NMPaMŠ – 5.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr. 1 Napíšte sústavu rovníc pre určene koeficientov a_0, a_1 pomocou MNŠ pre funkciu danú tabuľkou, kde funkcia $g(x) = a_0 x^2 + a_1 \frac{1}{x}$.

$\boldsymbol{x_i}$	**1**	**2**	**5**
$\boldsymbol{y_i = f(x_i)}$	2	4	10

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_0(x_i),$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_1(x_i).$$

Numerický výpočet určitého integrálu

Pri výpočte integrálu

$$\int_a^b f(x)dx$$

kde a < b a $f(x)$ je integrovateľná na $I = \langle a, b \rangle$, rozdelíme interval I na **n intervalov rovnakej dĺžky** medzi uzlovými bodmi a, b:

$a < x_0 < x_1 < ...... < x_n < b$ s konštantným krokom: $h = \frac{b-a}{n}$

1. Lichobežníková metóda

Pri tejto metóde je

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

nahradený obsahom lichobežníka so základňami $f(x_i), f(x_{i+1})$ a výškou h.

Pr. 2: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 0{,}05$.

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

1. **Zvolíme interval $\langle a, b\rangle$, vypočítame hodnotu M_2 a horný odhad chyby pre určenie delenia n intervalu.**

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \langle \mathbf{1}, \mathbf{4}\rangle$$

$$M_2 \geq \max_{x \in \langle a,b\rangle} |f''(x)|$$

horný odhad chyby

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon$$

2. Určíme n delení intervalu a krok delenia h.

3. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme x_i , $f(x_i)$

i	0	1	2	3	4
x_i	a =				b =
$f(x_i)$					

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$f(x_i) = \sqrt{x_i}$$

4. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

Pr. 2: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou, ak je dané n = 6 a odhadnite chybu výpočtu.

$$\int_4^{6,4} \ln x \, dx$$

1. Určíme krok delenia h.

2. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme x_i , $f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Pr. 2: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou, ak je dané n = 6 a odhadnite chybu výpočtu.

$$\int_4^{6,4} \ln x \, dx$$

3. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

4. Vypočítame hodnotu M_2 a horný odhad chyby.

$$M_2 \geq \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)|$$

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

Pr. 3: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou s presnosťou ε = 0,02.

$$\int_1^4 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

$$M_2 \geq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|$$

$$M_2 = \max_{x\in\langle 1,4\rangle} \left| 6 \frac{1}{(1+x)^4} \right| = 0,375$$

$x = 1 \quad f''(x) = 0,375$

$x = 4 \quad f''(x) = 0,0096$

$f(x) = (1+x)^{-2}$

$f'(x) = -2(1+x)^{-3}$

$f''(x) = 6(1+x)^{-4}$

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon$$

$a = 1$

$b = 4$

$M_2 = 0{,}375$

$\varepsilon = 0{,}02$

$$\frac{(4-1)^3 \cdot 0{,}375}{12 n^2} \leq \varepsilon$$

$$\frac{27 \cdot 0{,}375}{12 \cdot 0{,}02} \leq n^2$$

$$6{,}49 \leq n$$

$h = \frac{b-a}{n}$

za n bereme celé číslo $n = 7$

$$h = \frac{4-1}{7} = \frac{3}{7}$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1	$\frac{10}{7}$	$\frac{13}{7}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{25}{7}$	4
$f(x_i)$	0,25	0,1696	0,1225	0,0926	0,0725	0,0583	0,0479	0,04

$$f(x_i) = (1+x)^{-2}$$

$$f(a) = f(1) = 0,25$$

$$f(b) = f(4) = 0,04$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x) = \sum_{i=1}^{6} (1+x)^{-2} = 0,5634$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

$$L(7) = \frac{\overset{h}{\frac{3}{7}}}{2} \left[\underbrace{0{,}25}_{f(a)} + \underbrace{0{,}04}_{f(b)} + 2 \cdot \underbrace{0{,}5634}_{\sum_{i=1}^{6} f(x_i)} \right] = 0{,}3036$$

$\downarrow$

vzhľadom na ε

$L(7) \doteq 0{,}30$

Dú:

Pre zadaný počet n delení vypočítajte lichobežníkovou metódou integrál $\int_a^b f(x)\,dx$

a odhadnite chybu výpočtu.

5.2.

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+5x}, \quad n = 4$$

L(4) = 0,1989, $R_L(4)$ = 0,0004

Lichobežníkovou metódou vypočítajte daný integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ tak, aby ste dosiahli

zadanú presnosť ε.

5.22.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \quad \varepsilon = 0{,}01$$

L(5) = 0,74437

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Krok delenia intervalu $\langle a, b\rangle$ pri lichobežníkovej metóde výpočtu integrálu je daný

   a) $h = \frac{n}{b-a}$,

   b) $h = \frac{b-a}{n}$,

   c) $h = \frac{(b-a)^2}{n}$.

2. Druhá hodnota x_i v tabuľke po delení intervalu $\langle a, b\rangle$ sa urči, ako

   a) $a + h$,
   b) $a - h$,
   c) $b + h$.

3. Hodnota M_2 je daná

   a) $\max\limits_{x\in(a,b)} |f(x)|$,
   b) $\max\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)|$,
   c) $\max\limits_{x\in(a,b)} |f''(x)|$.

.

4. Ak je daná presnosť ε, potom pomocou nej určujeme pri lichobežníkovej metóde

a) hodnotu h,

b) hodnotu n,

c) hodnotu $L(n)$.

5. Výraz $\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$ vyjadruje

a) dolný odhad chyby,

b) horný odhad chyby,

c) hodnotu integrálu.

6. Pomocou lichobežníkovej metódy hodnotu integrálu aproximujeme pomocou

a) $L(n) = \frac{h}{2}\left[a + b + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$

b) $L(n) = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=0}^{n} f(x_i)]$

c) $L(n) = \frac{h}{2}\left[f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$

d) $L(n) = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$

7. Je daný integrál $\int_2^5 \frac{1}{x} dx$, $n = 3$. Hodnota x_2 v tabuľke je

a) 3, b) 2, c) 5, d) 4.

i	0	1	2	3
x_i				
$f(x_i)$				

8. Hodnota x_3 v tabuľke (pri tých istých podmienkach ako v otázke 7) je

a) 3, b) 2, c) 5, d) 4.

9. Hodnota $f(x_1)$ v tabuľke (pri tých istých podmienkach ako v otázke 7) je

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{1}{4}$, d) $\frac{1}{5}$.

10. V tabuľke (otázka 7) je interval $\langle a, b \rangle$ rozdelení na

a) 2 rovnako široké intervaly,
b) 3 rovnako široké intervaly,
c) 4 rovnako široké intervaly.

11. Ak hodnota $n \geq 12{,}35$, potom ju zaokrúhlime na

a) 12, b) 13, c) 12,3, d) 12,4.

12. Je daný integrál $\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx$, $n = 10$, $M_2 = 6$. Chyba výpočtu je

a) $R_L(10) = 0{,}64$, b) $R_L(10) = 3{,}2$, c) $R_L(10) = 0{,}32$.

Správne odpovede:

1b, 2a, 3c, 4b, 5b, 6d, 7d, 8c, 9b, 10b, 11b, 12c

Hodnotenie:

0 – 2 nesprávne odpovede – máš vedomosti o výpočte integrálu funkcie pomocou lichobežníkovej metódy

3 - 5 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

6 a viac nesprávnych odpovedí – tvoje vedomosti nie sú postačujúce, odporúčam sa na to ešte raz pozrieť