Rentový počet

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Pojem finančnej renty - Ilustrácia

Príklad:

Pán Oravec si chce našetriť na kúpu záhradky. Rozhodol sa, že na konci každého z nasledujúcich 8 rokov uloží do banky 500 eur pri 6% ročnej úrokovej miere. Koľko eur si našetrí?

Pojem finančnej renty - Ilustrácia

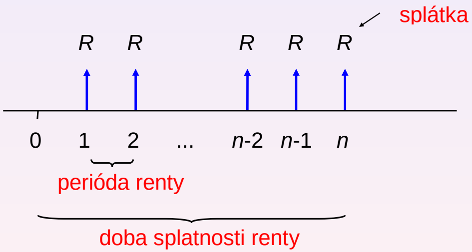
Príklad:

Pán Podolník sa dohodol s pánom Podhorom, že dlžobu vyrovná piatimi splátkami po 200 eur koncom každého nasledujúceho roka pri 6% ročnej úrokovej miere. Koľko eur si pán Podolník požičal?

Pojem finančnej renty

Definícia

Finančnou rentou (dôchodkom) nazývame postupnosť platieb (anuít, splátok) v rovnako veľkých časových intervaloch (perióda renty) počas určitého obdobia (doba splatnosti renty).



Obr.: Finančná renta

Klasifikácie renty - I

1. Klasifikácia renty podľa podmienok splácania:
   - renta podmienená
     - výplata je viazaná na splnenie určitých podmienok
   - renta nepodmienená
     - výplata nie je viazaná na splnenie žiadnych podmienok
2. Klasifikácia renty podľa doby splatnosti renty:
   - renta konečná
     - výplata je viazaná na konečný časový úsek
   - renta nekonečná (večná)
     - výplata nie je viazaná na časový úsek

Klasifikácie renty - II

3. Klasifikácia renty podľa dĺžky periódy renty, resp. podľa počtu splátok za rok:
   - ročná renta $p = 1$
   - polročná renta $p = 2$
   - štvrťročná renta $p = 4$
   - mesačná renta $p = 12$
   - p-termínová renta p

4. Klasifikácia renty podľa veľkosti splátok:
   - renta konštantná
     - výška splátky sa nemení
   - renta premenlivá
     - výška splátky sa mení, najčastejšie rovnomerne rastie

Klasifikácie renty - III

5. Klasifikácia renty podľa termínu splátky v časovej periόde splácania:
   - polehotná renta (ordinárna)
     - splátky na konci periódy renty
   - predlehotná renta (duálna)
     - splátky na začiatku periódy renty

6. Klasifikácia renty podľa termínu pripočítania úrokov v perióde úrokovania:
   - renta s dekurzívnym úrokom
     - úroky sa pripočítavajú na konci úrokovej periódy
   - renta s anticipatívnym úrokom
     - úroky sa pripočítavajú na začiatku úrokovej periódy

Zaradenie podľa klasifikácie

Polehotná renta s konštantnou splátkou

atribúty:

- nepodmienená
- konečná
- konštantná
- polehotná
- s počtom splátok za rok
  1. $p = 1$
  2. p ľubovoľné

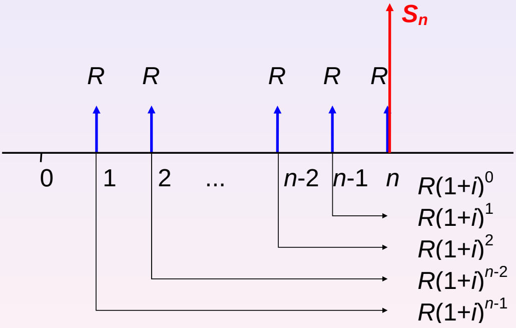
$p = 1$ - Budúca hodnota renty - Ilustrácia

Príklad:

Pán Oravec si chce našetriť na kúpu záhradky. Rozhodol sa, že na konci každého z nasledujúcich 8 rokov uloží do banky 500 eur pri 6% ročnej úrokovej miere. Koľko eur si našetrí?

$p = 1$ - Budúca hodnota renty - Definícia

Každá splátka narastie za príslušný počet periód o úroky na novú hodnotu. Súčet týchto nových hodnôt na konci doby splatnosti je budúca hodnota polehotnej renty S_n.



Obr.: Budúca hodnota renty

$p = 1$ - Budúca hodnota renty - Príklad 1

Príklad 1:

Pán Oravec si chce našetriť na kúpu záhradky. Rozhodol sa, že na konci každého z nasledujúcich 8 rokov uloží do banky 500 eur pri 6% ročnej úrokovej miere. Koľko eur si našetrí?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} n & = & 8 \\ R & = & 500 \\ i & = & 0{,}06 \\ p & = & 1 \\ m & = & 1 \\ \hline S_n & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - Výpočet budúcej hodnoty renty

$$S_n = R + R\cdot(1+i) + R\cdot(1+i)^2 + \cdots + R\cdot(1+i)^{n-2} + R\cdot(1+i)^{n-1}$$

konkrétne

$$S_8 = 500 + 500\cdot(1+0{,}06) + 500\cdot(1+0{,}06)^2 + \cdots + 500\cdot(1+0{,}06)^7$$

na pravej strane je súčet prvých $n = 8$ členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q = 1 + 0{,}06$, ktorý nahradíme výrazom $a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ $(= S_n)$

$$\begin{aligned} S_8 &= 500 \cdot \frac{(1+0{,}06)^8 - 1}{(1+0{,}06) - 1} \\ S_8 &= 500 \cdot \frac{(1+0{,}06)^8 - 1}{0{,}06} = 4\,948{,}73395 \end{aligned}$$

všeobecne

$$S_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$p = 1$ - Polehotný sporiteľ

Definícia

Polehotným sporiteľom nazývame výraz

$$s_{n\backslash i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ktorý udáva, koľkokrát sa zväčší pravidelne polehotne platená renta so splátkou $R = 1$ peňažnej jednotky za n período pri úrokovej sadzbe i za jednu periódu.

Platí teda:
$$S_n = R \cdot \underbrace{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}_{s_{n\backslash i}}$$
$$S_n = R \cdot s_{n\backslash i}$$

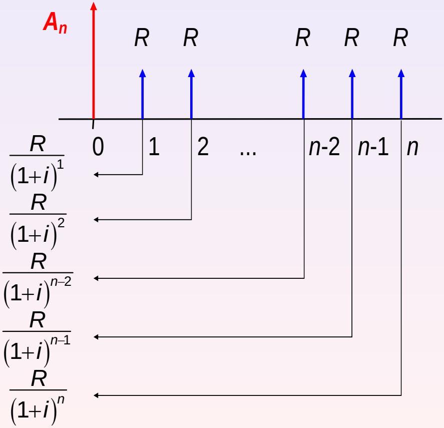
$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Ilustrácia

Príklad:

Pán Podolník sa dohodol s pánom Podhorom, že dlžobu vyrovná piatimi splátkami po 200 eur koncom každého nasledujúceho roka pri 6% ročnej úrokovej miere. Koľko eur si pán Podolník požičal?

$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Definícia

Každá splátka mala pôvodnú hodnotu. Súčet týchto pôvodných hodnôt na začiatku doby splatnosti je súčasná hodnota polehotnej renty A_n.



$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Príklad 2

Príklad 2:

Pán Podolník sa dohodol s pánom Podhorom, že dlžobu vyrovná piatimi splátkami po 200 eur koncom každého nasledujúceho roka pri 6% ročnej úrokovej miere. Koľko eur si pán Podolník požičal?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} R & = & 200 \\ i & = & 0{,}06 \\ n & = & 5 \\ p & = & 1 \\ m & = & 1 \\ \hline A_5 & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - Výpočet súčasnej hodnoty renty

$$A_n = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R}{(1+i)^n}$$

konkrétne

$$A_5 = \frac{200}{1+0{,}06} + \frac{200}{(1+0{,}06)^2} + \frac{200}{(1+0{,}06)^3} + \frac{200}{(1+0{,}06)^4} + \frac{200}{(1+0{,}06)^5}$$

súčet prvých $n = 5$ členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q = \frac{1}{1+0{,}06}$ $\left(a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = A_n\right)$

$$\begin{aligned} A_5 &= \frac{200}{1+0{,}06} \cdot \frac{\frac{1}{(1+0{,}06)^5} - 1}{\frac{1}{1+0{,}06} - 1} = \frac{200}{1+0{,}06} \cdot \frac{(1+0{,}06)^{-5} - 1}{\frac{1-1-0{,}06}{1+0{,}06}} \\ &= 200 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-5}}{0{,}06} = 842{,}47276 \end{aligned}$$

všeobecne

$$A_n = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$p = 1$ - Polehotný zásobiteľ

Definícia

Polehotným zásobiteľom nazývame výraz

$$a_{n\backslash i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ktorý udáva, prítomnú hodnotu renty so splátkou $R = 1$ peňažnej jednotky za n periód pri úrokovej sadzbe i za jednu periódu.

$$\text{Platí teda:} \quad A_n = R \cdot \underbrace{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}_{a_{n\backslash i}}$$

$$A_n = R \cdot a_{n\backslash i}$$

$p = 1$ - Vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty

Veta (vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty)

Nech A_n je súčasná a S_n budúca hodnota polehotnej renty s konštantnou splátkou pri ročnej úrokovej sadzbe i a s jednou splátkou za rok. Potom

$$S_n = A_n \cdot (1 + i)^n$$

$p = 1$ - Vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty - Príklad 3

Príklad 3:

Pán Podolník sa dohodol s pánom Podhorom, že dlžobu vyrovná piatimi splátkami po 200 eur koncom každého nasledujúceho roka pri 6% ročnej úrokovej miere. Pán Podolník nemohol zaplatiť prvú splátku a preto sa dohodli, že celý dlh splatí jednou ekvivalentnou splátkou po 5 rokoch. Určme veľkosť splátky.

Riešenie:

$$S_n = A_n \cdot (1+i)^n = 842{,}47276 \cdot (1+0{,}06)^5 = 1\ 127{,}41859$$

$p = 1$ - výška splátky - Príklad 4

Príklad 4:

Brat má sestre vyplatiť dedičský podiel 350 000 eur o 5 rokov. Koľko musí uložiť koncom každého roka na účet v banke, aby nasporil dedičský podiel pri 11% ročnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} S_n & = & 350\ 000 \\ n & = & 5 \\ i & = & 0{,}11 \\ p & = & 1 \\ m & = & 1 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - výška splátky - Príklad 4

Riešenie:

$$S_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$R = S_n \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

$$R = 350\ 000 \cdot \frac{0,11}{(1+0{,}11)^5 - 1}$$

$$R = 56\ 199{,}61$$

$p = 1$ - doba splatnosti - Príklad 5

Príklad 5:

Koľko rokov sporila Helga vkladmi 3 000 eur vždy na konci roka v banke s 2,8% ročnou úrokovou mierou, ak sa jej podarilo nasporiť 34 076,55 eur?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} S_n & = & 34\ 076,55 \\ R & = & 3\ 000 \\ i & = & 0{,}028 \\ p & = & 1 \\ m & = & 1 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - doba splatnosti - Príklad 5

Riešenie:

$$S_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$34\ 076{,}55 = 3\ 000 \cdot \frac{(1+0{,}028)^n - 1}{0{,}028}$$

$$(1+0{,}028)^n - 1 = 34\ 076, 55 \cdot \frac{0{,}028}{3\ 000}$$

$$(1+0{,}028)^n = 1 + 34\ 076{,}55 \cdot \frac{0{,}028}{3\ 000}$$

$$n = \frac{\ln(1 + 34\ 076{,}55 \cdot \frac{0{,}028}{3\ 000})}{\ln 1{,}028}$$

$$n = 10$$

$p = 1$ - doba splatnosti - Príklad 6

Príklad 6:

Ako dlho si bude môcť Karol užívať koncoročné vyberanie čiastky 4 000 eur, ak 17 000 eur, ktoré získal z dedičstva, uloží do banky so 4% ročnou úrokovou mierou?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} A_n & = & 17\,000 \\ R & = & 4\,000 \\ i & = & 0{,}04 \\ p & = & 1 \\ m & = & 1 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - doba splatnosti - Príklad 6

Riešenie:

$$\begin{aligned}
A_n &= R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\
17\ 000 &= 4\ 000 \cdot \frac{1-(1+0{,}04)^{-n}}{0{,}04} \\
1-(1+0{,}04)^{-n} &= 17\ 000 \cdot \frac{0{,}04}{4\ 000} \\
(1+0{,}04)^{-n} &= 1 - 17\ 000 \cdot \frac{0{,}04}{4\ 000} \\
n &= -\frac{\ln(1 - 17\ 000 \cdot \frac{0{,}04}{4\ 000})}{\ln 1{,}04} \\
n &= 4{,}75
\end{aligned}$$

p ľubovoľné - Budúca hodnota renty - Ilustrácia

Príklad:

Koľko sa nám podarí našetriť za tri roky, ak ukladáme na účet v banke polehotne 150 eur štvrťročne pri 6% nominálnej úrokovej miere a polročnom úrokovaní?

p ľubovoľné - Terminológia a označenie

Použité skratky:

A_n	súčasná hodnota renty
S_n	budúca hodnota renty
n	doba splatnosti renty
R	splátka (anuita)
p	počet splátok za rok
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok
i	ročná úroková sadzba, ak $m = 1$
j	nominálna úroková sadzba, ak $m > 1$

p ľubovoľné - Budúca hodnota renty - Ilustrácia

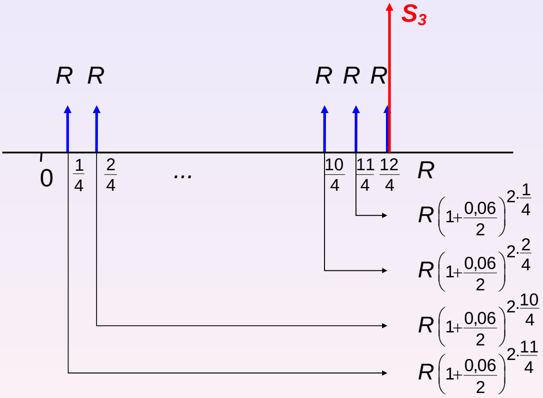
Príklad 7:

Koľko sa nám podarí našetriť za tri roky, ak ukladáme na účet v banke 150 eur štvrťročne pri 6% nominálnej úrokovej miere a polročnom úrokovaní?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} R & = & 150 \\ j & = & 0{,}06 \\ p & = & 4 \\ m & = & 2 \\ n & = & 3 \\ \hline S_n & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - Budúca hodnota renty



Obr.: Budúca hodnota renty

p ľubovoľné - Výpočet budúcej hodnoty renty

$$S_n = R + R\left[(1+\tfrac{j}{m})^m\right]^{\frac{1}{p}} + R\left[(1+\tfrac{j}{m})^m\right]^{\frac{2}{p}} + \cdots + R\left[(1+\tfrac{j}{m})^m\right]^{n-\frac{1}{p}}$$

konkrétne

$$S_3 = 150 + 150\left[(1+\frac{0{,}06}{2})^2\right]^{\frac{1}{4}} + 150\left[(1+\frac{0{,}06}{2})^2\right]^{\frac{2}{4}} + \cdots + 150\left[(1+\frac{0{,}06}{2})^2\right]^{\frac{11}{4}}$$

súčet prvých $np = 12$ členov geometrickej postupnosti

s kvocientom $q = \left[(1+\frac{0{,}06}{2})^2\right]^{\frac{1}{4}} = \left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{\frac{2}{4}}$ $\left(a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = S_n\right)$

$$S_3 = 150 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{\frac{2}{4}\cdot 12} - 1}{\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{\frac{2}{4}} - 1} = 1\ 954{,}96934$$

všeobecne

$$S_n = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

p ľubovoľné - Výpočet budúcej hodnoty renty - Príklad 8

Príklad 8:

Počas desiatich rokov si budeme mesačne polehotne ukladať 15 eur pri 10% nominálnej úrokovej miere a štvrťročnom úrokovaní. Akú sumu budeme mať na konte po poslednej splátke?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} R & = & 15 \\ j & = & 0{,}1 \\ p & = & 12 \\ m & = & 4 \\ n & = & 10 \\ \hline S_{10} & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - Výpočet budúcej hodnoty renty - Príklad 8

Riešenie:

$$S_n = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$S_{10} = 15 \cdot \frac{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot 10} - 1}{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1}$$

$$S_{10} = 3\ 058{,}25217$$

p ľubovoľné - Súčasná hodnota renty - Ilustrácia

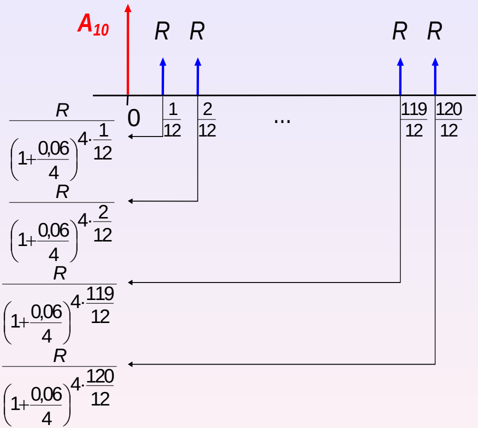
Príklad 9:

Koľko si budeme môcť mesačne polehotne vyberať počas nasledujúcich desiatich rokov z našetreného kapitálu pri tých istých podmienkach úrokovania?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} A_{10} & = & 3058{,}25217 \\ j & = & 0{,}1 \\ p & = & 12 \\ m & = & 4 \\ n & = & 10 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - Súčasná hodnota renty



Obr.: Súčasná hodnota renty

p ľubovoľné - Výpočet súčasnej hodnoty renty

$$A_{10}=\frac{R}{\left[\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^4\right]^{\frac{1}{12}}}+\frac{R}{\left[\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^4\right]^{\frac{2}{12}}}+\cdots+\frac{R}{\left[\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^4\right]^{\frac{119}{12}}}+\frac{R}{\left[\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^4\right]^{\frac{120}{12}}}$$

súčet prvých np=120 členov geometrickej postupnosti s kvocientom

$$q=\frac{1}{\left[\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^4\right]^{\frac{1}{12}}}=\frac{1}{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}}}\ \left(a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}=A_n\right)$$

$$A_{10} = \frac{R}{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}}}\cdot\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}\cdot 120}}-1}{\frac{1}{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}}}-1}=R\cdot\frac{\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{-\frac{4}{12}\cdot 120}-1}{1-\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{\frac{4}{12}}}$$

všeobecne

$$A_n = R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

p ľubovoľné - Výpočet súčasnej hodnoty renty

$$A_{10} = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{-\frac{4}{12} \cdot 120}}{\left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1}$$

$$3058{,}25217 = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{-\frac{4}{12} \cdot 120}}{\left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1}$$

$$R = 3058{,}25217 \cdot \frac{1{,}025^{\frac{1}{3}} - 1}{1 - 1{,}025^{-40}}$$

$$R = 40{,}27596$$

p ľubovoľné - Vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty

Veta (vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty)

Nech A_n je súčasná a S_n budúca hodnota polehotnej renty s konštantnou splátkou pri nominálnej úrokovej sadzbe j s počtom konverzií m a s počtom splátok p za rok. Potom

$$S_n = A_n \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}$$

p ľubovoľné - Vzťah medzi súčasnou a budúcou hodnotou renty

Príklad 10:

Ak si našetrenú sumu 3 058,25217 z predchádzajúceho príkladu nebudeme postupne vyberať, ale vyberieme si ju naraz po uplynutí nasledujúcich desiatich rokov, aká bude výška sumy, ak sa úroky budú pripisovať polročne?

Riešenie:

$$S_n = A_n \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} = 3\ 058{,}25217 \cdot \left(1+\frac{0{,}1}{2}\right)^{2 \cdot 10} = 8\ 114{,}45346$$

p ľubovoľné - výška splátky - Príklad 11

Príklad 11:

Za 8 rokov sa podarilo Petre nasporiť 13 204,61 eur v banke pri 3,4% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení. Koľko eur vkladala do banky koncom každého mesiaca?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} S_n & = & 13\,204{,}61 \\ n & = & 8 \\ j & = & 0{,}034 \\ p & = & 12 \\ m & = & 2 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - výška splátky - Príklad 11

Riešenie:

$$S_n = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$R = S_n \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}$$

$$R = 13\ 204{,}61 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}034}{2}\right)^{\frac{2}{12}} - 1}{\left(1+\frac{0{,}034}{2}\right)^{2 \cdot 8} - 1}$$

$$R = 120$$

p ľubovoľné - doba splatnosti - Príklad 12

Príklad 12:

Koľko celých rokov bude môcť Karol vyberať koncom každého mesiaca po 200 eur z banky, v ktorej sa mesačne úročí jeho začiatočný vklad 20 000 eur pri 1,5% nominálnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} A_n & = & 20\,000 \\ R & = & 200 \\ j & = & 0{,}015 \\ p & = & 12 \\ m & = & 12 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - doba splatnosti - Príklad 12

Riešenie:

$$A_n = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$20\ 000 = 200 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{-12\cdot n}}{\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{\frac{12}{12}}-1}$$

$$100 = \frac{1-\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{-12\cdot n}}{\frac{0{,}015}{12}}$$

$$1-\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{-12\cdot n} = 100 \cdot \frac{0{,}015}{12}$$

p ľubovoľné - doba splatnosti - Príklad 12

$$1-\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{-12\cdot n} = 100\cdot\frac{0{,}015}{12}$$

$$\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{-12\cdot n} = 1-100\cdot\frac{0{,}015}{12}$$

$$-12n\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right) = \ln(1-100\cdot\frac{0{,}015}{12})$$

$$n = -\frac{\ln(1-100\cdot\frac{0{,}015}{12})}{12\ln\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)}$$

$$n = 8{,}9$$

Zaradenie podľa klasifikácie

Polehotná renta s rovnomerne rastúcou splátkou

atribúty:

- nepodmienená
- konečná
- polehotná
- ročná, t. j. s počtom splátok za rok $p = 1$
- s rovnomerne rastúcou splátkou, t. j.
  výška splátky sa zvyšuje pravidelne s ročnou sadzbou α, t. j.
  postupnosť splátok má tvar:

  R, $R(1+\alpha)$, $R(1+\alpha)^2$, ..., $R(1+\alpha)^{n-1}$

Budúca hodnota renty - Ilustrácia

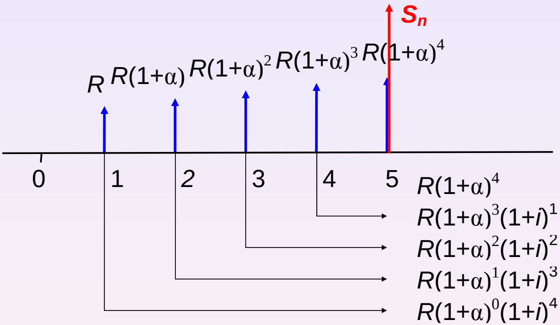
Príklad:

Na konci každého roka počas 5 rokov budeme vkladať do banky sumu, ktorej hodnotu budeme každoročne zvyšovať o 10 %. Prvý vklad bude mať výšku 1 500 eur. Banka poskytuje 5% ročnú úrokovú mieru. Akú sumu našetríme?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} R & = & 1\ 500 \\ n & = & 5 \\ i & = & 0{,}05 \\ \alpha & = & 0{,}1 \\ \hline S_5 & = & ? \end{array}$$

Budúca hodnota renty



Obr.: Budúca hodnota renty

Výpočet budúcej hodnoty renty

$$\begin{aligned} S_5 &= 1\,500(1+0{,}1)^4 + 1\,500(1+0{,}1)^3(1+0{,}05)+ \\ &\quad +1\,500(1+0{,}1)^2(1+0{,}05)^2 + 1\,500(1+0{,}1)(1+0{,}05)^3+ \\ &\quad +1\,500(1+0{,}05)^4 \end{aligned}$$

súčet prvých $n=5$ členov geometrickej postupnosti s kvocientom $q=\frac{1+0{,}05}{1+0{,}1}$ nahradíme výrazom $a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

$$\begin{aligned} S_5 &= 1\,500(1+0{,}1)^4\frac{\left(\frac{1+0{,}05}{1+0{,}1}\right)^5-1}{\left(\frac{1+0{,}05}{1+0{,}1}\right)-1} = 1\,500(1+0{,}1)^4\frac{\left(\frac{1+0{,}05}{1+0{,}1}\right)^5-1}{\frac{1+0{,}05-1-0{,}1}{1+0{,}1}} = \\ &= 1\,500(1+0{,}1)^5\cdot\frac{\left(\frac{1+0{,}05}{1+0{,}1}\right)^5-1}{0{,}05-0{,}1} = \\ &= 1\,500(1+0{,}1)^5\cdot\frac{(1+0{,}05)^5-(1+0{,}1)^5}{(1+0{,}1)^5}\cdot\frac{1}{0{,}05-0{,}1} = \\ &= 1\,500(1+0{,}05)^5\cdot\left[1-\left(\frac{1+0{,}1}{1+0{,}05}\right)^5\right]\cdot\frac{1}{0{,}05-0{,}1} = 10\,026{,}853125 \end{aligned}$$

Budúca a súčasná hodnota renty

všeobecne

- budúca hodnota renty

$$S_n = R(1+i)^n \left[1 - \left(\frac{1+\alpha}{1+i}\right)^n\right] \frac{1}{i-\alpha}$$

$$S_n = A_n(1+i)^n \qquad \Longrightarrow \qquad A_n = \frac{S_n}{(1+i)^n}$$

- súčasná hodnota renty

$$A_n = R\left[1 - \left(\frac{1+\alpha}{1+i}\right)^n\right] \frac{1}{i-\alpha}$$

Súčasná hodnota renty - Príklad

Príklad:

Rodičia uložili do banky sumu 8 000 eur pri 4% ročnej úrokovej miere, aby ich syn mohol po dobu šiestich rokov dostať na konci roka sumu, ktorá sa bude každoročne zvyšovať o 5 %. Aká bola výška prvej splátky, ktorú dostal?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} A_6 & = & 8\ 000 \\ n & = & 6 \\ i & = & 0{,}04 \\ \alpha & = & 0{,}05 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

Súčasná hodnota renty - Príklad

Riešenie:

$$A_n = R\left[1-\left(\frac{1+\alpha}{1+i}\right)^n\right]\frac{1}{i-\alpha}$$

$$R = \frac{A_n \cdot (i-\alpha)}{\left[1-\left(\frac{1+\alpha}{1+i}\right)^n\right]}$$

$$R = \frac{8\ 000 \cdot (0{,}04 - 0{,}05)}{\left[1-\left(\frac{1+0{,}05}{1+0{,}04}\right)^6\right]}$$

$$R = 1\ 353{,}70546$$

Zaradenie podľa klasifikácie

Predlehotná renta s konštantnou splátkou

atribúty:

- nepodmienená
- konečná
- konštantná
- **predlehotná**
- s počtom splátok za rok
  1. $p = 1$
  2. p ľubovoľné

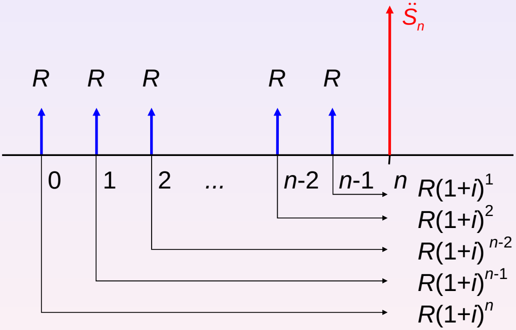
$p = 1$ - Budúca hodnota renty - Ilustrácia

Príklad:

Juraj si vždy **na začiatku** roka počas 8 rokov ukladal čiastku 3 000 eur do banky s 2,5% ročnou úrokovou mierou. Akú sumu našetril?

$p = 1$ - Budúca hodnota renty - Definícia

Každá splátka narastie za príslušný počet periód o úroky na novú hodnotu. Súčet týchto nových hodnôt na konci doby splatnosti je budúca hodnota predlehotnej renty $\ddot{S}_n$.



Obr.: Budúca hodnota renty

$p = 1$ - Výpočet budúcej hodnoty renty

Pomocou budúcej hodnoty polehotnej renty S_n určíme budúcu hodnotu predlehotnej renty $\ddot{S}_n$

$$\begin{aligned}
\ddot{S}_n &= R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n = \\
&= (1+i) \cdot \underbrace{\left[R + R(1+i) + \cdots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}\right]}_{S_n} = \\
&= (1+i) \cdot S_n
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\ddot{S}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$p = 1$ - Predlehotný sporiteľ

Definícia

Predlehotným sporiteľom nazývame výraz

$$\ddot{s}_{n\backslash i} = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

ktorý udáva, koľkokrát sa zväčší pravidelne predlehotne platená renta so splátkou $R = 1$ peňažnej jednotky za n periód pri úrokovej sadzbe i za jednu periódu.

Platí teda: $$\ddot{S}_n = R \cdot \underbrace{(1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}_{\ddot{s}_{n\backslash i}}$$

$$\ddot{S}_n = R \cdot \ddot{s}_{n\backslash i}$$

$p = 1$ - Budúca hodnota renty - Príklad 1

Príklad 1:

Juraj si vždy **na začiatku** roka počas 8 rokov ukladal čiastku 3 000 eur do banky s 2,5% ročnou úrokovou mierou. Akú sumu našetril?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} R & = & 3\ 000 \\ i & = & 0{,}025 \\ n & = & 8 \\ \hline \ddot{S}_n & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - Budúca hodnota renty - Príklad 1

Riešenie:

$$\ddot{S}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\ddot{S}_n = 3\ 000 \cdot (1+0{,}025) \cdot \frac{(1+0{,}025)^8 - 1}{0{,}025}$$

$$\ddot{S}_n = 26\ 863{,}56$$

$p = 1$ - výška splátky - Príklad 2

Príklad 2:

Za 5 rokov sa podarilo Zuzane nasporiť 13 140,82 eur v banke s 2,5% ročnou úrokovou mierou. Koľko eur vkladala do banky začiatkom každého roka?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} \ddot{S}_n & = & 13\,140{,}82 \\ i & = & 0{,}025 \\ n & = & 5 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - výška splátky - Príklad 2

Riešenie:

$$\ddot{S}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$R = \ddot{S}_n \cdot \frac{i}{(1+i) \cdot [(1+i)^n - 1]}$$

$$R = 13\ 140{,}82 \cdot \frac{0{,}025}{(1+0{,}025) \cdot [(1+0{,}025)^5 - 1]}$$

$$R = 2\ 439{,}02$$

$p = 1$ - doba splatnosti renty - Príklad 3

Príklad 3:

Rozhodli sme sa, že na začiatku každého z nasledujúcich rokov uložíme do banky sumu 5 000 eur pri 4% ročnej úrokovej miere. Chceme ušetriť 28 200 eur. Koľko vkladov musíme urobiť?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} R & = & 5\ 000 \\ i & = & 0{,}04 \\ \ddot{S}_n & = & 28\ 200 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - doba splatnosti renty - Príklad 3

Riešenie:

$$\ddot{S}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$28\ 200 = 5\ 000 \cdot (1+0{,}04) \cdot \frac{(1+0{,}04)^n - 1}{0{,}04}$$

$$1{,}04^n = \frac{28\ 000 \cdot 0{,}04}{5\ 000 \cdot 1{,}04} + 1$$

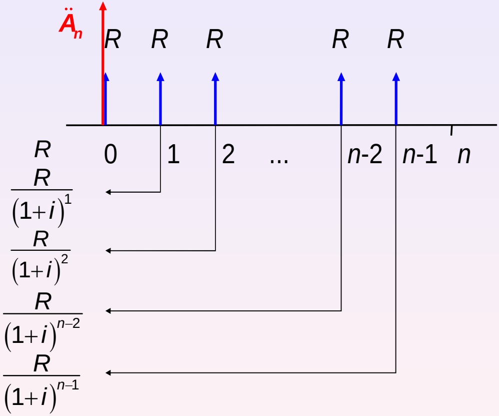
$$\ln 1{,}04^n = \ln 1{,}21538$$

$$n = \frac{\ln 1{,}21538}{\ln 1{,}04}$$

$$n = 4{,}97341$$

$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Definícia

Každá splátka mala pôvodnú hodnotu. Súčet týchto pôvodných hodnôt na začiatku doby splatnosti je súčasná hodnota predlehotnej renty $\ddot{A}_n$.



Obr.: Súčasná hodnota renty

$p = 1$ - Výpočet súčasnej hodnoty renty

Analogicky pomocou súčasnej hodnoty polehotnej renty A_n určíme súčasnú hodnotu predlehotnej renty $\ddot{A}_n$

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_n &= R + \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-2}} + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} = \\
&= (1+i) \cdot \underbrace{\left[\frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R}{(1+i)^n}\right]}_{A_n} = \\
&= (1+i) \cdot A_n
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\ddot{A}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$p = 1$ - Predlehotný zásobiteľ

Definícia

Predlehotným zásobiteľom nazývame výraz

$$\ddot{a}_{n\backslash i} = (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ktorý udáva, prítomnú hodnotu renty so splátkou $R = 1$ peňažnej jednotky za n periód pri úrokovej sadzbe i za jednu periódu.

Platí teda:
$$\ddot{A}_n = R \cdot \underbrace{(1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}_{\ddot{a}_{n\backslash i}}$$

$$\ddot{A}_n = R \cdot \ddot{a}_{n\backslash i}$$

$p = 1$ - súčasná hodnota renty - Príklad 4

Príklad 4:

Koľko eur vložil Mojmír do banky, ak počas 10 rokov vždy na začiatku roka až do vyčerpania účtu vyberal z banky s 2,5% ročnou úrokovou mierou čiastku 4 458,88 eur?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} R & = & 4\ 458{,}88 \\ i & = & 0{,}025 \\ n & = & 10 \\ \hline \ddot{A}_n & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - súčasná hodnota renty - Príklad 4

Riešenie:

$$\ddot{A}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\ddot{A}_n = 4\ 458{,}88 \cdot (1+0{,}025) \cdot \frac{1-(1+0{,}025)^{-10}}{0{,}025}$$

$$\ddot{A}_n = 40\ 000$$

$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Príklad 5

Príklad 5:

Pôžičku na byt vo výške 240 000 eur treba splatiť 30 rovnakými splátkami pri 5% ročnej úrokovej miere. Nájdime výšku ročnej splátky, ak sa tieto platia

1. predlehotne,
2. polehotne.

Zápis:

$$1. \quad \begin{array}{rcl} \ddot{A}_n & = & 240\,000 \\ n & = & 30 \\ i & = & 0{,}05 \\ \hline R & = & ? \end{array} \qquad 2. \quad \begin{array}{rcl} A_n & = & 240\,000 \\ n & = & 30 \\ i & = & 0{,}05 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Príklad 5

Riešenie:

$$\ddot{A}_n = R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$R = \frac{\ddot{A}_n}{1+i} \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$R = \frac{240\ 000}{1+0{,}05} \cdot \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-30}}$$

$$R = 14\ 868{,}89945$$

$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Príklad 5

Riešenie:

$$A_n = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$R = A_n \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

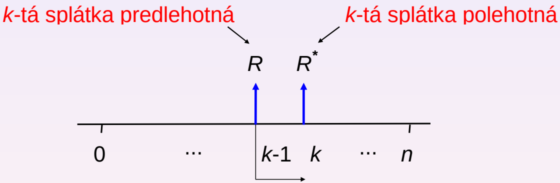
$$R = 240\ 000 \cdot \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-30}}$$

$$R = 15\ 612{,}34442$$

Vzťah medzi polehotnou a predlehotnou splátkou

Každá predlehotná splátka úročí jednu periódu a stáva sa splátkou polehotnou

$$R^\star = (1 + i) \cdot R$$



Obr.: Vzťah medzi polehotnou a predlehotnou splátkou

$p = 1$ - doba splatnosti renty - Príklad 6

Príklad 6:

Na koľko rokov vystačí Lívii suma 22 260,92 eur vložená do banky s 3,2% ročnou úrokovou mierou, keď si chce na začiatku každého roka vyberať 3 600 eur?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} R & = & 3\,600 \\ i & = & 0{,}032 \\ \ddot{A}_n & = & 22\,260{,}92 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - doba splatnosti renty - Príklad 6

Riešenie:

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_n &= R \cdot (1+i) \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\
22\ 260{,}92 &= 3\ 600 \cdot (1+0{,}032) \cdot \frac{1-(1+0{,}032)^{-n}}{0{,}032} \\
22\ 260{,}92 \cdot \frac{0{,}032}{3\ 600 \cdot 1{,}032} &= 1 - 1{,}032^{-n} \\
1{,}032^{-n} &= 1 - 22\ 260{,}92 \cdot \frac{0{,}032}{3\ 600 \cdot 1{,}032} \\
\ln 1{,}032^{-n} &= \ln 0{,}80826 \\
n &= -\frac{\ln 0{,}80826}{\ln 1{,}032} \\
n &= 6{,}758
\end{aligned}$$

p ľubovoľné - Terminológia a označenie

Použité skratky:

$\ddot{A}_n$	súčasná hodnota renty
$\ddot{S}_n$	budúca hodnota renty
n	doba splatnosti renty
R	splátka (anuita)
p	počet splátok za rok
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok
i	ročná úroková sadzba, ak $m = 1$
j	nominálna úroková sadzba, ak $m > 1$

p ľubovoľné - Budúca a súčasná hodnota renty

- budúca hodnota renty

$$\ddot{S}_n = R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

- súčasná hodnota renty

$$\ddot{A}_n = R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{1 - \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

p ľubovoľné - Budúca hodnota renty - Príklad 7

Príklad 7:

Počas nasledujúcich šiestich rokov uložíme v banke na začiatku polroka 3 000 eur pri 4% nominálnej úrokovej miere a polročnom úrokovaní. Akú sumu našetríme?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} R & = & 3\,000 \\ j & = & 0{,}04 \\ p & = & 2 \\ m & = & 2 \\ n & = & 6 \\ \hline \ddot{S}_6 & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - Budúca hodnota renty - Príklad 7

Riešenie:

$$\ddot{S}_n = R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$\ddot{S}_6 = 3\ 000 \cdot \left(1+\frac{0{,}04}{2}\right)^{\frac{2}{2}} \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}04}{2}\right)^{2 \cdot 6} - 1}{\left(1+\frac{0{,}04}{2}\right)^{\frac{2}{2}} - 1}$$

$$\ddot{S}_6 = 3\ 000 \cdot 1{,}02 \cdot \frac{1{,}02^{12} - 1}{0{,}02}$$

$$\ddot{S}_6 = 41\ 040{,}99457$$

p ľubovoľné - výška splátky - Príklad 8

Príklad 8:

Za 8 rokov sa podarilo Petre nasporiť 13 204,61 eur v banke pri 3,4% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení. Koľko eur vkladala do banky začiatkom každého mesiaca?

Zápis:

$$
\begin{array}{lcl}
\ddot{S}_8 & = & 13\,204{,}61 \\
j & = & 0{,}034 \\
p & = & 12 \\
m & = & 2 \\
n & = & 8 \\
\hline
R & = & ?
\end{array}
$$

p ľubovoľné - výška splátky - Príklad 8

Riešenie:

$$\ddot{S}_n = R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$R = \ddot{S}_n \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1\right]}$$

$$R = 13\ 204{,}61 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}034}{2}\right)^{\frac{2}{12}} - 1}{\left(1+\frac{0{,}034}{2}\right)^{\frac{2}{12}} \cdot \left[\left(1+\frac{0{,}034}{2}\right)^{2 \cdot 8} - 1\right]}$$

$$R = 119{,}66$$

p ľubovoľné - doba splatnosti renty - Príklad 9

Príklad 9:

Viktor si z banky na konci sporenia vybral 13 241,76 eur.
Na začiatku každého mesiaca si sporil sumou 120 eur, pričom nominálna úroková sadzba bola 0,034 a banka úročila vklady polročne. Koľko vkladov urobil?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} \ddot{S}_n & = & 13\,241{,}76 \\ p & = & 12 \\ R & = & 120 \\ j & = & 0{,}034 \\ m & = & 2 \\ \hline n \cdot p & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - doba splatnosti renty - Príklad 9

Riešenie:

$$\ddot{S}_n = R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$13\ 241{,}76 = 120 \cdot \left(1+\frac{0{,}034}{2}\right)^{\frac{2}{12}} \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}034}{2}\right)^{2\cdot n} - 1}{\left(1+\frac{0{,}034}{2}\right)^{\frac{2}{12}} - 1}$$

$$1{,}017^{2n} - 1 = 13\ 241{,}76 \cdot \frac{1{,}017^{\frac{1}{6}} - 1}{120 \cdot 1{,}017^{\frac{1}{6}}}$$

$$1{,}017^{2n} = 1{,}3095897$$

$$\ln 1{,}017^{2n} = \ln 1{,}3095897$$

$$n = \frac{\ln 1{,}3095897}{2 \cdot \ln 1{,}017}$$

$$n = 8 \quad \Longrightarrow \quad n \cdot p = 8 \cdot 12 = 96 \quad \text{vkladov}$$

p ľubovoľné - súčasná hodnota renty - Príklad 10

Príklad 10:

Jela bude splácať pôžičku s 10% nominálnou úrokovou mierou a mesačným úročením 7 rokov vždy začiatkom štvrťroka sumou vo výške 3 515,3814 eur. Akú sumu si požičala?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} R & = & 3\,515{,}3814 \\ j & = & 0{,}1 \\ p & = & 4 \\ m & = & 12 \\ n & = & 7 \\ \hline \ddot{A}_7 & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - súčasná hodnota renty - Príklad 10

Riešenie:

$$\ddot{A}_n = R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$\ddot{A}_7 = 3\ 515{,}3814 \cdot \left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{\frac{12}{4}} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{-12 \cdot 7}}{\left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1}$$

$$\ddot{A}_7 = 3\ 515{,}3814 \cdot \left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{3} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{-84}}{\left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{3}-1}$$

$$\ddot{A}_7 = 71\ 764{,}62$$

p ľubovoľné - výška splátky - Príklad 11

Príklad 11:

Pavol vložil do banky pri 3,1% nominálnej úrokovej miere a polročnom úročení 25 000 eur z výhry. Akú čiastku môže v priebehu nasledujúcich 10 rokov vyberať na začiatku každého štvrťroka až do vyčerpania účtu?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} \ddot{A}_{10} & = & 25\,000 \\ j & = & 0{,}031 \\ p & = & 4 \\ m & = & 2 \\ n & = & 10 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - výška splátky - Príklad 11

Riešenie:

$$\ddot{A}_n = R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$R = \ddot{A}_n \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \left[1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}\right]}$$

$$R = 25\ 000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}031}{2}\right)^{\frac{2}{4}}-1}{\left(1+\frac{0{,}031}{2}\right)^{\frac{2}{4}} \cdot \left[1-\left(1+\frac{0{,}031}{2}\right)^{-2\cdot 10}\right]}$$

$$R = 717{,}81$$

p ľubovoľné - doba splatnosti renty - Príklad 12

Príklad 12:

Koľko celých rokov bude môcť Karol vyberať začiatkom každého mesiaca po 200 eur z banky, v ktorej sa mesačne úročí jeho začiatočný vklad 20 025 eur pri 1,5% nominálnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} \ddot{A}_n & = & 20\,025 \\ p & = & 12 \\ R & = & 200 \\ j & = & 0{,}015 \\ m & = & 12 \\ \hline n & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - doba splatnosti renty - Príklad 12

Riešenie:

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_n &= R \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \\
20\ 025 &= 200 \cdot \left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{\frac{12}{12}} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{-12\cdot n}}{\left(1+\frac{0{,}015}{12}\right)^{\frac{12}{12}}-1} \\
20\ 025 &= 200 \cdot 1{,}00125 \cdot \frac{1-1{,}00125^{-12\cdot n}}{0{,}00125} \\
1-1{,}00125^{-12\cdot n} &= 20\ 025 \cdot \frac{0{,}00125}{200 \cdot 1{,}00125} \\
1{,}00125^{-12\cdot n} &= 0{,}875 \\
-12n \ln 1{,}00125 &= \ln 0{,}875 \\
n &= -\frac{\ln 0{,}875}{12 \cdot \ln 1{,}00125} = 8,908 \implies 8 \text{ celých rokov}
\end{aligned}$$

Zaradenie podľa klasifikácie

Odložená renta s konštantnou splátkou

atribúty:

- nepodmienená
- konečná
- konštantná
- s počtom splátok za rok
    1. $p = 1$
    2. p ľubovoľné

$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Ilustrácia

Príklad:

Získali sme pôžičku vo výške 10 000 eur pri 6% ročnej úrokovej miere. Chceme ju splatiť desiatimi rovnakými splátkami vždy na konci roka. Prvá splátka pôžičky bude zaplatená na konci 6. roka. Vypočítajme veľkosť splátky.

Odložená renta - Definícia

Definícia

Odloženou rentou nazývame takú rentu, pri ktorej sa prvá splátka uskutoční až po určitom čase t ($t > \frac{1}{p}$, t. j. t je väčšie ako perióda renty) od začiatku renty. Čas t nazývame čakacou dobou.

Terminológia a označenie

Použité skratky:

${}_tA_n$	súčasná hodnota renty
${}_tS_n$	budúca hodnota renty
t	**čakacia doba renty**
n	doba splatnosti renty
R	splátka (anuita)
p	počet splátok za rok
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok
i	ročná úroková sadzba, ak $m = 1$
j	nominálna úroková sadzba, ak $m > 1$

$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Príklad 1

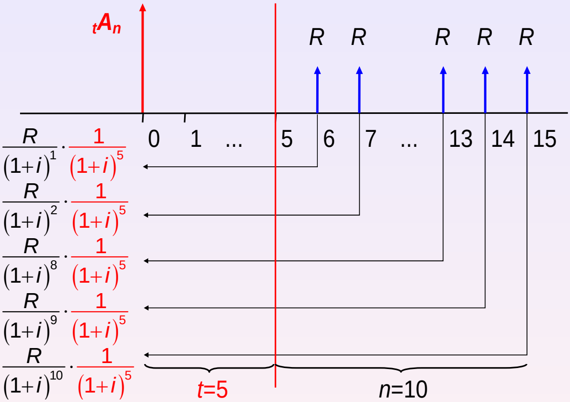
Príklad 1:

Získali sme pôžičku vo výške 10 000 eur pri 6% ročnej úrokovej miere. Chceme ju splatiť desiatimi rovnakými splátkami vždy na konci roka. Prvá splátka pôžičky bude zaplatená na konci 6. roka. Vypočítajme veľkosť splátky.

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} {}_5A_{10} & = & 10\,000 \\ i & = & 0{,}06 \\ n & = & 10 \\ t & = & 5 \\ \hline R & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Definícia



Obr.: Súčasná hodnota odloženej polehotnej renty $_tA_n$

$p = 1$ - Výpočet súčasnej hodnoty renty

Pomocou súčasnej hodnoty polehotnej renty A_n určíme súčasnú hodnotu odloženej polehotnej renty ${}_tA_n$

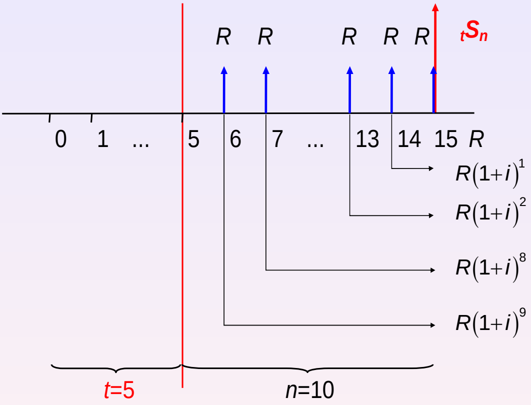
$$\begin{aligned}
{}_5A_{10} &= \frac{R}{1+i}\cdot\frac{1}{(1+i)^5}+\frac{R}{(1+i)^2}\cdot\frac{1}{(1+i)^5}+\cdots+ \\
&\quad +\frac{R}{(1+i)^9}\cdot\frac{1}{(1+i)^5}+\frac{R}{(1+i)^{10}}\cdot\frac{1}{(1+i)^5}= \\
&= \frac{1}{(1+i)^5}\cdot\underbrace{\left[\frac{R}{1+i}+\frac{R}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{R}{(1+i)^9}+\frac{R}{(1+i)^{10}}\right]}_{A_{10}}= \\
&= (1+i)^{-5}\cdot A_{10}=(1+i)^{-5}\cdot R\cdot\frac{1-(1+i)^{-10}}{i} \\
{}_tA_n &= (1+i)^{-t}\cdot R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}
\end{aligned}$$

$p = 1$ - Súčasná hodnota renty - Príklad 1

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
{}_tA_n &= (1+i)^{-t} \cdot R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \\
R &= {}_tA_n \cdot (1+i)^{t} \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \\
R &= 10\ 000 \cdot (1+0{,}06)^{5} \cdot \frac{0{,}06}{1-(1+0{,}06)^{-10}} \\
R &= 1\ 818{,}21977
\end{aligned}
$$

$p = 1$ - Budúca hodnota renty - Definícia



Obr.: Budúca hodnota odloženej polehotnej renty ${}_tS_n$

$p = 1$ - Výpočet budúcej hodnoty renty

Odklad renty nemá vplyv na jej budúcu hodnotu

$$ {}_tS_n = S_n $$

$$ \Longrightarrow $$

$$ {}_tS_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} $$

p ľubovoľné - Budúca a súčasná hodnota renty

- budúca hodnota renty

$$ {}_tS_n = S_n = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} $$

- súčasná hodnota renty

$$ {}_tA_n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m \cdot t} \cdot A_n = $$

$$ = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m \cdot t} \cdot R \cdot \frac{1 - \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} $$

p ľubovoľné - Súčasná hodnota renty - Príklad 2

Príklad 2:

Koľko si budeme môcť mesačne polehotne vyberať po dobu desiatich rokov z kapitálu vo výške 3 058,25217 eur pri 10% nominálnej úrokovej miere, ak sa úroky pripisujú štvrťročne a prvý výber sa má realizovať o 2 roky a 1 mesiac?

Zápis:

$$
\begin{array}{lcl}
{}_2A_{10} & = & 3\ 058{,}25217 \\
j & = & 0{,}1 \\
n & = & 10 \\
t & = & 2 \\
p & = & 12 \\
m & = & 4 \\
\hline
R & = & ?
\end{array}
$$

p ľubovoľné - Súčasná hodnota renty - Príklad 2

Riešenie:

$$ {}_tA_n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot t} \cdot R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} $$

$$ R = {}_tA_n \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot t} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}} $$

$$ R = 3\ 058{,}25217 \cdot 1{,}025^{8} \cdot \frac{1{,}025^{\frac{4}{12}}-1}{1-1{,}025^{-4\cdot 10}} $$

$$ R = 49{,}07234 $$

Prerušená renta - Príklad 3

Príklad 3:

Peter sa dohodol s bankou, že pôžičku na štúdium začne splácať 5 a 1/4 roka po získaní pôžičky štvrťročnými splátkami vo výške 100 eur. 11 rokov po získaní pôžičky nebol schopný v splátkach pokračovať. Obnovil ich 12 rokov po získaní pôžičky polročnými splátkami na konci polroka vo výške 200 eur a štúdium splatil na konci 16. roka. Banka má mesačné úrokovanie s nominálnou úrokovou mierou 3 %. Vypočítajme výšku pôžičky a jej hodnotu na konci 16. roku.

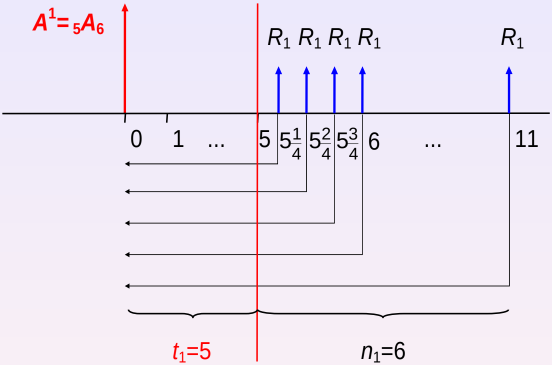
Prerušená renta - Definícia

Definícia

Prerušenou rentou nazývame takú rentu, pri ktorej je medzi niektorými splátkami renty čakacia doba dlhšia ako je perióda renty.

V princípe sa jedná o súčet odložených rent.

Súčasná hodnota - 1. časť



Obr.: Súčasná hodnota prerušenej renty - 1. časť

Súčasná hodnota - 1. časť

Zápis:

$$
\begin{array}{lcl}
R_1 & = & 100 \\
p_1 & = & 4 \\
t_1 & = & 5 \\
n_1 & = & 6 \\
j & = & 0{,}03 \\
m & = & 12 \\
\hline
{}_5A_6 & = & ?
\end{array}
$$

Súčasná hodnota - 1. časť

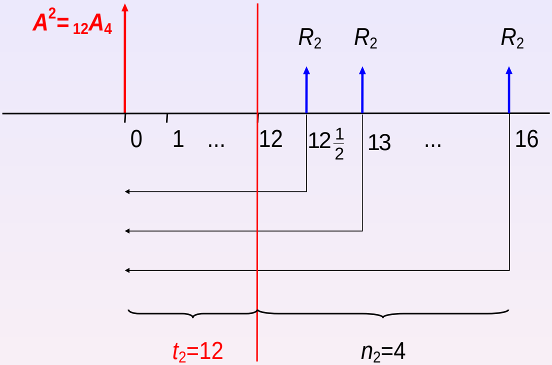
Riešenie:

$$ {}_tA_n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot t} \cdot R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} $$

$$ {}_5A_6 = \left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{-12\cdot 5} \cdot 100 \cdot \frac{1-\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{-12\cdot 6}}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1} = A^1 $$

$$ A^1 = 1\ 883{,}94280 $$

Súčasná hodnota - 2. časť



Obr.: Súčasná hodnota prerušenej renty - 2. časť

Súčasná hodnota - 2. časť

Zápis:

$$
\begin{array}{lcl}
R_2 & = & 200 \\
p_2 & = & 2 \\
t_2 & = & 12 \\
n_2 & = & 4 \\
j & = & 0{,}03 \\
m & = & 12 \\
\hline
{}_{12}A_4 & = & ?
\end{array}
$$

Súčasná hodnota - 2. časť

Riešenie:

$$_{t}A_{n} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot t}\cdot R\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

$$_{12}A_{4} = \left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{-12\cdot 12}\cdot 200\cdot\frac{1-\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{-12\cdot 4}}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{\frac{12}{2}}-1} = A^{2}$$

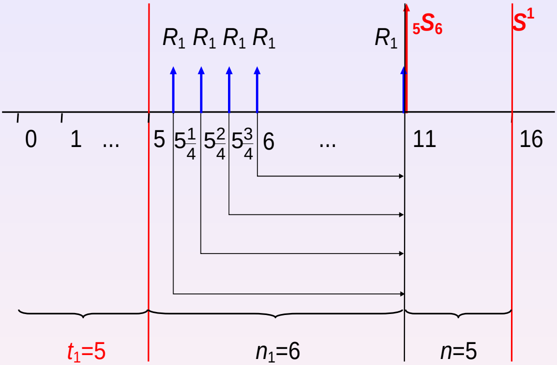
$$A^{2} = 1\ 044{,}59175$$

Súčasná hodnota

Riešenie:

$$A = A^1 + A^2 = 2\ 928{,}53455$$

Budúca hodnota - 1. časť



Obr.: Budúca hodnota prerušenej renty - 1. časť

Budúca hodnota - 1. časť

Zápis:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 100 \\
p_1 &= 4 \\
t_1 &= 5 \\
n_1 &= 6 \\
j &= 0{,}03 \\
m &= 12 \\
\hline
{}_5S_6 &= ?
\end{aligned}
$$

$$S^1 = {}_5S_6 \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot 5}$$

Budúca hodnota - 1. časť

Riešenie:

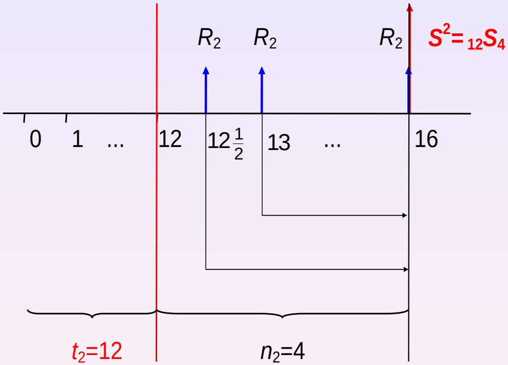
$$ {}_tS_n = S_n = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} $$

$$ {}_5S_6 = S_6 = 100 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{12 \cdot 6} - 1}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} $$

$$ S^1 = \left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{12 \cdot 5} \cdot {}_5S_6 $$

$$ S^1 = 3\,042{,}76867 $$

Budúca hodnota - 2. časť



Obr.: Budúca hodnota prerušenej renty - 2. časť

Budúca hodnota - 2. časť

Zápis:

$$\begin{aligned} R_2 &= 200 \\ p_2 &= 2 \\ t_2 &= 12 \\ n_2 &= 4 \\ j &= 0{,}03 \\ m &= 12 \\ \hline {}_{12}S_4 &= ? \end{aligned}$$

Budúca hodnota - 2. časť

Riešenie:

$$
{}_tS_n = S_n = R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}
$$

$$
{}_{12}S_4 = S_4 = 200 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{12\cdot 4} - 1}{\left(1+\frac{0{,}03}{12}\right)^{\frac{12}{2}} - 1} = S^2
$$

$$
S^2 = 1\ 687{,}12719
$$

Budúca hodnota

Riešenie:

$$S = S^1 + S^2 = 4\ 729{,}85169$$

Zaradenie podľa klasifikácie

Večná renta

atribúty:

- nepodmienená
- **nekonečná**
- polehotná
- s konštantnou splátkou
- s počtom splátok za rok p

Večná renta - Ilustrácia

Príklad:

Aký zabezpečovací fond zabezpečí vyplácanie ceny vo výške 1 000 eur víťazovi každoročnej literárnej súťaže do neobmedzenej budúcnosti pri 4% ročnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} p & = & 1 \\ i & = & 0{,}04 \\ n & \to & \infty \\ R & = & 1\ 000 \\ \hline A_\infty & = & ? \end{array}$$

Večná renta - Definícia

Definícia

Večnou rentou nazývame takú rentu, pri ktorej je počet splátok neohraničený.

Platí teda: $n \longrightarrow \infty$

Výpočet súčasnej hodnoty renty

- $p = 1$

$$\begin{aligned} A_\infty &= \lim_{n\to\infty} A_n = \\ &= \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \end{aligned}$$

$$A_\infty = \frac{R}{i}$$

- p ľubovoľné

$$A_\infty = \frac{R}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

Výpočet súčasnej hodnoty renty - Príklad 4

Príklad 4:

Aký zabezpečovací fond zabezpečí vyplácanie ceny vo výške 1 000 eur víťazovi každoročnej literárnej súťaže do neobmedzenej budúcnosti pri 4% ročnej úrokovej miere?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} p & = & 1 \\ i & = & 0{,}04 \\ n & \rightarrow & \infty \\ R & = & 1\ 000 \\ \hline A_\infty & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$A_\infty = \frac{R}{i} = \frac{1\ 000}{0{,}04} = 25\ 000$$

Výpočet súčasnej hodnoty renty - Príklad 5

Príklad 5:

Aký zabezpečovací fond nám a našim dedičom zaistí štvrťročný polehotný večný dôchodok vo výške 1 000 eur pri 5% nominálnej úrokovej miere, ak sa úroky pripisujú mesačne?

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} p & = & 4 \\ j & = & 0{,}05 \\ n & \to & \infty \\ R & = & 1\ 000 \\ m & = & 12 \\ \hline A_\infty & = & ? \end{array}$$

Riešenie:

$$A_\infty = \frac{R}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{1\ 000}{\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1} = 79\ 667{,}59067$$

Výpočet budúcej hodnoty renty

- $p = 1$

$$\begin{aligned} S_\infty &= \lim_{n\to\infty} S_n = \\ &= \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \end{aligned}$$

$$S_\infty = \infty$$

- p ľubovoľné

$$S_\infty = \infty$$

Zaradenie podľa klasifikácie

Renta so spojitým úrokovaním

atribúty:

- nepodmienená
- s dobou splatnosti
    1. ohraničenou - konečná renta
    2. neohraničenou - večná renta
- polehotná
- s konštantnou splátkou
- s počtom splátok za rok p
- **s neohraničeným počtom konverzií m, t. j. so spojitým úrokovaním**

Renta so spojitým úrokovaním - konečná - Definícia

Definícia

Rentou so spojitým úrokovaním nazývame takú rentu, pri ktorej je počet konverzií neohraničený.

Platí teda: $m \longrightarrow \infty$

Výpočet súčasnej hodnoty renty - konečná

$$A_n = \lim_{m \to \infty} R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$A_n = R \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-j \cdot n}}{\mathrm{e}^{\frac{j}{p}} - 1}$$

Výpočet budúcej hodnoty renty - konečná

$$S_n = \lim_{m\to\infty} R \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

$$S_n = R \cdot \frac{e^{j\cdot n} - 1}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

Výpočet súčasnej hodnoty renty - Príklad 6

Príklad 6:

Aký veľký musí byť zabezpečovací fond v banke, ak je uložený pri spojitom úrokovaní pri nominálnej úrokovej miere 5 % a má poskytovať pravidelné štvrťročné splátky polehotne v sume 1 000 eur

1. po dobu 10 rokov,
2. po dobu nekonečne dlhú.

Zápis:

$$\begin{array}{lll} 1. & R & = & 1\,000 \\ & n & = & 10 \\ & j & = & 0{,}05 \\ & p & = & 4 \\ & m & \to & \infty \\ \hline & A_n & = & ? \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 2. & R & = & 1\,000 \\ & n & \to & \infty \\ & j & = & 0{,}05 \\ & p & = & 4 \\ & m & \to & \infty \\ \hline & A_\infty & = & ? \end{array}$$

Výpočet súčasnej hodnoty renty - Príklad 6

Riešenie:

1. $$A_n = R \cdot \frac{1 - e^{-j \cdot n}}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

$$A_{10} = 1\ 000 \cdot \frac{1 - e^{-0,05 \cdot 10}}{e^{\frac{0,05}{4}} - 1}$$

$$A_{10} = 31\ 281,22242$$

Renta so spojitým úrokovaním - večná - Definícia

Definícia

Večnou rentou so spojitým úrokovaním nazývame takú rentu, pri ktorej je počet konverzií neohraničený a počet splátok neohraničený.

Platí teda: $m \longrightarrow \infty$ a $n \longrightarrow \infty$

Výpočet súčasnej a budúcej hodnoty renty - večná

- súčasná hodnota

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{1 - e^{-j\cdot n}}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

$$A_\infty = \frac{R}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

- budúca hodnota

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} R \cdot \frac{e^{j\cdot n} - 1}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

$$S_\infty = \infty$$

Výpočet súčasnej hodnoty renty - Príklad 6

Riešenie:

2.
$$A_\infty = \frac{R}{e^{\frac{j}{p}} - 1}$$

$$A_\infty = \frac{1\ 000}{e^{\frac{0{,}05}{4}} - 1}$$

$$A_\infty = 79\ 501{,}04166$$

Ďakujem za pozornosť.