Matematika 2 – 5.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr. 1 – 24 / 38

$$\int \frac{5}{8x^2 - 32}\, dx \qquad \frac{5}{32}\ln\left|\frac{2-x}{2+x}\right| + C$$

Pr. 2 – 24 / 37

$$\int \frac{dx}{4-2x^2} = \int \frac{dx}{2(2-x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2-x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$a^2 = 2 \quad a = \sqrt{2}$

Pr. 3 – 24 / 41

$\int \frac{x}{x^2-3}\,dx$	$\frac{1}{2}\ln\left\|x^2-3\right\|+C$

Pr. 4 – 24 / 42

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \int \frac{\overbrace{3x^2}^{f'(x)}}{3\,\underbrace{(x^3+1)}_{f(x)}}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$$

$(x^3+1)' = 3x^2$

Pr. 5 – 24 / 45

$$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx \qquad \ln\left|\ln x\right| + C$$

Substitučná metóda riešenia neurčitých integrálov

$$\int f(\varphi(x)).\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \int f(t)\mathrm{d}t$$

substitúcia

Postup pri riešení:

1. Nájdeme v integráli zloženú funkciu $f(\varphi(x))$ a deriváciu jej vnútornej funkcie $\varphi'(x)\mathrm{d}x$.
2. Zavedieme substitúciu za $\varphi(x) = t$ a $\varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.
3. Integrál s novou premennou ***t*** integrujeme podľa pravidiel a vzorcov pre integrovanie.
4. Vo výsledku integrálu nahradíme ***t*** pôvodným výrazom, za ktorý bola zavedená substitúcia.

Pr. 1 – 27 / 9

9.	$\int 2x(x^2+2)^3\,dx$	$\dfrac{(x^2+2)^4}{4}+C$
10.	$\int x^2\cdot(x^3+4)^6\,dx$	$\dfrac{1}{21}(x^3+4)^7+C$
11.	$\int x\cdot\sqrt{x^2+5}\,dx$	$\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}+C$

Pr. 2 – 27 / 12

11.	$\int x \cdot \sqrt{x^2+5}\, dx$	$\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3}+C$
12.	$\int x \cdot \sqrt[3]{x^2+2}\, dx$	$\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2)^4}+C$

Pr. 3 – 27 / 11

$$\int x \cdot \sqrt{x^2+5}\, dx$$

$$\left|\begin{array}{l} x^2+5 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{dt}{2} \end{array}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2+5}\; x\,dx = \int \sqrt{t}\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C$$

Pr. 4 – 27 / 15

15.	$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-2}}\,dx$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-2)^2}+C$
16.	$\int \frac{x}{\sqrt{4-5x^2}}\,dx$	$-\frac{1}{5}\sqrt{4-5x^2}+C$

Pr. 5 – 27 / 14

14. $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$\left|\begin{matrix} 1+x^2 = t \\ 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}\right|$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1+x^2} + \mathrm{C}$$

Pr. 6

$$\int \frac{3}{\sqrt{25-9x^2}}\,\mathrm{d}x$$

24.	$\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$	$\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x}{3}\right)+C$

Pr. 7 – 30 / 61

$$\int e^{x^2+4x+5}(x+2)dx$$

$$\frac{1}{2}e^{x^2+4x+5}+C$$

28.	$\int e^{\frac{x}{3}}\,dx$	$3e^{\frac{x}{3}}+C$
29.	$\int x e^{1+x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}e^{1+x^2}+C$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{x}{3} = t \\ \frac{1}{3}\,dx = dt \\ dx = 3\,dt \end{array}\right|$$

$$\int e^{\frac{x}{3}}\,dx = \int e^{t}\,3\,dt = 3\int e^{t}\,dt$$

$$= 3e^{t} + C = 3e^{\frac{x}{3}} + C$$

$$\boxed{\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + C}$$

Pr. 9 – 29 / 38

38. $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx$ $\qquad$ $\frac{1}{5}\ln^5 x + C$

39. $\int \frac{dx}{x(3+\ln x)^2}$ $\qquad$ $-\frac{1}{3+\ln x} + C$

Pr. 10 – 27 / 44

$$\int \frac{\ln x}{x} e^{\ln^2 x - 1}\, dx \qquad\qquad \frac{1}{2} e^{\ln^2 x - 1} + C$$

Pr. 11 – 30 / 62

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$$

$$\left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right|$$

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx = \int \cos t \, dt = \sin t + C = \sin \ln |x| + C$$

46.	$\int \sin^3 x \cos x\, dx$	$\frac{1}{4}\sin^4 x + C$
47.	$\int \cos^2 x \sin x\, dx$	$-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$

Pr. 13 – 29 / 49

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx \qquad\qquad 3\sqrt[3]{\sin x} + C$$

Pr. 14 – 29 / 48

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}}\,dx$$

$$\left| \begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x \,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned} \right|$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^5 x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{\sqrt{t^5}}\,\mathrm{d}t = -\frac{t^{\frac{-3}{2}}}{\frac{3}{-2}} + C = -\frac{1}{-\frac{3\sqrt{t^3}}{2}} + C = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{t^3}} + \mathrm{C} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{\cos^3 x}} + \mathrm{C}$$

Dú: str. 26 / 2, 6, 10, 13, 16, 20, 23, 24, 29, 32, 39, 43, 46, 52, 59, 60

Metóda per partes riešenia neurčitých integrálov

$$\int u(x).v'(x)\mathrm{d}x = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{dx}$$

$$\begin{vmatrix} u(x) = & v'(x) = \\ u'(x) = & v(x) = \end{vmatrix}$$

1. prípad: $u(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int P_n(x)\cdot e^{kx}\,dx$$
$$\int P_n(x)\cdot \cos kx\,dx$$
$$\int P_n(x)\cdot \sin kx\,dx\,,\ k\in Z$$

derivujeme P$_n$(*x*)

2. prípad: $v'(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int P_n(x)\cdot \ln x\,dx$$
$$\int P_n(x)\cdot \arcsin x\ (resp.\ \arccos x)\ dx$$
$$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arctg}\, x\ (resp.\ \mathrm{arccotg}\, x)\ dx$$

integrujeme P$_n$(*x*)

Pr. 1 – 31 / 5

$$\int x e^{2x} dx \qquad\qquad \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Pr. 2 – 31 / 4

$$\int (2-5x)e^x \, dx$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 2-5x & v'(x) = e^x \\ u'(x) = -5 & v(x) = e^x \end{array} \right|$$

$$\int (2-5x)e^x \mathrm{d}x = (2-5x)e^x - \int -5e^x \mathrm{dx} = (2-5x)e^x + 5e^x + C$$

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Pri substitučnej metóde hľadáme ku zloženej funkcii $f(\varphi(x))$
   a) jej deriváciu $f\,'(\varphi(x))$,
   b) deriváciu jej vnútornej funkcie $\varphi'(x)$,
   c) integrál jej vnútornej funkcie $\varphi'(x)$.

2. Ak $\varphi(x) = 4x^5 + 2x$ potom
   a) $\mathrm{d}t = (20x^4 + 2)\mathrm{d}x$,
   b) $\mathrm{d}t = \left(4\frac{x^6}{6} + 2\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$,
   c) $\mathrm{d}t = 5x^4\mathrm{d}x$.

3. V integráli $\int \frac{1}{3x\ln x}\mathrm{d}x$ zavedieme substitúciu
   a) $t = 3x\ln x$,
   b) $t = \ln x$,
   c) $t = x\ln x$.

4. V integráli $\int \frac{e^x}{e^x+5}\mathrm{d}x$ je
   a) $\mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x$,
   b) $\mathrm{d}t = (e^x+5)\,\mathrm{d}x$,
   c) $dt = 5\mathrm{d}x$.

5. V integráli $\int (\sqrt[3]{x^2+1})\, 2x\, \mathrm{d}x$ je zložená funkcia

a) $2x\, \mathrm{d}x$,

b) $\sqrt[3]{x^2+1}$,

c) x^2+1.

6. Ak integrál $\int 2 \sin x \cos^2 x\, \mathrm{d}x$, potom

a) zvolíme $t = \cos x, \mathrm{d}t = -\sin x\, \mathrm{d}x$,

b) zvolíme $t = \cos^2 x, \mathrm{d}t = -2 \sin x\, \mathrm{d}x$,

c) zvolíme $t = \sin x, \mathrm{d}t = \cos x\, \mathrm{d}x$.

7. V integráli $\int e^{\ln\,(x^2+1)} \frac{2x}{x^2+1} \mathrm{d}x$ je vnútorná funkcia zloženej funkcie

a) $e^{\ln\,(x^2+1)}$

b) $\frac{2x}{x^2+1}$,

c) $\ln\,(x^2+1)$,.

8. Substitúciu $\mathrm{t} = \sqrt{x+3}$ zavádzame v integráli

a) $\int e^{\sqrt{x+3}} \frac{1}{\sqrt{x+3}} \mathrm{d}x$,

b) $\int \frac{1}{2} \left(\sqrt{x+3}\right) \mathrm{d}x$,

c) $\int \sqrt{x+3}\, (\mathrm{x}+3) \mathrm{d}x$.

9. V integráli $\int e^{x^2+2x+1}(2x+2)\,\mathrm{d}x$ je

a) $\mathrm{d}t = (x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x$,

b) $\mathrm{d}t = (e^{x^2+2x+1})\,\mathrm{d}x$,

c) $\mathrm{d}t = (2x+2)\,\mathrm{d}x$.

10. V integráli $\int (x^2+1)^4 x\mathrm{d}x$ je

a) $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x$,

b) $\frac{\mathrm{d}t}{2} = x\,\mathrm{d}x$,

c) $\mathrm{d}t = 4(x^2+1)^3\mathrm{d}x$.

Správne odpovede: 1b, 2a, 3b, 4a, 5b, 6a, 7c, 8a, 9c, 10b

Hodnotenie:

0 – 2 nesprávna odpoveď – máš vedomosti o integrovaní funkcií pomocou substitúcie

3 – 5 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

6 a viac nesprávnych odpovedí – odporúčam sa na to ešte raz pozrieť