkávnosť funkcie sa môže meniť v bodoch, v ktorých $f''(x) = 0$ alebo v bodoch, v ktorých $f''(x)$ neexistuje,
  - o body, v ktorých $f''(x) = 0$ a mení sa v nich konvexnosť a konkávnosť sa nazývajú inflexné body (IB),
  - o ak na intervale vľavo od bodu, v ktorom $f''(x) = 0$ je funkcia konvexná a vpravo konkávna, bod nazývame inflexný bod $\cup$ IB $\cap$
  - o ak na intervale vľavo od bodu, v ktorom $f''(x) = 0$ je funkcia konkávna a vpravo konvexná, bod nazývame inflexný bod $\cap$ IB $\cup$

- **A9** stacionárne body, inflexné body a body, v ktorých neexistuje prvá a druhá derivácia funkcie rozdelia celý definičný obor na intervaly, na ktorých budeme zisťovať znamienko prvej a druhej derivácie funkcie, všetky informácie zaznačíme do tabuľky,
- **A10** načrtneme graf funkcie $f(x)$.

V niektorých funkciách môžeme niečo z bodov **A3** až **A8** vynechať, lebo tieto informácie získame z iných bodov.

Príklad 1 *Vyšetrime priebeh funkcie f:* $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ *a načrtnime jej graf.*

Riešenie:

A1 Funkcia je definovaná pre všetky čísla x, pre ktoré je menovateľ $x-2\neq 0$, teda $x\neq 2$. Definičný obor funkcie $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

A2 Limity na začiatku a konci definičného oboru sú

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-2}=+\infty$$

A3 Jednostranné limity v bode nespojitosti $x=2$ sú

$$\lim_{x\to2^-}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{x^2}{x-2}=+\infty$$

preto, že jednostranné limity sú nevlastné čísla, priamka $x=2$ je ABS.

A4
$$k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1$$

$$q_1=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{x-2}\right]=2$$

, ASS pre $x\to\infty$ je priamka $y=x+2$,

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1$$

$$q_2=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x-2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x}{x-2}\right]=2$$

, ASS pre $x\to-\infty$ je takisto priamka $y=x+2$.

A5 $\underline{\underline{f(-x)}}=\dfrac{(-x)^2}{-x-2}=-\dfrac{x^2}{x+2}\neq\underline{\underline{\pm f(x)}}$, z toho vyplýva, že funkcia nie je ani párna ani nepárna.

A6 Vo funkcii $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ položíme $x=0$ a vypočítame $y=\dfrac{0}{0-2}=0$.

Vo funkcii $y=\frac{x^2}{x-2}$ položíme $y=0$ a vypočítame

$$0=\frac{x^2}{x-2}$$
$$0=x^2$$
$$0=x$$

priesečník s osou o_x a s osou o_y je bod $[0,0]$.

A7 Prvá derivácia funkcie je

$$y'=\left(\frac{x^2}{x-2}\right)'=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Položíme $y'=0$ a vypočítame SB.

$$\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}=0$$
$$x(x-4)=0$$
$$x=0 \quad \vee \quad x=4$$

Prvá derivácia y' neexistuje v bode nespojitosti prvej derivácie, čiže v bode $x=2$, ktorý je zároveň aj bodom nespojitosti funkcie $f(x)$.

A8 Druhá derivácia funkcie je

$$y''=\left(\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x)2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{8}{(x-2)^3}$$

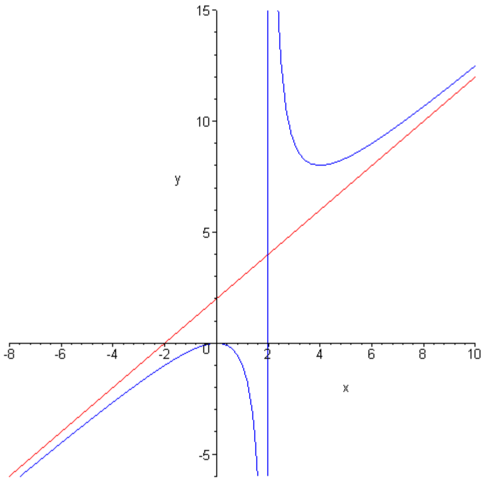
Druhá derivácia $y''\neq 0$, preto funkcia $f(x)$ nemá inflexné body.

Druhá derivácia y'' neexistuje v bode nespojitosti druhej derivácie, čiže v bode $x=2$, čo je aj bod nespojitosti funkcie $f(x)$.

A9 Body $x=0$ a $x=4$ rozdelia celý definičný obor funkcie na ďalšie intervaly, kde budeme zisťovať znamienko prvej a druhej derivácie a na základe toho určíme monotónnosť, konvexnosť, konkávnosť funkcie, lokálne extrémy a inflexné body.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,\infty)$
y'	+		-	*	-		+
y	↗	MAX	↘	*	↘	MIN	↗
y''	-		-	*	+		+
y	$\cap$	0	$\cap$	ABS	$\cup$	8	$\cup$

A10 Do súradného systému nakreslíme ASS, ABS, priesečníky so súradným systémom a použijeme všetky informácie z tabuľky k načrtnutiu grafu funkcie.



Príklad 2 *Vyšetrime priebeh funkcie* $y = \dfrac{\ln x}{x}$ *a načrtnime jej graf.*

Riešenie:

A1 Funkcia je definovaná pre všetky čísla x, pre ktoré je menovateľ $x \neq 0$ a súčasne $x > 0$. Definičný obor funkcie $D(f) = (0, \infty)$.

A2 Limity na začiatku a konci definičného oboru sú

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

A3 Počítame jednostrannú limitu v bode nespojitosti $x = 0$. V tomto prípade má zmysel počítať len limitu sprava ale tú sme už vypočítali v **A2.** Pretože jednostranná limita je nevlastné číslo, priamka $x = 0$ je ABS.

A4

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$
,
$$q = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\ln x}{x} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ASS pre $x \to \infty$ je priamka $y = 0$,
ASS pre $x \to -\infty$ nemá zmysel počítať, lebo funkcia pre záporné čísla nie je definovaná.

A5 Funkcia nie je ani párna ani nepárna.
A6 Priesečník s o_y neexistuje.

Vo funkcii $y=\frac{\ln x}{x}$ položíme $y=0$ a vypočítame

$$0=\frac{\ln x}{x}$$
$$x=1$$

priesečník s osou o_x je bod $[1,0]$.

A7 Prvá derivácia funkcie je $y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Položíme $y'=0$ a vypočítame SB.

$$\frac{1-\ln x}{x^2}=0$$
$$1-\ln x=0$$
$$x=e$$

y' neexistuje v bode nespojitosti prvej derivácie, čiže v bode $x=0$, ktorý je zároveň aj bodom nespojitosti funkcie $f(x)$.

A8 Druhá derivácia funkcie je $y''=\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\ln x)2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$.

Položíme $y''=0$

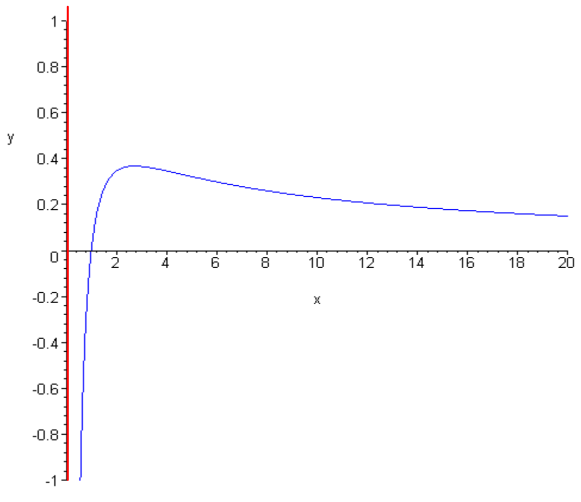
$$\frac{2\ln x-3}{x^3}=0$$
$$2\ln x-3=0$$
$$x=\sqrt{e^3}$$

y'' neexistuje v bode nespojitosti druhej derivácie, čiže v bode $x=0$, ktorý je zároveň aj bodom nespojitosti funkcie $f(x)$.

A9 Body $x=e$ a $x=\sqrt{e^3}$ rozdelia celý definičný obor funkcie na ďalšie intervaly, v ktorých budeme zisťovať znamienko prvej a druhej derivácie a na základe toho určíme monotónnosť, konvexnosť, konkávnosť funkcie, lokálne extrémy a inflexné body.

	$(0,e)$	e	$(e,\sqrt{e^3})$	$\sqrt{e^3}$	$(\sqrt{e^3},\infty)$
y'	+		-		-
y	↗	MAX	↘		↘
y''	-		-		+
y	$\cap$	$\frac{1}{e}$	$\cap$	IB $\frac{3}{2\sqrt{e^3}}$	$\cup$

A10 Do súradného systému nakreslíme ASS, ABS, priesečníky so súradným systémom a použijeme všetky informácie z tabuľky k načrtnutiu grafu funkcie



Príklad 3 *Vyšetrime priebeh funkcie* $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ *a načrtnime jej graf.*

Riešenie:

A1 Funkcia je definovaná pre všetky čísla x, pre ktoré je menovateľ $(x+1)^2 \neq 0$, teda $x \neq -1$.
Definičný obor funkcie $D(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$.

A2 Limity na začiatku a konci definičného oboru sú

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \infty$$

A3 Jednostranné limity v bode nespojitosti $x = -1$ sú

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$

preto, že jednostranné limity sú nevlastné čísla, priamka $x = -1$ je ABS.

A4 $k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{2x(x+1)^2} = \dfrac{1}{2}$, ASS pre $x \to \infty$ je priamka

$$q_1 = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2}\right] = -1$$

$y = \dfrac{1}{2}x - 1$,

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x(x+1)^2}=\frac{1}{2}$$, ASS pre $x\to-\infty$ je $y=\frac{1}{2}x-1$.

$$q_2=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}\right]=-1$$

A5 $\underline{\underline{f(-x)}}=\frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2}=-\frac{x^3}{2(1-x)^2}\neq\underline{\underline{\pm f(x)}}$, z toho vyplýva, že funkcia nie je ani párna ani nepárna.

A6 Vo funkcii $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ položíme $x=0$ a vypočítame $y=\frac{0}{2}=0$.

Vo funkcii $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ položíme $y=0$ a vypočítame $0=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$

$$0=x^3$$
$$0=x$$

Priesečník s osou o_x a s osou o_y je bod $[0,0]$.

A7 Prvá derivácia funkcie je

$$y'=\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}\right)'=\frac{3x^2\cdot2(x+1)^2-x^3\cdot2\cdot2(x+1)}{4(x+1)^4}=\frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3}=\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Položíme $y'=0$ a vypočítame SB.

$$\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}=0$$
$$x^2(x+3)=0$$
$$x=0 \quad\vee\quad x=-3$$

y' neexistuje v bode nespojitosti prvej derivácie, čiže v bode $x=-1$, ktorý je zároveň aj bodom nespojitosti funkcie $f(x)$.

A8 Druhá derivácia funkcie je

$$y''=\left(\frac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3}\right)'=\frac{(3x^2+6x)2(x+1)^3-(x^3+3x^2)\cdot2\cdot3(x+1)^2}{4(x+1)^6}=\frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Položíme $y''=0$

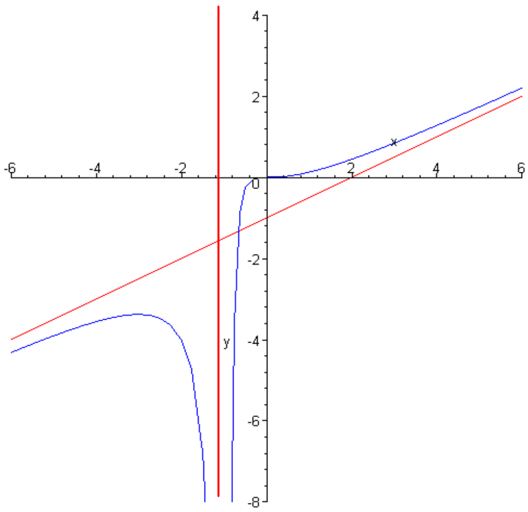
$$\frac{3x}{(x+1)^4}=0$$
$$3x=0$$
$$x=0$$

y'' neexistuje v bode nespojitosti druhej derivácie, čiže v bode $x=-1$, čo je aj bod nespojitosti funkcie $f(x)$.

A9 Body $x=-3$ a $x=0$ rozdelia celý definičný obor funkcie na ďalšie intervaly, kde budeme zisťovať znamienko prvej a druhej derivácie a na základe toho určíme monotónnosť, konvexnosť, konkávnosť funkcie, lokálne extrémy a inflexné body.

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
y'	+		-	*	+		+
y	↗	MAX	↘	*	↗		↗
y''	-		-	*	-		+
y	$\cap$	$-\frac{27}{8}$	$\cap$	ABS	$\cap$	IB 0	$\cup$

A10 Do súradného systému nakreslíme ASS, ABS, priesečníky so súradným systémom a použijeme všetky informácie z tabuľky k načrtnutiu grafu funkcie.



Príklad 4 *Vyšetrime priebeh funkcie* $y=x-2\operatorname{arctg}x$ *a načrtnime jej graf.*

Riešenie:

A1 Funkcia je definovaná pre všetky reálne čísla x.
Definičný obor funkcie $D(f)=R$.

A2 Limity na začiatku a konci definičného oboru sú

$$\lim_{x\to-\infty}(x-2\operatorname{arctg}x)=-\infty-2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(x-2\operatorname{arctg}x)=\infty-2\cdot\frac{\pi}{2}=\infty$$

A3 Pretože je funkcia na celom svojom definičnom obore spojitá, ABS neexistujú.

A4 $k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2\operatorname{arctg}x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{2}{1+x^2}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{1+x^2}=1$, ASS pre $x\to\infty$ je priamka $q_1=\lim\limits_{x\to\infty}[x-2\operatorname{arctg}x-1\cdot x]=\lim\limits_{x\to\infty}[-2\operatorname{arctg}x]=-\pi$

$y=x-\pi$,

$k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2\operatorname{arctg}x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\frac{2}{1+x^2}}{1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{1+x^2}=1$, ASS pre $x\to-\infty$ je $q_2=\lim\limits_{x\to-\infty}[x-2\operatorname{arctg}x-1\cdot x]=\lim\limits_{x\to-\infty}[-2\operatorname{arctg}x]=\pi$

$y=x+\pi$.

A5 $\underline{\underline{f(-x)}}=-x-2\operatorname{arctg}(-x)=-x+2\operatorname{arctg}x=-(x-2\operatorname{arctg}x)=\underline{\underline{-f(x)}}$, z toho vyplýva, že funkcia je nepárna.

A6 Vo funkcii $y=x-2\operatorname{arctg}x$ položíme $x=0$ a vypočítame $y=0-2\operatorname{arctg}0=0$, priesečník s osou o_y je bod $[0,0]$.

Ďalšie priesečníky s o_x určiť nevieme, lebo $0=x-2\operatorname{arctg}x$ je transcendentná rovnica, ktorú nevieme riešiť.

A7 Prvá derivácia funkcie je $y'=(x-2\operatorname{arctg}x)'=1-\dfrac{2}{1+x^2}=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}$.

Položíme $y'=0$ a vypočítame SB.

$$\frac{x^2-1}{1+x^2}=0$$

$$x^2-1=0$$

$$x=1\quad\vee\quad x=-1$$

y' je spojitá funkcia, nemá body, v ktorých by prvá derivácia neexistovala.

A8 Druhá derivácia funkcie je $y'' = \left(\dfrac{x^2-1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{2x(1+x^2)-(x^2-1)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$

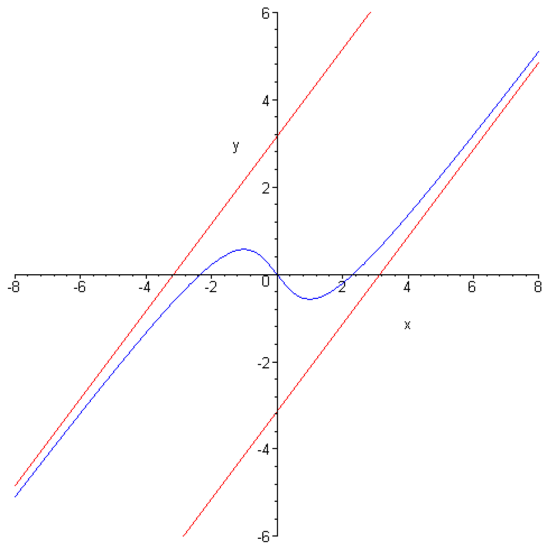
Položíme
$$y'' = 0$$
$$\frac{4x}{(1+x^2)^2} = 0$$
$$4x = 0$$
$$x = 0$$

y'' je spojitá funkcia, nemá body, v ktorých by druhá derivácia neexistovala.

A9 Body $x=-1$, $x=0$, $x=1$ rozdelia celý definičný obor funkcie na ďalšie intervaly, kde budeme zisťovať znamienko prvej a druhej derivácie a na základe toho určíme monotónnosť, konvexnosť, konkávnosť funkcie, lokálne extrémy a inflexné body.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
y'	+		-		-		+
y	↗	MAX	↘		↘	MIN	↗
y''	-		-		+		+
y	$\cap$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\cap$	IB 0	$\cup$	$1-\frac{\pi}{2}$	$\cup$

A10 Do súradného systému nakreslíme ASS, ABS, priesečníky so súradným systémom a použijeme všetky informácie z tabuľky k načrtnutiu grafu funkcie.



V úlohách 1 – 30 vyšetrite priebeh funkcie a načrtnite graf :

1. $y = 2x^3 - 3x^2$

2. $y = x^3 + 3x^2 - 2$

3. $y = (2 - x^2)^2$

4. $y = 16x(x-1)^3$

5. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$

6. $y = \dfrac{3-x^2}{x+2}$

7. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

8. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

9. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

10. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

11. $y = x - \dfrac{1}{x}$

12. $y = \dfrac{x^2}{4-x^2}$

13. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

14. $y = \dfrac{2x}{x^2-1} + x$

15. $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

16. $y = \dfrac{x}{x^2+4}$

17. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

18. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

19. $y = \dfrac{x}{\ln x}$

20. $y = x \cdot \ln x$

21. $y = \ln(1 + x^2)$

22. $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$

23. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

24. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x}$

25. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x}$

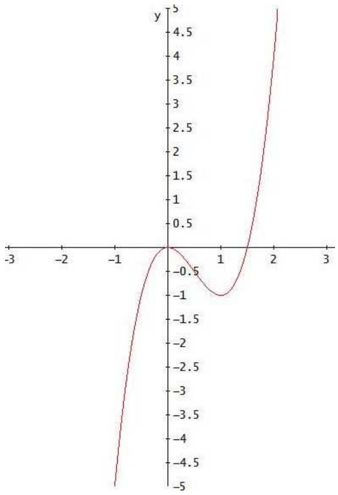
26. $y = e^{\frac{1}{x}}$

27. $y = xe^x$

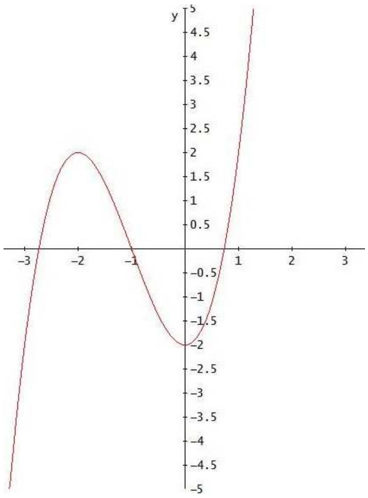
28. $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$

Výsledky:

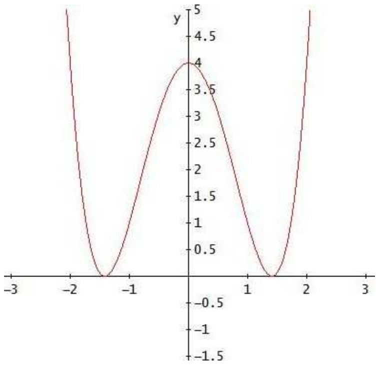
1.



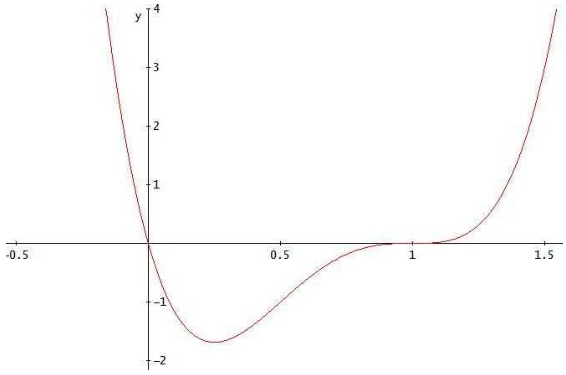
2.



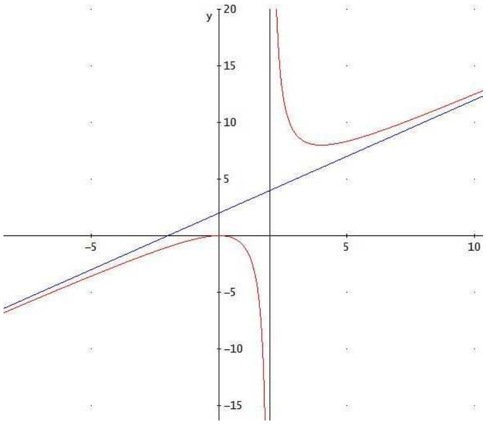
3.



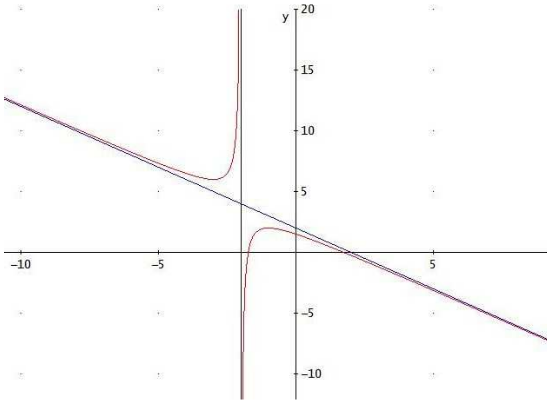
4.



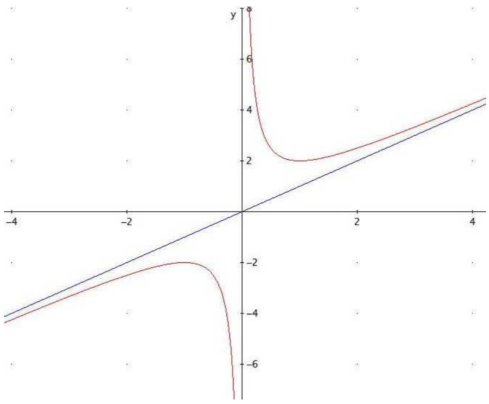
5.



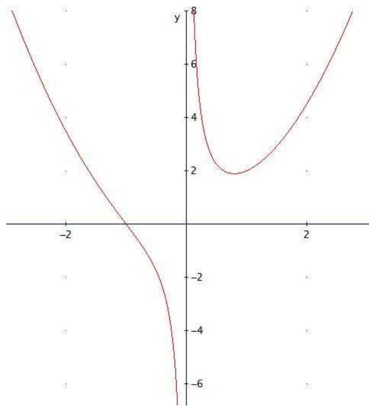
6.



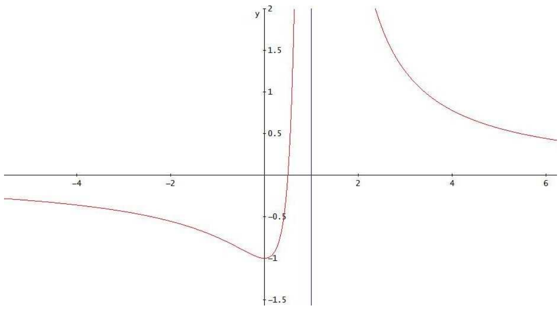
7.



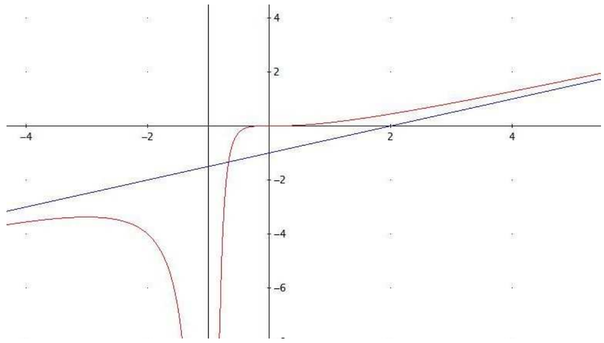
8.



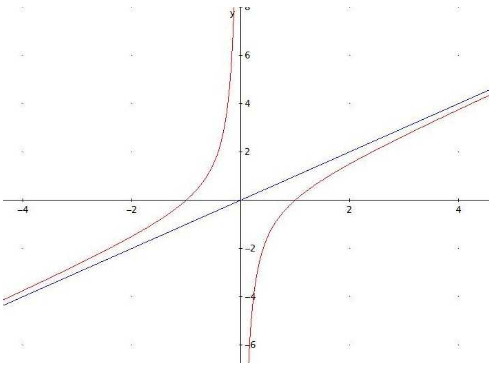
9.



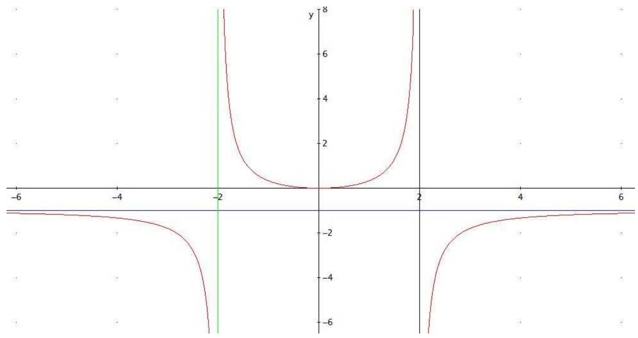
10.



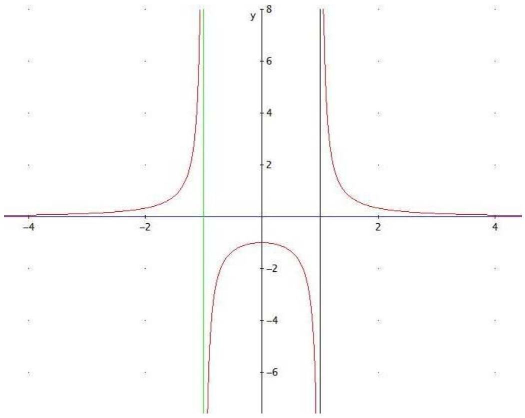
11.



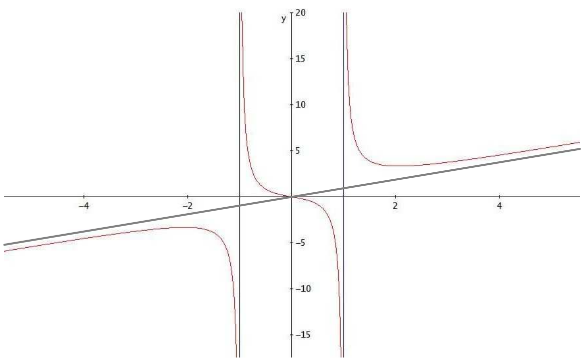
12.



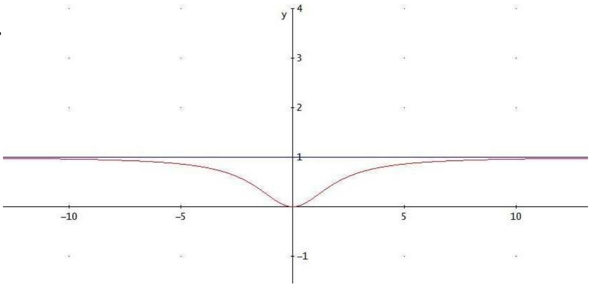
13.



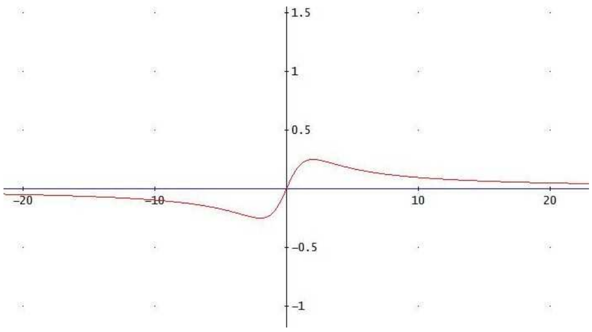
14.



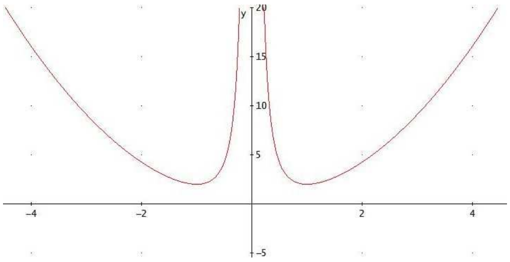
15.



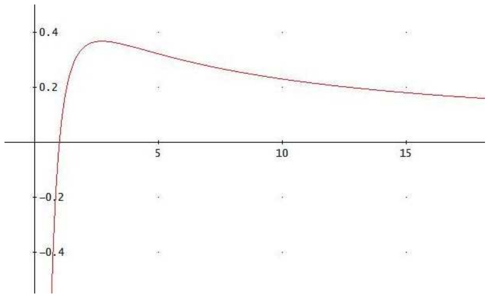
16.



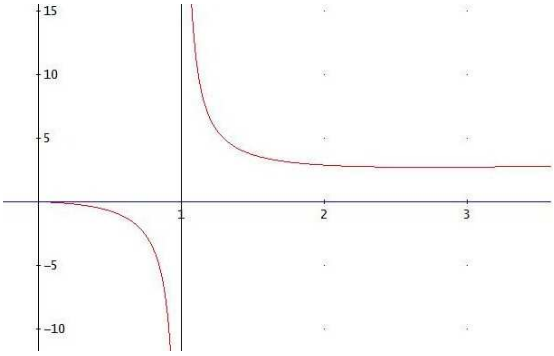
17.



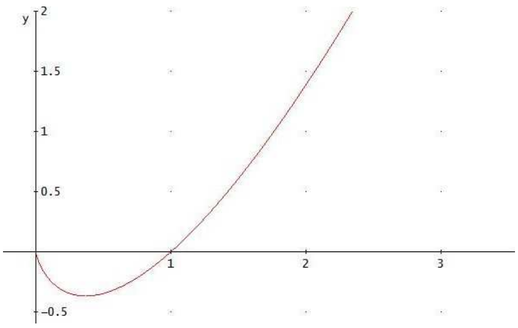
18.



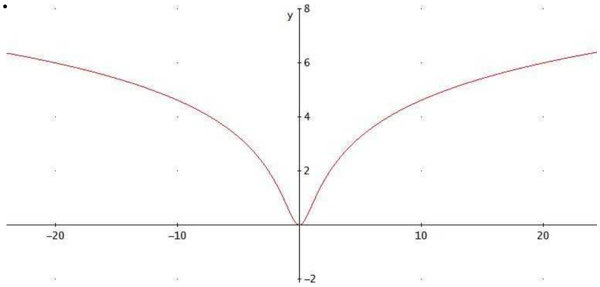
19.



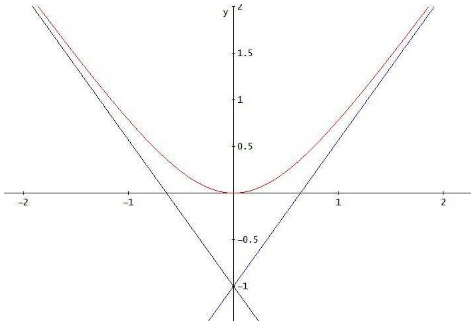
20.



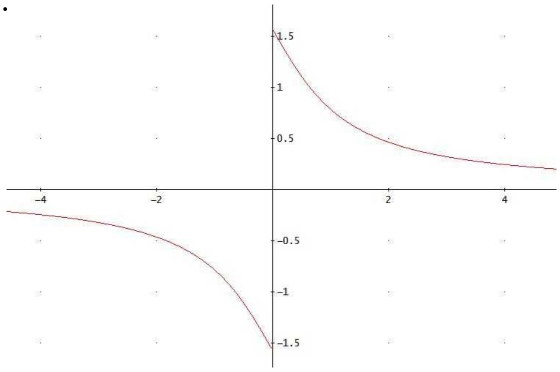
21.



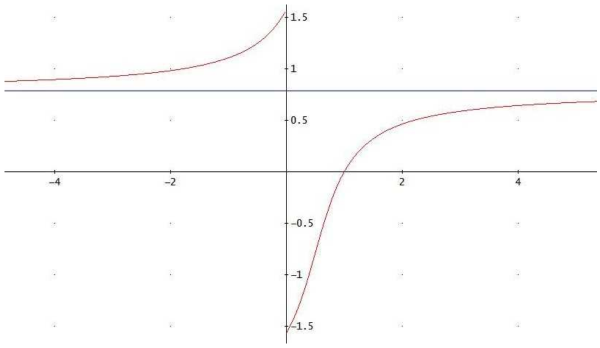
22.



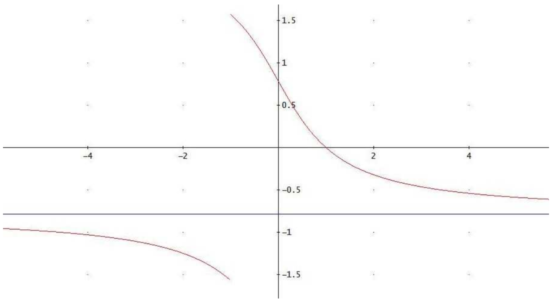
23.



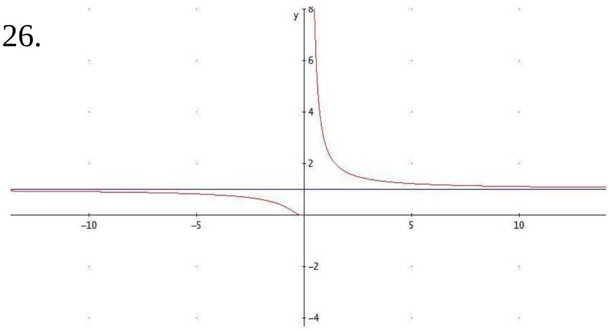
24.



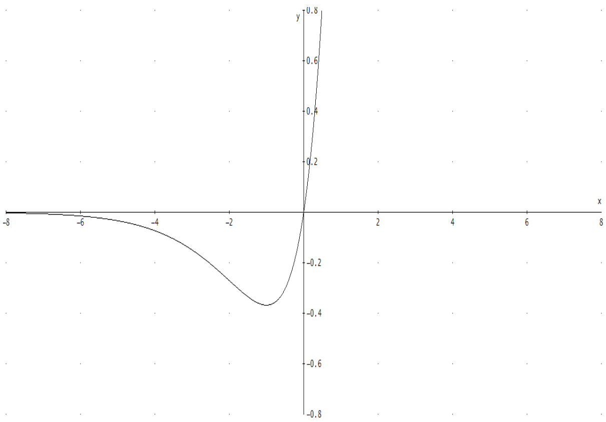
25.



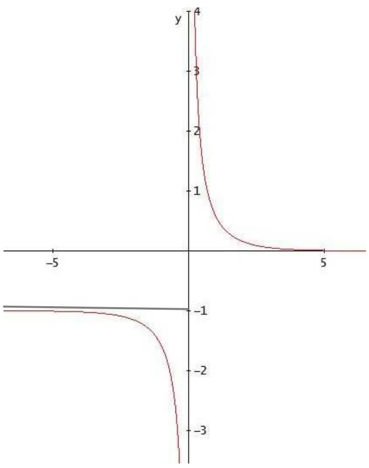
26.



27.



28.



5 MNOŽINY

5.1 Komplexné čísla

Súčet a rozdiel komplexných čísel robíme po zložkách. Osobitne sčítame (odčítame) reálne a osobitne imaginárne zložky.

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 \cdot i + a_2 + b_2 \cdot i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i,$$
$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 \cdot i - (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i.$$

Ak komplexné čísla násobíme, pracujeme s nimi ako pri násobení dvojčlenov. Teda násobíme každú zložku s každou.

Pritom využívame, že $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, \ldots$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i.$$

Pri delení komplexných čísel, násobíme celý podiel jednotkou vo vhodnom tvare tak, aby sme v menovateli odstránili komplexné číslo. Využívame pritom násobenie komplexného čísla v menovateli k nemu komplexne združeným číslom, čím v menovateli získame reálne číslo.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 \cdot i)(a_2 - b_2 \cdot i)}{(a_2 + b_2 \cdot i)(a_2 - b_2 \cdot i)} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2 \cdot i^2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) \cdot i}{a_2^2 - b_2^2 \cdot i^2} =$$
$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) \cdot i}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Príklad 1 *Nech* $z_1 = 3 - 2 \cdot i, \quad z_2 = 4 + i, \quad z_3 = 2 + 3 \cdot i, \quad z_4 = -4 + 2 \cdot i.$

Vypočítajme $z_1 + z_2, \quad z_3 - z_2, \quad z_1 \cdot {z_2}^2, \quad \dfrac{z_3}{z_4}.$

Riešenie:

$$z_1 + z_2 = (3 + 4) + (-2 + 1) \cdot i = 7 - i,$$
$$z_3 - z_2 = (2 - 4) + (3 - 1) \cdot i = -2 + 2 \cdot i,$$
$$z_1 \cdot {z_2}^2 = (3 - 2 \cdot i)(4 + i)^2 = (3 - 2 \cdot i)(16 + 8 \cdot i + i^2) = (3 - 2 \cdot i)(16 + 8 \cdot i - 1) =$$
$$= (3 - 2 \cdot i)(15 + 8 \cdot i) = 3 \cdot 15 + 3 \cdot 8 \cdot i - 2 \cdot 15 \cdot i - 2 \cdot 8 \cdot i^2 = 61 - 6 \cdot i$$
$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{2 + 3 \cdot i}{-4 + 2 \cdot i} \cdot \frac{-4 - 2 \cdot i}{-4 - 2 \cdot i} = \frac{-8 - 4 \cdot i - 12 \cdot i + 6}{16 + 4} = \frac{-2 - 16 \cdot i}{20} = -\frac{1}{10} - \frac{4}{5} \cdot i.$$

Príklad 2 *Prepíšme komplexné číslo* $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i$ *do goniometrického a exponenciálneho tvaru.*

Riešenie: Pri prepise komplexného čísla $z = a + b \cdot i$ z algebrického do goniometrického, resp. exponenciálneho tvaru je potrebné vypočítať modul komplexného čísla $|z|$ a jeho amplitúdu φ. Platí:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = -\frac{1}{2} \wedge \sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Obe tieto podmienky platia súčasne pre uhol (amplitúdu) $\varphi = \frac{2}{3}\pi$.

Pretože $z = a + b \cdot i = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = |z|e^{i \cdot \varphi}$, môžeme písať

$$z = -1 + \sqrt{3} \cdot i = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i \cdot \sin\frac{2}{3}\pi) = 2e^{i \cdot \frac{2}{3}\pi}.$$

Príklad 3 *Vypočítajme* $(-1 + \sqrt{3} \cdot i)^{13}$.

Riešenie: Pri umocňovaní komplexných čísel využijeme vzťah
$z^n = |z|^n(\cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi)$.
Preto je potrebné komplexné číslo, ktoré ideme umocňovať, prepísať do goniometrického tvaru. Využijeme pritom výsledok z predchádzajúcej úlohy.

$$z = -1 + \sqrt{3} \cdot i = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i \cdot \sin\frac{2}{3}\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^n = |z|^n(\cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi) = 2^{13}(\cos 13 \cdot \frac{2}{3}\pi + i \cdot \sin 13 \cdot \frac{2}{3}\pi) = 2^{13}(\cos\frac{26}{3}\pi + i \cdot \sin\frac{26}{3}\pi) =$$

$$= 2^{13}(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2^{12}(-1 + i \cdot \sqrt{3}).$$

Príklad 4 *Vypočítajme* $\sqrt{-1 + \sqrt{3} \cdot i}$.

Riešenie: Pri odmocňovaní komplexných čísel využijeme vzťah

$$a_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{kde } k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Znova je potrebné prepísať odmocňované komplexné číslo do goniometrického tvaru, pričom použijeme výsledok z príkladu 2, čiže $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i \cdot \sin\frac{2}{3}\pi)$.

Keďže počítame druhú odmocninu, dostaneme dva výsledky v tvare:

$$a_k = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{2}\right), \quad \text{kde } k = 0, 1.$$

$$a_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\frac{2}{3}\pi+2\cdot 0\cdot\pi}{2}\right)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3})=\sqrt{2}(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$$a_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\frac{2}{3}\pi+2\cdot 1\cdot\pi}{2}\right)=\sqrt{2}(\cos\frac{4}{3}\pi+i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi)=\sqrt{2}(-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

V úlohách 1 – 8 vypočítajte:

		Výsledky:
1.	$(3+2i)(2-i)$	$8+i$
2.	$(3+3i)(1-i)$	6
3.	$(2+3i)(4+i)$	$5+14i$
4.	$(1+i)(3+2i)(2-i)$	$7+9i$
5.	$(3-2i)^2\cdot i$	$12+5i$
6.	$\dfrac{2+i}{1+i}$	$\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$
7.	$\dfrac{(3-2i)^2}{1+2i}$	$-\dfrac{19}{5}-\dfrac{22}{5}i$
8.	$\dfrac{1+2i}{2-i}-\dfrac{2-i}{1+2i}$	$2i$

V úlohách 9 – 22 napíšte komplexné číslo v goniometrickom a exponenciálnom tvare:

9.	$z=1$	$z=\cos 0+i\cdot\sin 0=e^{0\cdot i}$
10.	$z=-1$	$z=\cos\pi+i\cdot\sin\pi=e^{\pi\cdot i}$
11.	$z=i$	$z=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}$
12.	$z=-i$	$z=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\cdot\sin\dfrac{3}{2}\pi=e^{\frac{3}{2}\pi\cdot i}$
13.	$z=1+i$	$z=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\cdot i}$

14. $z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$ $\qquad z = 4(\cos\frac{5\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{4}) = 4e^{\frac{5\pi}{4}\cdot i}$

15. $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$ $\qquad z = \sqrt{3}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{3}e^{\frac{3\pi}{4}\cdot i}$

16. $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ $\qquad z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}\cdot i}$

17. $z = -\sqrt{3} + i$ $\qquad z = 2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\cdot\sin\frac{5}{6}\pi) = 2e^{\frac{5}{6}\pi\cdot i}$

18. $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad z = \sqrt{3}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt{3}e^{\frac{11\pi}{6}\cdot i}$

19. $z = 1 + \sqrt{3}\,i$ $\qquad z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{\frac{\pi}{3}\cdot i}$

20. $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad z = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}) = 3e^{\frac{\pi}{3}\cdot i}$

21. $z = -2 - 2\sqrt{3}\,i$ $\qquad z = 4(\cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}) = 4e^{\frac{4\pi}{3}\cdot i}$

22. $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad z = \cos\frac{5\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{3} = e^{\frac{5\pi}{3}\cdot i}$

V úlohách 23 – 35 vypočítajte:

23. $(1+i)^5$ $\qquad -4-4i$

24. $(-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i)^3$ $\qquad 32\sqrt{2} - 32\sqrt{2}\,i$

25. $(-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i)^4$ $\qquad -9$

26. $(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^7$ $\qquad -4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}\,i$

27. $(-\sqrt{3} + i)^4$ $\qquad -8 - 8\sqrt{3}\,i$

28. $(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$ $\qquad -3\sqrt{3}\,i$

29. $(1 + \sqrt{3}\,i)^5$ $\qquad 16 - 16\sqrt{3}\,i$

30. $(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i)^8$ $\qquad -\frac{6561}{2} + \frac{6561}{2}\sqrt{3}\,i$

31. $(-2-2\sqrt{3}\,i)^{6}$ $\quad$ 4096

32. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^{4}$ $\quad$ $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

33. $(\sqrt{3}-i)^{6}$ $\quad$ -64

34. $(1+\sqrt{3}\,i)^{4}$ $\quad$ $-8-8\sqrt{3}\,i$

35. $(-1-\sqrt{3}\,i)^{5}$ $\quad$ $-16+16\sqrt{3}\,i$

V úlohách 36 – 48 vypočítajte odmocninu z komplexného čísla:

36. $\sqrt{-1}$ $\quad$ $z_0=i$, $z_1=-i$

37. $\sqrt{i}$ $\quad$ $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

38. $\sqrt{-i}$ $\quad$ $z_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

39. $\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}$ $\quad$ $z_0=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

40. $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ $\quad$ $z_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

41. $\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}$ $\quad$ $z_0=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_1=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

42. $\sqrt{-2-2\sqrt{3}\,i}$

$z_0 = -1+\sqrt{3}\,i$
$z_1 = 1-\sqrt{3}\,i$

43. $\sqrt{-8+8\sqrt{3}\,i}$

$z_0 = 2+2\sqrt{3}\,i$
$z_1 = -2-2\sqrt{3}\,i$

44. $\sqrt[3]{1}$

$z_0 = 1$
$z_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$z_2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

45. $\sqrt[3]{-1}$

$z_0 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$z_1 = -1$
$z_2 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

46. $\sqrt[3]{i}$

$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
$z_2 = -i$

47. $\sqrt[4]{-1}$

$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$
$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

48. $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}$

$z_0 = 1+\sqrt{3}\,i$
$z_1 = -\sqrt{3}+i$
$z_2 = -1-\sqrt{3}\,i$
$z_3 = \sqrt{3}-i$

6 MATICE A DETERMINANTY

6.1 Operácie s maticami

Súčet a rozdiel matíc existuje len pre rovnaké typy matíc (ak $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$, aj matica $\mathbf{B}$ musí byť typu $m \times n$).
Pre prvky matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Pre prvky matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ platí $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Pre maticu $\mathbf{C} = k \cdot \mathbf{A}$, kde $k \in \mathbf{R}$ platí $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Súčin matíc $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je možné vypočítať, ak počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ je rovnaký ako počet riadkov matice $\mathbf{B}$.
Násobenie dvoch matíc ukážeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 1 *Vypočítajme* $\mathbf{A}+\mathbf{B},\quad \mathbf{A}-\mathbf{B},\quad 2\cdot\mathbf{A},\quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B},\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$, *ak*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & -1+2 & 3-1 \\ 2+0 & 1+3 & 5+0 \\ -2+2 & 3+1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & -1-2 & 3-(-1) \\ 2-0 & 1-3 & 5-0 \\ -2-2 & 3-1 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$2\cdot\mathbf{A} = 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 & 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 10 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 1-1\cdot 0+3\cdot 2 & 0\cdot 2-1\cdot 3+3\cdot 1 & 0\cdot(-1)-1\cdot 0+3\cdot 2 \\ 2\cdot 1+1\cdot 0+5\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 3+5\cdot 1 & 2\cdot(-1)+1\cdot 0+5\cdot 2 \\ -2\cdot 1+3\cdot 0-1\cdot 2 & -2\cdot 2+3\cdot 3-1\cdot 1 & -2\cdot(-1)+3\cdot 0-1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 12 & 12 & 8 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 3-1\cdot(-4) \\ 0\cdot 2+3\cdot 3+0\cdot(-4) \\ 2\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Príklad 2 *Nájdime hodnosť matice* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 9 & -1 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 4\\ 9 & -1 & 5 & 8\\ 4 & 7 & 11 & 6\end{pmatrix}$.

Riešenie: Hodnosť matice je počet nenulových riadkov matice upravenej na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.

$$\begin{pmatrix}-1 & 9 & -1 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 4\\ 9 & -1 & 5 & 8\\ 4 & 7 & 11 & 6\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +4R_1\\ +9R_1\\ +4R_1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 9 & -1 & 0\\ 0 & 40 & -2 & 4\\ 0 & 80 & -4 & 8\\ 0 & 43 & 7 & 6\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -2R_2\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 9 & -1 & 0\\ 0 & 40 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 43 & 7 & 6\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\sim$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 9 & -1 & 0\\ 0 & 20 & -1 & 2\\ 0 & 43 & 7 & 6\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 43\\ \cdot(-20)\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 9 & -1 & 0\\ 0 & 860 & -43 & 86\\ 0 & -860 & -140 & -120\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +R_2\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 9 & -1 & 0\\ 0 & 860 & -43 & 86\\ 0 & 0 & -183 & -34\end{pmatrix}.$$

Počet nenulových riadkov matice je 3, teda hodnosť matice $\mathbf{A}$ je $h(\mathbf{A})=3$.

Sú dané matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. V úlohách 1 – 3 vypočítajte:

Výsledky:

1. $3\cdot\mathbf{A}-2\cdot\mathbf{B}$ — $\begin{pmatrix}0 & -9\\ 5 & 8\end{pmatrix}$
2. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ — $\begin{pmatrix}9 & -6\\ -1 & 8\end{pmatrix}$
3. $\mathbf{A}^2+\mathbf{B}$ — $\begin{pmatrix}4 & -18\\ 5 & 15\end{pmatrix}$

Sú dané matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 4\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 0\end{pmatrix}$. Vypočítajte:

4. $(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ — $\begin{pmatrix}-1 & 6 & -19\\ 1 & 7 & -20\\ 2 & -25 & 12\end{pmatrix}$

Sú dané matice $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 8\end{pmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}$,

$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{F}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. Vypočítajte:

		Výsledky:
5.	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$	$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 4 \\ 3 & 14 & 20 \end{pmatrix}$
6.	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}$	$\begin{pmatrix} 14 & 22 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$
7.	$\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}$	$\begin{pmatrix} 20 & 18 & 22 \\ 18 & 18 & 18 \\ 22 & 18 & 26 \end{pmatrix}$
8.	$\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}$	$\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 16 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$
9.	$\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}$	$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 22 \\ 19 & 12 & 47 \end{pmatrix}$
10.	$\mathbf{C}\cdot\mathbf{F}$	$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 22 & -8 \end{pmatrix}$
11.	$\mathbf{F}\cdot\mathbf{C}$	$\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
12.	$\mathbf{E}\cdot\mathbf{C}$	$\begin{pmatrix} 8 & 40 \\ 9 & 36 \\ 7 & 44 \end{pmatrix}$
13.	$\mathbf{E}\cdot\mathbf{F}$	$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -3 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$
14.	$3\cdot\mathbf{C}-2\mathbf{F}$	$\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$
15.	$-\mathbf{2A}+5\mathbf{D}$	$\begin{pmatrix} 11 & 14 & -7 \\ 2 & -1 & 20 \end{pmatrix}$
16.	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{D}$	$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 1 & 13 & 14 \end{pmatrix}$
17.	$\mathbf{C}+\mathbf{F}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}$	$\begin{pmatrix} 14 & 26 \\ 26 & 57 \end{pmatrix}$
18.	$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{C}-3\cdot\mathbf{C})^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -20 & -20 \end{pmatrix}$

V úlohách 19 – 29 vypočítajte hodnosť matice:

19. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=3$

20. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&-1&1\\1&7&8\end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=2$

21. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}27&26&25\\19&18&17\\12&11&10\end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=2$

22. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&2\\-2&1&0&-1\\-1&1&3&1\\-1&2&9&4\end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=2$

23. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0&2&0\\0&1&0&1\\2&1&0&2\\0&1&-2&2\end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=3$

24. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1&2&-2\\4&2&1&5\\1&3&-2&18\\2&1&1&1\end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=3$

25. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=3$

26. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&3&1&5\\4&-1&2&-3\\7&1&5&-1\\1&7&7&9\end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=3$

27. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-4&0\\-4&5&-1\\1&7&3\\5&-10&0\\3&0&2\end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A})=2$

28. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A}) = 4$

29. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -5 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -8 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 6 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ $h(\mathbf{A}) = 2$

6.2 Determinant

Príklad 1 *Vypočítajme determinant* $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Riešenie: Determinant rozmeru 2×2 sa vypočíta tak, že od súčinu prvkov na hlavnej diagonále sa odpočíta súčin prvkov na vedľajšej diagonále

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 7.$$

Príklad 2 *Vypočítajme determinant* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Riešenie: Determinant rozmeru 3×3 môžeme riešiť pomocou Sarusovho pravidla

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{array} = [2 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 0] - [3 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1)] = -8.$$

Príklad 3 *Vypočítajme determinant* $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Riešenie: Determinanty rozmerov 4×4 a väčších, sa počítajú pomocou rozvoja determinantu podľa riadka alebo stĺpca.

$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$, resp. $|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$,

kde $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ je algebrický doplnok a D_{ij} je subdeterminant prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ (vznikne zakrytím i-teho riadku a j-teho stĺpca matice $\mathbf{A}$).

Pred samotným výpočtom je výhodné determinant upraviť pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok, resp. stĺpec obsahujúci čo najviac núl. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k rozvoju determinantu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} -2R_2 \\ \\ \\ -2R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & \mathbf{0} & -2 \\ 2 & 4 & \mathbf{1} & 1 \\ 3 & 2 & \mathbf{0} & 2 \\ -3 & -5 & \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{1}\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\mathbf{0}\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{0}\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

V úlohách 1 – 28 vypočítajte determinant matice:

Výsledky:

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ — $|\mathbf{A}| = -23$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 30 \end{pmatrix}$ — $|\mathbf{A}| = 12$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ — $|\mathbf{A}| = 0$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ — $|\mathbf{A}| = 0$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ — $|\mathbf{A}| = -8$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ — $|\mathbf{A}| = -76$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ — $|\mathbf{A}| = -35$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ — $|\mathbf{A}| = -35$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ — $|\mathbf{A}| = -70$

10. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\\ 1 & -3 & 5\\ 2 & 1 & 9\end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}|=-175$

11. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}|=12$

12. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 12 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}|=24$

13. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 12 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}|=36$

14. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 12\end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}|=60$

15. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}|=-4$

16. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}|=-6$

17. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}|=1$

18. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & -4 & 3\\ 3 & -4 & -1 & 2\\ 4 & 3 & -2 & -1\end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}|=900$

19. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 6 & 5 & 4\\ 3 & 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad |\mathbf{A}|=6$

20. $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&2&3\\3&0&1&2\\1&0&2&4\\2&1&3&2\end{pmatrix}\qquad |\mathbf{A}|=-5$$

21. $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&4\\1&2&1&4\\0&3&2&2\\2&1&3&3\end{pmatrix}\qquad |\mathbf{A}|=18$$

22. $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&3&3&1\\2&4&5&2\\3&4&5&1\\2&2&3&4\end{pmatrix}\qquad |\mathbf{A}|=14$$

23. $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5&3&2&4\\10&2&-2&10\\-5&6&8&5\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\qquad |\mathbf{A}|=-570$$

24. $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{pmatrix}\qquad |\mathbf{A}|=12$$

25. $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&2\\2&3&-3&4\\6&2&1&0\\2&3&0&-5\end{pmatrix}\qquad |\mathbf{A}|=-48$$

26. $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&3&2&4\\2&5&1&0\\2&0&-3&1\\-2&6&8&9\end{pmatrix}\qquad |\mathbf{A}|=223$$

27. $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&3&4\\2&1&1&1\\2&4&9&16\\2&8&27&64\end{pmatrix}\qquad |\mathbf{A}|=-24$$

28. $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&2&3&4\\4&0&4&4\\-4&-3&-1&-2\end{pmatrix}\qquad |\mathbf{A}|=-24$$

6.3 Inverzná matica

Inverznú maticu k matici $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ budeme hľadať využitím adjungovanej matice $adj\ \mathbf{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ pomocou vzťahu $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Príklad 1 *K matici* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *nájdime inverznú maticu.*

Riešenie: Vypočítame determinant matice $\mathbf{A}$ a všetky algebrické doplnky tvoriace adjungovanú maticu.

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-6 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-4 \qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=13$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=4 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=4 \qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-7$$

Inverzná matica k matici $\mathbf{A}$ je $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & -4 & 13 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Príklad 2 *Riešme maticovú rovnicu* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *s neznámou maticou* $\mathbf{X}$.

Riešenie: Maticovú rovnicu prepíšeme do schémy $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$, ktorú vynásobíme zľava maticou $\mathbf{A}^{-1}$ inverznou k matici $\mathbf{A}$, pričom využijeme, že $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$ a $\mathbf{E}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{X}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{X}$.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$$
$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$
$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

Z Príkladu 1 je $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-6 & -4 & 13\\ 4 & 0 & -2\\ 2 & 4 & -7\end{pmatrix}$, preto $\mathbf{X}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-6 & -4 & 13\\ 4 & 0 & -2\\ 2 & 4 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=$

$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}11 & 18 & 29\\ 2 & -4 & -2\\ -9 & -6 & -15\end{pmatrix}$.

V úlohách 1 – 19 nájdite inverznú maticu k matici $\mathbf{A}$:

Výsledky:

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ — $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ — $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ — $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

4. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ — $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4 & 9\\ 3 & -5\end{pmatrix}$

5. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{pmatrix}$ — neexistuje

6. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 5\end{pmatrix}$ — $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -2\\ -6 & 3\end{pmatrix}$

7. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ — $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

8. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$ — $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

9. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ — $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

10. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\6&5&4\\13&10&8\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\-4&5&-2\\5&-3&1\end{pmatrix}$

11. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{pmatrix}$

12. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-1&3&2\\2&-1&4\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{63}\begin{pmatrix}14&-7&7\\8&14&-5\\-5&7&11\end{pmatrix}$

13. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\3&-5&-2\\7&-3&1\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}-11&-1&9\\-17&-6&5\\26&-11&1\end{pmatrix}$

14. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\6&5&4\\13&10&8\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\-4&5&-2\\5&-3&1\end{pmatrix}$

15. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}9&17&8\\18&34&17\\10&19&8\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}51&-16&-17\\-26&8&9\\-2&1&0\end{pmatrix}$

16. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&-2\\-3&2&-1\end{pmatrix}$

17. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&4\\-5&-2&-1\\3&1&1\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&3&7\\2&-10&-18\\1&1&1\end{pmatrix}$

18. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$

19. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2&1&2\\7&5&2&5\\0&0&9&4\\0&0&11&5\end{pmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-5&4\\-7&3&16&-13\\0&0&5&-4\\0&0&-11&9\end{pmatrix}$

V úlohách 20 – 26 riešte maticovú rovnicu s neznámou maticou $\mathbf{X}$:

Výsledky:

20. $\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$ $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

21. $\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\-4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\6&4\end{pmatrix}$ $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix}-3&-2\\3&3\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}5&9\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ $\mathbf{X}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1&-4\\-1&4\end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}6&3&18\\-1&1&-4\\1&1&3\end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix}1&1&1\\6&5&4\\13&10&8\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix}$ $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-1&2&-4\\3&-8&2\\-2&7&4\end{pmatrix}$

25. $\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-12&13&-11\\-11&12&-10\\-26&28&-23\end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}4&1&2&2\\0&1&0&-2\\0&1&-2&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$

7 SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

7.1 Gaussova eliminačná metóda

Príklad 1 *Riešme sústavu rovníc*
$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & =11 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & =12 \\ 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & +2x_4 & =13 \\ 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =14 \end{array}.$$

Riešenie: Sústavu rovníc prepíšeme do maticového tvaru a k výpočtu použijeme Gaussovu eliminačnú metódu. Maticu upravíme na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 14 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -3R_1 \\ -4R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & -30 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 \\ -7R_2 \end{array} \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 40 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ +R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 \end{array}\right).$$

Hodnosť matice je rovná 4 a hodnosť rozšírenej matice je takisto rovná 4 a je to zároveň aj počet neznámych. Na základe Frobeniovej vety má sústava práve jedno riešenie, ktoré sa dá jednoducho vyjadriť z upravenej matice.

Z posledného riadku upravenej matice je zrejmé, že

$$\begin{aligned} 40x_4 &= 40 \\ \underline{\underline{x_4 = 1}} \end{aligned}.$$

Z tretieho riadku upravenej matice vypočítame

$$\begin{aligned} -4x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -4x_3 + 4\cdot 1 &= 0 \\ \underline{\underline{x_3 = 1}} \end{aligned}.$$

Pomocou druhého riadku nájdeme

$$\begin{aligned} -x_2 - 2x_3 - 7x_4 &= -10 \\ -x_2 - 2\cdot 1 - 7\cdot 1 &= -10 \\ \underline{\underline{x_2 = 1}} \end{aligned}.$$

Pomocou prvého riadku nájdeme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 11 \\ x_1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 &= 11 \\ \underline{\underline{x_1 = 2}} \end{aligned}.$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2,1,1,1)^T$.

Príklad 2 *Riešme sústavu rovníc*
$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = & 2 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & -3 \end{array}.$$

Riešenie: Postupujeme podobne ako v predchádzajúcej úlohe.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -R_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -5R_2 \\ +7R_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ +2R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Hodnosť matice je rovná 3 a hodnosť rozšírenej matice je rovná 4. Na základe Frobeniovej vety sústava nemá riešenie.

Príklad 3 *Riešme sústavu rovníc*
$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = & 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & -3 \end{array}.$$

Riešenie: Postupujeme podobne ako v predchádzajúcich úlohách.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -R_1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -5R_2 \\ +7R_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ +2R_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hodnosť matice je rovná 3 a hodnosť rozšírenej matice je takisto rovná 3, ale počet neznámych je rovný 4. Na základe Frobeniovej vety má sústava nekonečne veľa riešení.

Tretí riadok upravenej matice obsahuje 2 neznáme, jednu z neznámych si zvolíme ako parameter $t \in \mathbf{R}$.

$$\underline{\underline{x_4 = t}}\ .$$

Ďalšiu neznámu potom vyjadríme pomocou parametra

$$\begin{aligned} 2x_3 - 4x_4 &= 12 \\ 2x_3 - 4t &= 12 \\ \underline{\underline{x_3 = 6 + 2t}} & \end{aligned}\ .$$

Z druhého riadku

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_2 - (6 + 2t) + t &= -3 \\ \underline{\underline{x_2 = 3 + t}} & \end{aligned}\ .$$

Z prvého riadku

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_1 - 2(3+t) + 3(6+2t) - 4t &= 4 \\ \underline{\underline{x_1 = -8}} & \end{aligned}$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-8, 3+t, 6+2t, t)^T$, $t \in \mathbf{R}$.

V úlohách 1 – 34 riešte sústavy lineárnych rovníc Gaussovou eliminačnou metódou:

Výsledky:

1. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$ $(1, 3, 2)^T$

2. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$ $(2, -1, 0)^T$

3. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$ Ø

4. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$ $(3+t, -1-2t, t)^T, t \in \mathbf{R}$

5. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= -1 \end{aligned}$$ $(3, 2, -2, -1)^T$

6. $$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 &= 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 37 \end{aligned}$$ $(1, 2, 2, 0)^T$

7. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned}$$ $(-2, 0, 1, -1)^T$

8. $$\begin{aligned} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$ $(-\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 1)^T$

9. $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= -8 \end{aligned}$$ $(2, -2, 1, -1)^T$

10. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$ $(1, 2, 1, 3)^T$

11. $$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned}$$ $(3, 0, -5, 11)^T$

12. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \end{array}$$ $\varnothing$

13. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 9x_1 & - & x_2 & + & 15x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \end{array}$$ $\varnothing$

14. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 12x_2 & + & 9x_3 & + & 25x_4 & = & 15 \\ 15x_1 & + & 34x_2 & + & 25x_3 & + & 64x_4 & = & 40 \\ 20x_1 & + & 46x_2 & + & 34x_3 & + & 89x_4 & = & 70 \\ 10x_1 & + & 23x_2 & + & 17x_3 & + & 44x_4 & = & 25 \end{array}$$ $\varnothing$

15. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array}$$ $\varnothing$

16. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 12x_1 & - & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 21x_4 & = & 3 \\ 11x_1 & - & 5x_2 & + & 10x_3 & + & 24x_4 & = & 1 \\ 7x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 17x_4 & = & 0 \\ 8x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & 9 \end{array}$$

$$(-\frac{3}{2}-\frac{13}{2}t-\frac{5}{2}s, -\frac{7}{2}-\frac{19}{2}t-\frac{7}{2}s, s, t)^T,\ s,t\in \mathbf{R}$$

17. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 8x_1 & + & 12x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 9x_3 & - & 7x_4 & = & 3 \end{array}$$

$$(\frac{5}{8}-3t-s, 2t, 8s, -\frac{1}{4}+10s)^T,\ s,t\in \mathbf{R}$$

18. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12 \end{array}$$

$$(6-26t+17s, -1+7t-5s, t, s)^T,\ s,t\in \mathbf{R}$$

19.
$$\begin{aligned} 5x_1 &+ 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10 \\ 11x_1 &+ 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8 \\ 2x_1 &+ 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 7x_1 &- 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -4 \end{aligned}$$

$(8-9t-4s, t, s, -10+11t+5s)^T$, $s, t \in \mathbf{R}$

20.
$$\begin{aligned} 2x_1 &- x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 &- x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 &- x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 &+ 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{aligned}$$

$(0, 2, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3})^T$

21.
$$\begin{aligned} 2x_1 &+ 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 &- x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 &+ 7x_3 + 2x_4 = 2 \\ -6x_1 &+ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1 \end{aligned}$$

$(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{5}{3})^T$

22.
$$\begin{aligned} x_1 &+ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 &+ x_2 - 2x_4 = 3 \\ -3x_1 &+ 3x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ &+ x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{aligned}$$

$(1, 1, -1, 0)^T$

23.
$$\begin{aligned} 3x_1 &+ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 7x_1 &+ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ -4x_1 &+ 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -5 \\ 6x_1 &+ 10x_2 + 9x_4 = 1 \end{aligned}$$

$\emptyset$

24.
$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 &+ x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ &- x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 &+ 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \end{aligned}$$

$(2-t, 3-3t, t, 3-2t)^T$, $t \in \mathbf{R}$

25.
$$\begin{aligned} x_1 &+ 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 &+ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 &+ 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 &+ 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{aligned}$$

$(\frac{5}{2} - \frac{15}{4}t, -\frac{3}{2} + \frac{13}{4}t, \frac{1}{2} - \frac{5}{4}t, t)^T$, $t \in \mathbf{R}$

26. $$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +5x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & +2x_2 & -x_3 & -3x_4 & = & -2 \\ 6x_1 & +8x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & 4 \end{array}$$

$$\left(\frac{2}{7}-t-\frac{5}{14}u, t, u, \frac{8}{7}-t-\frac{13}{14}u\right)^T, t, u \in \mathbf{R}$$

27. $$\begin{array}{rrrrrcr} 6x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & 3 \\ 3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & & = & -7 \\ 9x_1 & +6x_2 & +x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & 2 \end{array}$$

$$(a, b, 13, 19-3a-2b, -34)^T, a, b \in \mathbf{R}$$

28. $$\begin{array}{rrrrrcr} 6x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & = & 5 \\ 4x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = & 4 \\ 4x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & 1 \end{array}$$

$$\left(a, b, \frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b, -1-\frac{14}{3}a-\frac{7}{3}b, 2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}b\right)^T, a, b \in \mathbf{R}$$

29. $$\begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & +2x_2 & & & = & -6 \\ x_1 & +8x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & +10x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & & & -x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 5 \end{array}$$

$\emptyset$

30. $$\begin{array}{rrrrcr} 6x_1 & -x_2 & +2x_3 & -7x_4 & = & -1 \\ x_1 & -x_2 & & -3x_4 & = & -1 \\ 7x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -10x_4 & = & -2 \\ 7x_1 & -x_2 & +x_3 & -9x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = & -6 \end{array}$$

$$\left(2, -\frac{9}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)^T$$

31. $$\begin{array}{rrrrcr} 5x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +7x_4 & = & 5 \\ 11x_1 & +4x_2 & +6x_3 & & = & 4 \\ 4x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +9x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & +4x_2 & +8x_3 & +4x_4 & = & 10 \end{array}$$

$$\left(2-8t, -\frac{9}{2}+13t, 6t, \frac{5}{2}-7t\right)^T, t \in \mathbf{R}$$

32. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \end{array}$$ $(t, t, 1+t, 1)^T, t \in \mathbf{R}$

33. $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 15 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$ $(3, 0, -2, 0, 1)^T$

34. $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & + & 6x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & - & 6x_5 & = & -1 \end{array}$$ $\emptyset$

7.2 Cramerovo pravidlo

Riešime sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}.$$

Aby sme mohli použiť Cramerovo pravidlo, je nutné vypočítať determinanty

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

pričom matica, z ktorej sa vypočíta determinant D musí byť regulárna ($D \neq 0$).

Riešenie takejto sústavy je

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

Príklad 1 *Riešme sústavu rovníc* $\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & = & -5 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 7 \end{array}.$

Riešenie: Vypočítame determinanty $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$,

$D_1 = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -14$, $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -28$

$$x_1 = \frac{0}{-14} = 0, \quad x_2 = \frac{-14}{-14} = 1, \quad x_3 = \frac{-28}{-14} = 2.$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 1, 2)^T$.

V úlohách 1 – 24 riešte sústavy lineárnych rovníc využitím Cramerovho pravidla:

Výsledky:

1. $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \end{array}$ $(3, 1)^T$

2. $\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & = & -6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 18 \end{array}$ $(2, 3)^T$

3. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}$ $(3, -1, 2)^T$

4. $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$ $(2, 1, -1)^T$

5. $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{array}$ $(2, 3, 5)^T$

6. $\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 30 \\ 3x_1 & - & 13x_2 & + & 2x_3 & = & 21 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 15 \end{array}$ $(2, -1, 1)^T$

7. $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \end{array}$ $(1,-2,0)^T$

8. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -6 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 17 \end{array}$ $(1,-1,2)^T$

9. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ -x_1 & + & 3x_2 & & & = & -4 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 17 \end{array}$ $(1,-1,2)^T$

10. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array}$ $(2,-1,0)^T$

11. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \end{array}$ $(1,2,3)^T$

12. $\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -3 \end{array}$ $(2,-3,-2)^T$

13. $\begin{array}{rcrcrcr} & & 6x_2 & + & 4x_3 & = & -12 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & & & = & 9 \\ 2x_1 & & & - & 3x_3 & = & 10 \end{array}$ $(5,-2,0)^T$

14. $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 17x_3 & = & 0 \end{array}$ $(1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2})^T$

15. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 3x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$ $(4,-3,2)^T$

16. $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$ $(-1,2,1)^T$

17. $$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array} \qquad (2,-3,3)^T$$

18. $$\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & =2 \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & =2 \\ & x_2 & +x_3 & =2 \end{array} \qquad (1,1,1)^T$$

19. $$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & & -2x_3 & = & -4 \\ x_1 & +8x_2 & +3x_3 & = & 3 \end{array} \qquad (2,\frac{1}{2},-1)^T$$

20. $$\begin{array}{rrrcr} -2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & 4 \\ -x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 16 \end{array} \qquad (1,2,3)^T$$

21. $$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & =2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & =3 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & =3 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & =0 \end{array} \qquad (1,1,0,0)^T$$

22. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37 \end{array} \qquad (1,2,2,0)^T$$

23. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \end{array} \qquad (-2,0,1,-1)^T$$

24. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -8 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & -8 \end{array} \qquad (2,-2,1,-1)^T$$

POUŽITÁ LITERATÚRA

[1] *Demidovič, B. P.*: **Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu**, Nauka, Moskva, 1977.

[2] *Džurina, J. - Grinčová, A. - Pirč, V.*: **Matematická analýza 1,** ISBN 80-8073-307-4. Názov www stránky: http://217.67.26.34/active_download/ma1/ulern_viewer.htm

[3] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.*: **Zbierka úloh z vyššej matematiky 1**, ALFA, Bratislava 1968, ISBN 63-066-68.

[4] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.*: **Zbierka úloh z vyššej matematiky 2**, ALFA, Bratislava 1969, ISBN 63-037-69.

[5] *Ivan, J.*: **Matematika 1**, ALFA/SNTL, Bratislava 1983.

[6] *Jirásek, F. - Kriegelstein, E. - Tichý, Z.*: **Sbírka řešených přikladů z matematiky**, SNTL/ALFA, Praha 1982.

[7] *Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M.*: **Matematika I**, SVTL, Bratislava 1966.

[8] *Marčoková, M. - Moravčík, J. - Ružičková, M.*: **Matematika IV**, Žilinská univerzita, EDIS - vydavateľstvo ŽU, 2000, ISBN 80-7100-697-1.

[9] *Molnárová, M. - Myšková, H.:* **Úvod do lineárnej algebry**, TU, Košice, 2005, ISBN 80-8073-361-9.

[10] *Pirč, V. - Haščák, A.*: **Matematická analýza I**, elfa s.r.o. Košice 2000, ISBN 80-88786-92-4.

[11] *Šoltés, V. - Juhásová, Z.*: **Zbierka úloh z vyššej matematiky I**, Edičné stredisko TU v Košiciach 1992.

NÁZOV: Matematika I - FEI
AUTOR: Baculíková Blanka, Grinčová Anna
VYDAVATEĽ: Technická univerzita v Košiciach
ROK: 2021
VYDANIE: prvé
ROZSAH: 81 strán
ISBN: 978-80-553-1501-0

ISBN 978-80-553-1501-0