Matematika 2 – 4.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr.1 – str. 17/6 rozložte v **R** na parciálne zlomky: $\dfrac{x^4 - 3x^2 + 17x - 23}{x^3 - 7x + 6}$

Najprv predelíme čitateľa menovateľom.

Zvyšok po delení zapísaný ako podiel dvoch polynómov, potom rozložíme na parciálne zlomky ako pri rýdzoracionálnej funkcii.

Pr.2 – 17/22

rozložte v **R** na parciálne zlomky:

$$f = \frac{x^3 + 6x^2 - 6x + 7}{x^3 - x^2 + x - 6}$$

1. vrobíme podiel

$$x^3 + 6x^2 - 6x + 7 : (x^3 - x^2 + x - 6) = 1$$

$$\frac{-(x^3 - x^2 + x - 6)}{7x^2 - 7x + 13}$$

$$f(x) = 1 + \frac{7x^2 - 7x + 13}{x^3 - x^2 + x - 6}$$

2. kanonický rozklad menovateľa $x^3 - x^2 + x - 6$

$$\frac{D(6)}{D(1)} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$\alpha_1 = 2$

	1	-1	1	-6
2		2	2	6
	1	1	3	0 ✓

Pr.2 – 17/22

rozložte v **R** na parciálne zlomky:

$$\frac{x^3+6x^2-6x+7}{x^3-x^2+x-6}$$

3. úprava na parciálne zlomky

$$\frac{x^3+6x^2-6x+7}{x^3-x^2+x-6} = 1 + \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+3}$$

$$\frac{7x^2-7x+13}{x^3-x^2+x-6} = \frac{A(x^2+x+3)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+x+3)}$$

4. dosadzovacia metóda na určenie A, B, C

$x=2$ $\quad 28-14+13 = A(4+2+3)$

$$27 = 9A$$

$$3 = A$$

Pr.2 – 17/22

rozložte v **R** na parciálne zlomky:

$$\frac{x^3+6x^2-6x+7}{x^3-x^2+x-6}$$

$x=0$

$$13 = 3A + (-2)C$$
$$13 = 9 - 2C$$
$$2C = -4$$
$$C = -2$$

$x = 1$

$$7.1 - 7.1 + 13 = 5A + (B + C)(-1)$$
$$13 = 15 - B - C$$
$$-2 = -B + 2$$
$$4 = B$$

5. zápis výsledku

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-2} + \frac{4x-2}{x^2+x+3}$$

Neurčitý integrál

Neurčitý integrál je opakom derivácie, označujeme ho

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$ integračná konštanta

$$(x^2+1)' = 2x \qquad \int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2} + C = \underline{x^2 + c}$$

Vzťahy:

integrál zo súčinu konštanty k, kde k je reálne číslo, a funkcie $f(x)$ je

$$\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx = k\,F(x) + c,$$

integrál zo súčtu (rozdielu) funkcií $f(x)$ a $g(x)$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + c.$$

Základné vzorce:

- $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + c$

$\int 1\,dx = x + c$

Pr. 1

$$\int \left(\frac{4}{3x^2} - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x^2} + \cos x + 2 \right) \mathrm{dx}$$

Pr. 2

$$\int \left(\frac{5}{x^6} - \frac{7}{8x^8} + \sin x \ + e^x - 5\right) \mathrm{dx}$$

$$\int \left(5x^{-6} - \frac{7x^{-8}}{8} + \sin x \ + e^x - 5\right) \mathrm{dx} =$$

$$= 5\int x^{-6}\mathrm{d}x - \frac{7}{8}\int x^{-8}\,\mathrm{d}x + \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int e^x \mathrm{d}x - 5\int 1\mathrm{d}x =$$

$$= 5\,\frac{x^{-6+1}}{-5} - \frac{7}{8}\frac{x^{-8+1}}{-7} - \cos x + e^x - 5x + C = \frac{-1}{x^5} + \frac{1}{8x^7} - \cos x + e^x - 5x + C$$

Pr. 3 – 22 / 8

$$\int(\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x^5})\,dx \qquad \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^9}+C$$

Pr. 4

$$\int\left(3\sqrt{x}+4^x-\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{dx}$$

$$\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+4^x-\frac{2}{1+x^2}+x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{dx}=3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{4^x}{\ln 4}-2\mathrm{arctg}\,x+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\mathrm{C}$$

$$\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+4^x-\frac{2}{1+x^2}+x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{dx}=2\sqrt{x^3}+\frac{4^x}{\ln 4}-2\mathrm{arctg}\,x+2\sqrt{x}+\mathrm{C}$$

Pr. 5 – 22 / 15

$\int x(x+1)(x-2)\,dx$ $\qquad$ $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$

Pr. 6 – 22 / 17

$\int (x - \frac{1}{x})^2 \, dx$	$\frac{1}{3}x^3 - 2x - \frac{1}{x} + C$

Pr. 7 – 22 / 16

$$\int (x+3)^2\,dx = \int (x^2 + 2\cdot 3x + 9)\,dx = \int (x^2 + 6x + 9)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 9x + C = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 9x + C$$

Pr. 8 – 23/ 22

22. $\int \frac{(x+1)^2}{x^3}\,dx$ $\qquad$ $\ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

Pr. 9 – 23 / 23

$$\int \frac{x^2-2x+6}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx - \int \frac{2x}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{6}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \int x^{2-\frac{1}{2}}\,dx - 2\int x^{1-\frac{1}{2}}\,dx + 6\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\,dx - 2\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 6\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 12\sqrt{x} + C$$

Pr. 10 – 23 / 29

$\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$	$\frac{1}{2}x^2+x+C$

Pr. 11 – 23 / 27

$$\int \frac{x^2-1}{x+1}\,dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}\,dx = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + C$$

Pr. 12 – Auto z pokoja začína zrýchľovať so zrýchlením $a = 3t$. Určte závislosť rýchlosti a dráhy auta od času.

Pr. 13 – 24 / 38

$\int \frac{5}{8x^2 - 32}\, dx$	$\frac{5}{32}\ln\left\|\frac{2-x}{2+x}\right\| + C$

Pr. 14 – 24 / 37

$$\int \frac{dx}{4-2x^2} = \int \frac{dx}{2(2-x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2-x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$a^2 = 2 \quad a = \sqrt{2}$

Pr. 15 – 24 / 41

$\int \frac{x}{x^2 - 3}\, dx$	$\frac{1}{2}\ln\left\|x^2 - 3\right\| + C$

Pr. 16 – 24 / 42

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \int \frac{\overbrace{3x^2}^{f'(x)}}{3\,\underbrace{(x^3+1)}_{f(x)}}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$$

$(x^3+1)' = 3x^2$

Pr. 17 – 24 / 45

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx \qquad \ln\left|\ln x\right| + C$$

Pr. 18 – 24 / 46

$$\int \frac{1}{x(4+\ln x)}\,dx = \int \overset{f'(x)}{\frac{1}{x}}\,\frac{1}{\underbrace{4+\ln x}_{f(x)}}\,dx = \ln|4+\ln x| + C$$

$$(4+\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

Dú: str. 22/ 6, 8, 10, 11, 14, 17, 18, 21, 24, 28, 33, 39, 41, 43, 44, 50

Nácvik na zápočtovú písomku: Vypočítajte nasledujúce integrály.

1. $\int \left(\frac{x^5}{7} + \frac{3}{x} + \sqrt[3]{x^5} + \frac{5}{\cos^2 x} \right) \mathrm{dx}$

2. $\int \left(2.\,3^x - \frac{1}{x^4} + \sqrt[2]{\frac{1}{x^2}} + \frac{8}{\sin^2 x} \right) \mathrm{dx}$

3. $\int \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{2}{1+x^2} + \frac{4\sqrt{x}}{x^2} + 5x \right) \mathrm{dx}$

4. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{5}{x^2} + \frac{\sqrt[2]{x^3}}{2x} \right) \mathrm{dx}$

5. $\int \left(10\cos x + 3.\,e^x - \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right) \mathrm{dx}$

6. $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{8}{x} + \sqrt[5]{x^2} + \frac{1}{4+\mathrm{x}^2} \right) \mathrm{dx}$

7. $\int \left(\frac{\sqrt[3]{3x}}{x} + \frac{7}{x} - x^5 + \frac{3}{x^2+1} + \frac{5}{\sin^2 x} \right) \mathrm{dx}$

8. $\int \left(5^x - 3\sin x + \frac{\sqrt[2]{x}}{x^4} + \frac{9}{\mathrm{x}^2} \right) \mathrm{dx}$

Nácvik na zápočtovú písomku: Výsledky

1. $\frac{x^6}{42} + 3\ln|x| + \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8} + 5\,\mathrm{tg}\,x + C$

2. $2\frac{3^x}{\ln 3} + 3\frac{1}{x^3} + \ln|x| - 8\,\mathrm{cotg}\,x + C$

3. $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln 0{,}5} - 2\,\mathrm{arctg}\,x - 8\frac{1}{\sqrt{x}} + 5\frac{x^2}{2} + C$

4. $2\arcsin\frac{x}{3} - 2\mathrm{cotg}\,x + \frac{5}{x} + \frac{\sqrt[2]{x^3}}{3} + C$

5. $10\sin x + 3.e^x - 2\frac{\sqrt[2]{x^5}}{5} - \mathrm{arsin}\,\frac{x}{2} + C$

6. $2\mathrm{tg}\,x - 8\ln|x| + 5\frac{\sqrt[5]{x^7}}{7} + \frac{1}{2}\mathrm{artx}\,\frac{x}{2} + C$

7. $3\sqrt[3]{3x} + 7\ln|x| - \frac{x^6}{6} + 3\mathrm{acrtg}\,x - 5\mathrm{cotg}\,x + C$

8. $\frac{5^x}{\ln 5} - 3\cos x - 2\frac{1}{5\sqrt[2]{x^5}} - \frac{9}{x} + C$

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Množinu {F + c, c ∈ R} všetkých primitívnych funkcií k funkcii f nazývame neurčitý integrál, ktorý zapisujeme
   a) $F(x) = f'(x)$
   b) $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + c$,
   c) $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$

2. Integrál so súčtu dvoch funkcii f(x) a g(x) určíme podľa pravidla
   a) $\int f(x)\mathrm{d}x + g(x)$,
   b) $\int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)dx$,
   c) $\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)dx$.

3. Integrál $\int 3f(x)\mathrm{d}x$ vypočítame ako
   a) $3\int f(x)\mathrm{d}x$,
   b) $3\mathrm{d}x$,
   c) $\int 3\mathrm{d}x$.

4. Integrál $\int e^x\mathrm{d}x$ je rovný
   a) $e^x \ln 1 + \mathrm{c}$,
   b) $\frac{e^x}{\ln 1} + c$,
   c) $e^x + c$.

5. Výsledok $3\ln|x| + c$ dostaneme integrovaním

a) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{3x}\,\mathrm{d}x.$

6. Výsledok $\frac{1}{8}x^4 + c$ dostaneme integrovaním

a)$\int \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x$,

b)$\int \frac{1}{8}x^3\,\mathrm{d}x$,

c)$\int \frac{1}{2}x^3\,\mathrm{d}x$,

d)$\frac{1}{8x^3}\,\mathrm{d}x$.

7. Pri výpočte integrálu$\int \frac{4x^3}{x^4+5}\,\mathrm{d}x$ použijeme vzorec

a) $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{f(x)}{f'(x)}\,\mathrm{d}x$,

c)$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

8. Výsledok $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+c$ dostaneme integrovaním

a) $\int \frac{1}{16+x^2}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

9. Integrál $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ je rovný

a) $\frac{5}{\arcsin x}+c$,

b) $5\arcsin x+c$,

c) $\arcsin 5x+c$.

10. Vo výsledku integrálu $\int(2+\cos x-\sqrt{x^3})\,\mathrm{d}x$ je

a) prvý člen rovný 2 a druhý rovný – cos x,

b) prvý člen rovný 2x a tretí rovný $-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}$

c) druhý člen rovný cos x a tretí rovný $-\frac{2}{5}\sqrt{x^5}$

d)prvý člen rovný 2x a tretí rovný $-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.

Správne odpovede: 1b, 2c, 3a, 4c, 5b, 6c, 7c, 8a, 9b, 10b

Hodnotenie:

0 – 2 nesprávna odpoveď – máš vedomosti o integrovaní funkcií

3 – 5 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

6 a viac nesprávnych odpovedí – odporúčam sa na to ešte raz pozrieť