Funkcia dvoch premenných

Katedra matematiky a teoretickej informatiky,
Technická univerzita v Košiciach

Definícia

Nech $A \subset RxR$. Zobrazenie $A \rightarrow R$, ktoré každému $[x, y] \in A$ priradí práve jedno reálne číslo $z = f(x, y)$ nazývame funkciou dvoch premenných.

Euklidovská metrika

vzdialenosť ($\rho(A, B)$) 2 bodov $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$ v RxR

$$\rho(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Definícia

Hovoríme, že

$$\lim_{[x,y]\to[a_1,a_2]} f(x, y) = \ell$$

práve vtedy, ak

$$\rho([x, y], [a_1, a_2]) \to 0 \ \ potom \ \ |f(x, y) - \ell| \to 0.$$

ε -ové okolie bodu A: $O_\varepsilon(A) = \{[x, y], \rho([x, y], A) < \varepsilon\}$

- Množina $M \subset RxR$ sa nazýva otvorená, ak pre každý bod $A \in M$ existuje také okolie $O_\varepsilon(A)$, ktoré celé leží v množine M.
- $M \subset RxR$ sa nazýva uzavretá, ak jej doplnok $M^C = R^2 - M$ je otvorená množina.
- Bod $Z \in M$ sa nazýva hraničný bod (bod uzáveru) množiny M, ak každé jeho okolie obsahuje bod, ktorý patrí M, aj bod, ktorý nepatrí do M.
- Hranica množiny je množina všetkých hraničných bodov.
- Ak hranica množiny $\in M$, tak M je uzavretá množina.
- Ohraničená množina je taká, ktorá sa dá vložiť do kružnice s konečným polomerom.

Definícia

Funkcia $f(x, y)$ sa nazýva spojitá v bode $A[a_1, a_2]$ ak

$$\lim_{[x,y]\to[a_1,a_2]} f(x, y) = f(a_1, a_2).$$

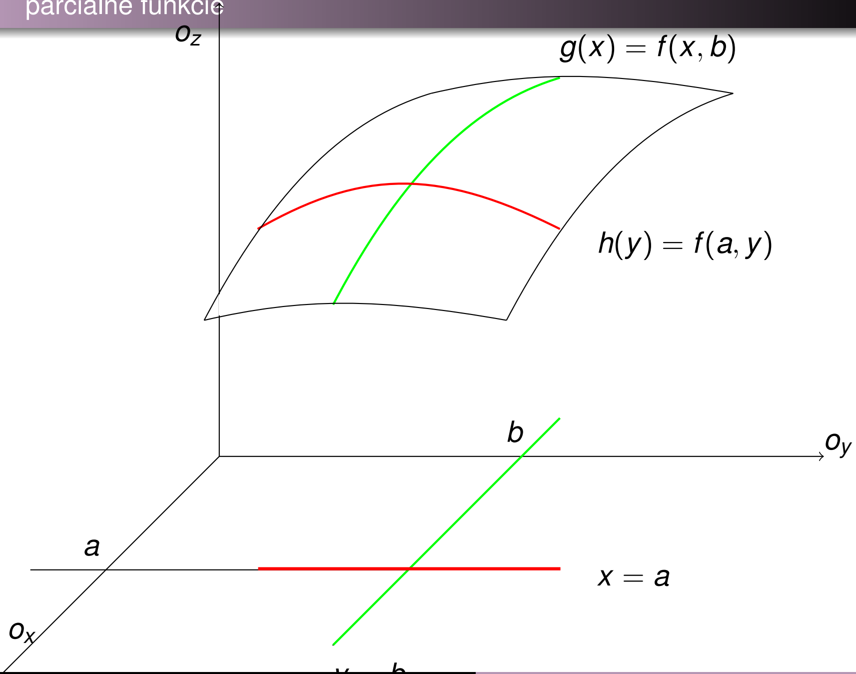
Poznámka:
Ak je funkcia $f(x, y)$ spojitá na uzavretej, ohraničenej množine, tak nadobúda minimálnu aj maximálnu hodnotu.
Analógia s funkciou 1 premennej: spojitá funkcia f(x) na uzavretom intervale nadobúda minimum aj maximum.

Uvažujme funkciu $f(x, y)$ definovanú na okolí $O(A)$ bodu $A = [a, b]$.

Parciálne funkcie definujeme nasledovne

$g(x) = f(x, b)$ funkcia 1 premennej x

$h(y) = f(a, y)$ funkcia 1 premennej y


o_z
$g(x) = f(x, b)$
$h(y) = f(a, y)$
b
o_y
a
$x = a$
o_x

Definícia

Nech parciálna funkcia $g(x)$ *má deriváciu v bode a. Túto deriváciu nazývame parciálna derivácia funkcie* $f(x, y)$ *podľa premennej* x *v bode* $A = [a, b]$. *Zapisujeme*

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

Definícia

Nech parciálna funkcia $h(y)$ má deriváciu v bode b. Túto deriváciu nazývame parciálna derivácia funkcie $f(x, y)$ podľa premennej y v bode $A = [a, b]$. Zapisujeme

$$\frac{\partial f(A)}{\partial y} = h'(b) = \lim_{y \to b} \frac{h(y) - h(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

- výpočet parciálnych derivácií–platia všetky pravidlá ako pre derivovanie funkcie jednej premennej
- parciálne derivácie vyšších rádov

Uvažujme funkciu $f(x, y)$ definovanú na okolí bodu $A = [a, b]$.

$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = g'(a)$ je smernica dotyčnice ku priestorovej krivke $g(x)$ v bode A.
$\frac{\partial f(A)}{\partial y} = h'(b)$ je smernica dotyčnice ku priestorovej krivke $h(y)$ v bode A.

Dotyková rovina ku grafu funkcie $z = f(x, y)$ v bode $A[a, b, f(a, b)]$

$$\varrho : \quad z - f(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y - b)$$

Definícia

Hovoríme, že $f(x, y)$ definovaná na okolí bodu $A = [a, b]$ $(O(A))$ má v bode A lokálne maximum, ak

$$\forall [x, y] \in O(A) \ \ plat\acute{\imath} \ \ f(x, y) \leq f(A) = f(a, b).$$

Definícia

Hovoríme, že $f(x, y)$ definovaná na okolí bodu $A = [a, b]$ $(O(A))$ má v bode A lokálne minimum, ak

$$\forall [x, y] \in O(A) \ \ plat\acute{\imath} \ \ f(x, y) \geq f(A) = f(a, b).$$

Nutná podmienka existencie lokálneho extrému!!!

Nech $f(x,y)$ má v bode A lokálny extrém. Nech existujú $\frac{\partial f(A)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(A)}{\partial y}$. Potom

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial f(A)}{\partial y} = 0.$$

Poznámka: Bod A nazývame stacionárny bod funkcie.

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému

Nech A je stacionárny bod funkcie $f(x, y)$. Nech f má na $O(A)$ spojité parciálne derivácie prvého a druhého rádu. Potom ak

- $f''_{xx}(A) > 0 \wedge D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} > 0$, tak funkcia f má v bode A lokálne minimum.
- $f''_{xx}(A) < 0 \wedge D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} > 0$, tak funkcia f má v bode A lokálne maximum.
- $D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} < 0$, tak funkcia f nemá v bode A extrém.
- Ak $D = 0$, tak nevieme rozhodnúť o existencii extrému.

Uvažujme funkciu $f(x, y)$ definovanú na množine M.
Nech $N \subset M$, $N = \{[x, y] \in M,\ g(x, y) = 0\}$.

Lokálne extrémy funkcie $f(x, y)$ na množine N nazývame
viazané extrémy funkcie f s väzbou $g(x, y) = 0$.

Ak z rovnice väzby $g(x, y) = 0$ vieme vyjadriť jednu premennú pomocou druhej, napr.

$$y = \phi(x),$$

alebo

$$x = \psi(y).$$

Potom dostávame

$$f(x, \phi(x)),$$

resp.

$$f(\psi(y), y).$$

Funkcia $f(x, y)$ sa stáva funkciou jednej premennej a hľadáme lokálne extrémy funkcie jednej premennej.

Ak z rovnice väzby $g(x, y) = 0$ nevieme vyjadriť jednu premennú pomocou druhej, použijeme Lagrangeovu funkciu L

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \quad \lambda \text{ je parameter}$$

Veta

Ak funkcia $L(x, y)$ má lokálny extrém v bode $A[a, b]$, tak funkcia $f(x, y)$ má bode A viazaný extrém s väzbou $g(x, y) = 0$.