Matematika 2 – 6.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Metóda per partes riešenia neurčitých integrálov

$$\int u(x).v'(x)\mathrm{d}x = u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{dx}$$

$$\begin{vmatrix} u(x) = & v'(x) = \\ u'(x) = & v(x) = \end{vmatrix}$$

1. prípad: $u(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int P_n(x)\cdot e^{kx}\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \cos kx\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \sin kx\,dx\,,\ k\in Z$$

derivujeme P$_n$(*x*)

2. prípad: $v'(x) = \mathrm{P_n}(x)$

$$\int P_n(x)\cdot \ln x\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \arcsin x\ (resp.\ \arccos x)\,dx$$

$$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arctg}\,x\ (resp.\ \mathrm{arccotg}\,x)\,dx$$

integrujeme P$_n$(*x*)

Pr. 1 – 32 / 11

11.	$\int x^2 e^{2x} dx$	$\frac{1}{2} e^{2x} (x^2 - x + \frac{1}{2}) + C$
12.	$\int x^2 e^{-x} dx$	$-e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C$
13.	$\int x \sin x \, dx$	$-x \cos x + \sin x + C$
14.	$\int (3x - 4) \sin x \, dx$	$(4 - 3x) \cos x + 3 \sin x + C$

Pr. 2 – 32 / 9

$$\int (x^2+2)\, e^x\, dx = (x^2+2)e^x - \int 2xe^x \mathrm{dx} =$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = x^2+2 & v'(x) = e^x \\ u'(x) = 2x & v(x) = e^x \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 2x & v'(x) = e^x \\ u'(x) = 2 & v(x) = e^x \end{array} \right|$$

$$= (x^2+2)e^x - \left[2xe^x - \int 2e^x \mathrm{dx} \right] = (x^2+2)e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

Pr. 3 – 33 / 25

$\int (x^2+6x+3)\cos 2x\,dx$	$\frac{1}{2}(x^2+6x+3)\sin 2x + \frac{1}{2}(x+3)\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Pr. 4 – 32 / 20

$$\int (3-x)\sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 3 - x & v'(x) = \sin\frac{x}{2} \\ u'(x) = -1 & v(x) = -2\cos\frac{x}{2} \end{array} \right|$$

$$= -2(3-x)\cos\frac{x}{2} - \int 2\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{dx} = (2x-6)\cos\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2} + C$$

Pr. 5 – 33 / 31

$\int x \ln^2 x \, dx$	$\frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C$

Pr. 6 – 33 / 28

$$\int (x-1)\ln x\,dx$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \ln x & v'(x) = x - 1 \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v(x) \ = \dfrac{x^2}{2} - x \end{array} \right|$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\mathrm{dx} = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + x + C$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \frac{1}{4}x^2 + x + C$$

Pr. 7 – 33 / 41

$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$	$\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$

43.	$\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$	$\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C$
44.	$\int (4x^3 + 2x)\operatorname{arctg} x \, dx$	$(x^4 + x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} + C$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \operatorname{arctg} x & v'(x) = (4x^3+2x) \\ u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} & v(x) = x^4 + x^2 \end{array} \right|$$

$$= (x^4 + x^2)\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^4+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = (x^4 + x^2)\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$(x^4 + x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} + C$$

Pr. 9 – 34 / 51

$$\int \arccos x \, dx \qquad\qquad x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$$

Dú: str. 31 / 6, 10, 15, 17, 23, 29, 30, 42, 43, 48, 52

Integrovanie racionálnych funkcií

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{kde racionálna funkcia} \quad f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

1. a) Ak n < m, f(x) <u>rýdzoracionálna</u> – rozklad na parciálne zlomky, potom integrujeme
   b) v prípade, že je daný integrál v tvare:

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+px+q}} = \int \frac{dx}{\underbrace{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}} \quad \text{pre} \quad p^2-4q<0 \quad \text{použijeme substitúciu} \quad x+\frac{p}{2}=t$$

menovateľa doplníme na štvorec a použijeme integračný vzorec

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

2. Ak n > m, f(x) <u>nerýdzoracionálna</u> – predelíme, upravíme na súčet polynómu a parciálnych zlomkov, potom všetko integrujeme

Pr. 1 – 38 / 3

3.	$\int \frac{4x+2}{x^2-2x-8}\,dx$	$\ln\left\lvert (x+2)(x-4)^3 \right\rvert + C$
4.	$\int \frac{7x+7}{x^2+x-12}\,dx$	$\ln\left\lvert (x-3)^4(x+4)^3 \right\rvert + C$

Pr. 2 – 38 / 8

7. $\displaystyle\int \frac{4x^2+8x-8}{x^3-4x}\,dx$ $\qquad$ $\ln\left|\frac{x^2(x-2)^3}{x+2}\right|+C$

8. $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$ $\qquad$ $2\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right|-\frac{3}{x+2}+C$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+1}$$

$$x-1 = A(x+1) + B(x+1)(x+2) + C(x+2)^2$$

$x=-1$ $\qquad$ $-2 = C$

$x=-2$ $\qquad$ $-3=-A \qquad A=3$

$x=0$ $\qquad$ $-1 = A + B\cdot 1\cdot 2 + C4$

$-1 = 3 - 2B - 8 \qquad B=2$

Pr. 2 – 38 / 8

$$\int \frac{3}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx + \int \frac{-2}{x+1}\,dx$$

$$= 3\,\frac{t^{-1}}{-1} + 2\ln|x+2| - 2\ln|x+1| + C$$

$$= -3\,\frac{1}{x+2} + 2\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| + C$$

$$\left|\begin{array}{r} x+2=t \\ dx=dt \end{array}\right|$$

Pr. 3 – 38 / 29

28.	$\int \frac{1}{x^2+x+2}dx$	$\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C$
29.	$\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Pri metóde per partes nahradíme integrál $\int u(x).v'(x)\mathrm{d}x$
   a) výrazom $u(x).v(x) - \int u(x).v'(x)\mathrm{d}x$,
   b) výrazom $u(x).v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$,
   c) výrazom $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$.

2. Pri metóde per partes musí platiť, že funkcie $u(x), v(x)$
   a) majú spojitú deriváciu,
   b) majú deriváciu, ktorá nemusí byť spojitá,
   c) nemajú spojitú deriváciu.

3. V integráli $\int(x^2+3x)\sin 3x\,\mathrm{d}x$ volíme ako $u(x)$
   a) $\sin 3x$,
   b) $x^2 + 3x$,
   c) $\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{\mathbf{2}}$.

4. V integráli $\int(x+1)\ln 5x\,\mathrm{d}x$ volíme ako $u(x)$
   a) $x + 1$,
   b) $\ln 5x$,
   c) $\frac{1}{x}$.

5. Ak $u(x) = x$ a $v'(x) = e^{\frac{x}{2}}$ potom,

a) $u'(x) = 1$ a $v(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$,

b) $u'(x) = \frac{x^2}{2}$ a $v(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$,

c) $u'(x) = 1$ a $v(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

6. V integráli $\int 5x \arcsin x \, \mathrm{d}x$ volíme ako $v'(x)$

a) $5x$,

b) $\arcsin x$,

c) $\frac{5x^2}{2}$.

7. V integráli $\int (x^2+1)e^{3x}\mathrm{d}x$ volíme ako $v'(x)$

a) x^2+1,

b) $(x^2+1)e^{3x}$,

c) e^{3x}.

8. Volíme $v'(x) = 1$ v integráli

a) $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$,

b) $\int e^{2x}\mathrm{d}x$,

c) $\int (\mathrm{x} + 3) \cos x \, \mathrm{d}x$.

9. V integráli $\int e^x(2x+2)\,\mathrm{d}x$ výraz $2x+2$

a) volíme ako $u(x)$ a ho integrujeme,
b) volíme ako $v'(x)$ a ho derivujeme,
c) volíme ako $u(x)$ a ho derivujeme.

10. V integráli $\int (x^2-4x)\ln x\,\mathrm{d}x$ výraz x^2-4x

a) volíme ako $u\,(x)$ a ho integrujeme,
b) volíme ako $v'(x)$ a ho integrujeme,
c) volíme ako $v'(x)$ a ho derivujeme.

11. Pri úprave integrálu $\int \frac{x^2+2x}{x^3+6x^2+12x+8}\,\mathrm{d}x$

a) predelíme čitateľa menovateľom a potom urobíme rozklad na parciálne zlomky,
b) urobíme rozklad na parciálne zlomky,
c) doplníme menovateľa na štvorec a použijeme vhodnú substitúciu.

12. Pri úprave integrálu $\int \frac{x^4+8x}{x^2+12x+5}\,\mathrm{d}x$

a) predelíme čitateľa menovateľom a potom urobíme rozklad na parciálne zlomky,
b) urobíme rozklad na parciálne zlomky,
c) doplníme menovateľa na štvorec a použijeme vhodnú substitúciu.

13. Pri úprave integrálu $\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

a) predelíme čitateľa menovateľom a potom urobíme rozklad na parciálne zlomky,
b) urobíme rozklad na parciálne zlomky,
c) doplníme menovateľa na štvorec a použijeme vhodnú substitúciu.

14. Pri úprave integrálu $\int \frac{1}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x$ po úprave použijeme na výpočet integrál

a) $\int \frac{1}{\sqrt{d^2-t^2}}\mathrm{d}t = \arcsin\frac{t}{d} + C$, b) $\int \frac{1}{\sqrt{t^2+d^2}}\mathrm{d}t = \ln\left|t+\sqrt{t^2+d^2}\right| + C$, c) $\int \frac{1}{t^2+a^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$

Správne odpovede: 1b, 2a, 3b, 4b, 5a, 6a, 7c, 8a, 9c, 10b, 11b, 12a, 13c, 14c

Hodnotenie:

0 – 3 nesprávna odpoveď – máš vedomosti o integrovaní funkcií pomocou metódy per partes a integrovaní racionálnych funkcií

4 – 7 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

8 a viac nesprávnych odpovedí – odporúčam sa na to ešte raz pozrieť