Matematika 2 – 7.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Integrovanie racionálnych funkcií

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{kde racionálna funkcia} \quad f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

1. a) Ak n < m, f(x) <u>rýdzoracionálna</u> – rozklad na parciálne zlomky, potom integrujeme
   b) v prípade, že je daný integrál v tvare:

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\underbrace{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}} \quad \text{pre} \quad p^2-4q<0 \quad \text{použijeme substitúciu} \quad x+\frac{p}{2}=t$$

menovateľa doplníme na štvorec a použijeme integračný vzorec

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$$

2. Ak n > m, f(x) <u>nerýdzoracionálna</u> – predelíme, upravíme na súčet polynómu a parciálnych zlomkov, potom všetko integrujeme

Pr. 1

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 20}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{4}\operatorname{arctg} \frac{x+2}{4}$$

Pr. 2 – 38 / 18

18.	$\int \frac{(x+1)^3}{x^2 - x}\,dx$	$\frac{x^2}{2} + 4x - \ln\lvert x\rvert + 8\ln\lvert x-1\rvert + C$
19.	$\int \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 6}{x^2 - 1}\,dx$	$x^2 - x + \ln\left\lvert \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3} \right\rvert + C$

Pr. 3 – 39 / 20

$$\int \frac{x^3+3x^2-3x-17}{x^2+x-12}\,dx \qquad \frac{x^2}{2}+2x+\ln\left|(x-3)^4(x+4)^3\right|+C$$

$$\begin{array}{l} (x^3+3x^2-3x-17):(x^2+x-12) = \mathrm{x}+2 \\ \underline{-(x^3+x^2-12x)} \\ \qquad 2x^2+9x-17 \\ \underline{\qquad -(2x^2+2x-24)} \\ \qquad\qquad 7x+7 \end{array}$$

$$\int \left(x+2+\frac{7x+7}{x^2+x-12}\right)\mathrm{d}t = \int \left(x+2+\frac{4}{x-3}+\frac{3}{x+4}\right)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{7x+7}{x^2+x-12} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}$$

$$7x+7 = A(x+4)+B(x-3)$$

$x=-4$: $-28+7=-7B \qquad B=3$

$x=3$: $\quad 21+7=7A \qquad A=4$

Pr. 3 – 39 / 20

$$\int \left(x + 2 + \frac{4}{x-3} + \frac{3}{x+4}\right) \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x-3| + 3\ln|x+4| + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|(x-3)^4.(x+4)^3| + C$$

Integrovanie iracionálnych funkcií

1. prípad:

$$\int R\left[x, (ax+b)^{\frac{1}{k_1}}, (ax+b)^{\frac{1}{k_2}}, \ldots, (ax+b)^{\frac{1}{k_n}}\right] dx$$

Substutúcia: $ax + b = t^k$

k – najmenší spoločný násobok čísel k_1, k_2, k_3,............ k_n (prirodzené čísla)

2. prípad:

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0$ riešime tak, že výraz pod odmocninou upravíme na štvorec vhodnou substitúciou potom využijeme jeden z integračných vzorcov:

- ak $a > 0$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{t^2+d^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\left|t + \sqrt{t^2+d^2}\right| + C$
- ak $a < 0$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{d^2-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin\frac{t}{d} + C$

Pr. 1 – 43 / 2

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx \qquad \frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$$

Pr. 2 – 43 / 9

9.	$\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,dx$	$\displaystyle\frac{1}{3}(3x+4)-\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x+4)^2}+\sqrt[3]{3x+4}-\ln\left\|\sqrt[3]{3x+4}+1\right\|+C$
10.	$\displaystyle\int \frac{4x+5\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}\,dx$	$3\sqrt[3]{(x+2)^4}+6\sqrt[6]{(x+2)^5}-24\sqrt[3]{x+2}+C$

Pr. 3

$$\int \frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x-4}-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(2x-4)^{\frac{1}{2}}}{(2x-4)^{\frac{1}{2}}-1}\,\mathrm{d}x$$

$$x-2+\sqrt{2x-4}+\ln\left|\sqrt{2x-4}-1\right|+C$$

$$\left|\begin{array}{rl} k &= 2 \\ 2x-4 &= t^2 \\ 2\mathrm{d}x &= 2t\mathrm{d}t \end{array}\right| \rightarrow t = \sqrt{2x-4}$$

$$\int \frac{t}{t-1}\,t\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{t-1}\mathrm{d}t = \int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|+C$$

$$= x-2+\sqrt{2x-4}+\ln\left|\sqrt{2x-4}-1\right|+C$$

$$\begin{array}{l} (t^2 \qquad):(t-1) = t+1 \\ \underline{-(t^2-t)} \\ \qquad t \\ \underline{\qquad -(t-1)} \\ \qquad\quad 1 \end{array}$$

Pr. 4 – 44 / 6

6.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$	$2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left\|\sqrt[4]{x}+1\right\|+C$
7.	$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$	$6\ln\left\|\sqrt[6]{x}\right\|-6\ln\left\|\sqrt[6]{x}+1\right\|+C$

Pr. 5 – 44 / 14

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx \qquad\qquad 3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$$

$$\left|\begin{array}{c} k_1 = 3.1 \\ k_2 = 6 = 3.2.1 \rightarrow k = 3.2.1 = 6 \\ \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array}\right| \rightarrow t = \sqrt[6]{x}$$

$$\begin{array}{l} (t^2 \qquad):(t+1) = t-1 \\ \underline{-(t^2+t)} \\ \qquad -t \\ \underline{\qquad -(-t-1)} \\ \qquad\qquad 1 \end{array}$$

$$\int \frac{t^{\frac{6}{3}}}{t^6+(t^6)^{\frac{5}{6}}}\,6t^5 dt = \int \frac{t^2}{t^6+t^5}\,6t^5 dt = 6\int \left(\frac{t^2}{t+1}\right) dt =$$

$$6\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right) dt = 6\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C \quad = 6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right)+C$$

$$= 3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|)+C$$

Pr. 6 – 45 / 31

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}}\,dx \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$$

Pr. 7 – 45 / 23

$$\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-8x+12}}dx \qquad \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$$

$$a=4>0 \to \int \frac{1}{\sqrt{t^2+d^2}}\mathrm{d}t = \ln\left|t+\sqrt{t^2+d^2}\right|+C$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{4(x^2-2x+3)}}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\sqrt{4[(x-1)^2+3-1]}}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2\sqrt{[(x-1)^2+2]}}\mathrm{d}x =$$

$$\left|\begin{matrix} x-1=t \\ \mathrm{d}x = t\mathrm{d}t \\ d^2=2 \end{matrix}\right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{[(t)^2+2]}}\mathrm{d}t = \ln\left|t+\sqrt{t^2+2}\right|+C = \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$$

Dú: str. 38 / 5, 11, 16, 17, 28, 35, 38 str. 43/ 4, 7, 8, 12, 15, 16, 22, 25, 26, 29

Integrovanie goniometrických funkcií

1. prípad:

Integrál typu:

- $\int R(\sin x)\cdot\cos x\,dx$ *vypočítame pomocou substitúcie* $t=\sin x$.
- $\int R(\cos x)\cdot\sin x\,dx$ *vypočítame pomocou substitúcie* $t=\cos x$.

2. prípad:

- $\int R(\sin^{2k}x,\ \cos^{2n}x)\,dx$ úprava pomocou vzorcov

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

Pomocné vzorce:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\qquad \sin 2x=2\sin x\cos x\qquad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}\qquad \operatorname{cotg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Pr. 1 – 50 /8

$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$	$\frac{1}{8}(x - \frac{\sin 4x}{4}) + C$

Pr. 2

$$\int (1 + \cos^2 x)\, \mathrm{d}x$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int (1 + \cos^2 x)\, \mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{3 + \cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x =$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Pr. 3 – 50 / 30

29.	$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\, dx$	$\frac{\cos^2 x}{2} - \cos x + C$
30.	$\int \cos^3 x\, dx$	$\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$

Pr. 4 – 50 / 15

14.	$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x - 4}}\, dx$	$\ln\left\|\sin x + \sqrt{\sin^2 x - 4}\right\| + C$
15.	$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 3}}\, dx$	$-\ln\left\|\cos x + \sqrt{\cos^2 x + 3}\right\| + C$

Pr. 5

$$\int 3^{(\sin^2 x)+1} \sin x \cos x \, dx$$

$$\frac{3^{(\sin^2 x)+1}}{2 \,.\, \ln 3} + C$$

Pr. 6 – 50 / 19

19.	$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx$	$\sin x - \cos x + C$
20.	$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\, dx$	$-\operatorname{cotg} x - 2x + C$

$$\int \left(\frac{\cos 2x}{\cos x \ - \sin x} \right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \ - \sin x} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{(\cos x - \sin x)\,(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} \mathrm{d}x = \int (\cos x + \sin x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \sin x - \cos x + C$$

Pr. 7

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 4\cos x + 12}\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x + 2}{\sqrt{8}} + \mathrm{C}$$

$$\left|\begin{matrix} \cos\ x = t \\ -\sin\,\mathrm{d}x\ = \mathrm{d}t \end{matrix}\right|$$

$$\int \frac{-1}{t^2 + 4t + 12}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-1}{(t+2)^2 + 12 - 4}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-1}{(t+2)^2 + 8}\,\mathrm{d}t =$$

$$\left|\begin{matrix} t + 2 = v \\ \mathrm{d}t\ = \mathrm{d}v \end{matrix}\right| \qquad \sqrt{8} = a, 8 = a^2$$

$$\int \frac{-1}{(v)^2 + 8}\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{8}} + C = -\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{t+2}{\sqrt{8}} + C =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x + 2}{\sqrt{8}} + C$$

Pr. 8

$$\int \frac{2}{(\sin^2 x) - 4} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$\ln(\sin^2 x) - 4 + \mathrm{C}$$

$$\left| \begin{array}{l} (\sin^2 x) - 4 = t \\ 2 \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$\int \frac{2}{(\sin^2 x) - 4} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t} \mathrm{dt} = \ln|t| + C = \ln|(\sin^2 x) - 4| + C$$

Dú: str. 50 / 1, 2, 10, 11, 12, 14, 16, 20, 21, 25, 29, 30, 36, 40, 44

Pokyny k 1. zápočtovej písomke:

Dátum a miesto: 11.4.2024 na cvičení v ZP4

Príklady – za 35 bodov, 7 príkladov:
1. Komplexné čísla,
2. Rozklad polynómu na súčin koreňových činiteľov,
3. Rozklad racionálnej funkcie na parciálne zlomky,
4. Neurčitý integrál – na základné vzorce (pod integrálom súčet rôznych vzorcov)
5. Metóda substitúcie riešenia neurčitého integrálu.
6. Metóda per partes riešenia neurčitého integrálu (dva spôsoby).
7. Riešenie neurčitého integrálu, v ktorom je racionálna, iracionálna funkcia alebo goniometrická funkcia.

Teória – za 15 bodov, 6 otázok (výber odpovedí + doplnenie odpovede).

Čas: 80 minút

Študent má byť prihlásený v Moodle**.**
Bez kalkulačiek, mobilov, mať pri sebe Isic, **dvojhárok s vytlačenou hlavičkou (stránka KMTI ,** v časti Vzory a predlohy)

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. V integráli $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ použijeme substitúciu

   a) $x+1=t^3$,
   b) $x+1=t^2$,
   c) $x+1=t^6$.

2. V integráli $\int \frac{2x-4}{1-\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$ je

   a) $\mathrm{d}x = 2t^2\mathrm{d}t$,
   b) $2\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$,
   c) $\mathrm{d}x = 2tdt$.

3. Pri výpočte integrálu $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$ po úprave použijeme na vyjadrenie integrál

   a) $\int \frac{1}{\sqrt{d^2-t^2}}\mathrm{d}t = \arcsin\frac{t}{d} + C$, b) $\int \frac{1}{\sqrt{t^2+d^2}}\mathrm{d}t = \ln\left|t+\sqrt{t^2+d^2}\right| + C$, c) $\int \frac{1}{t^2+a^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a} + C$

4. Integrál $\int \frac{1}{\sqrt{t^2+d^2}}\mathrm{d}t = \ln\left|t+\sqrt{t^2+d^2}\right| + C$ použijeme na výpočet integrálu $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$

   a) ak $a < 0$ b) ak $a > 0$, c) ak $b < 0$, d) ak $c > 0$.

5. V integráli $\int \frac{2x}{\sqrt{3x+5}}\, \mathrm{d}x$ použijeme substitúciu pre *x*

a) $x = \frac{t^2-5}{3}$,

b) $x = t^2$,

c) $x = \frac{2t-5}{3}$.

6. Pri úprave integrálu $\int \sin^3 x\, \mathrm{d}x$

a) nahradíme výraz $\sin^3 x = \sin^2 x \,.\, \sin \mathrm{x}$,

b) použijeme substitúciu $\sin x = t$,

c) použijeme vzorec pre $\sin 2x$.

7. V integráli $\int \sin x \sqrt{\cos^2 x + 5}\, \mathrm{d}x$ zvolíme substitúciu

a) $\cos^2 x + 5 = t$,

b) $\sin x = t$,

c) $\cos x = t$.

8. V integráli $\int \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - 4}\, \mathrm{d}x$ zvolíme substitúciu

a) $\cos x = t$,

b) $\cos^2 x - 4 = t$,

c) $\sin x = t$.

9. Vzorec $\frac{1-\cos 2x}{2}$ použijeme pri výpočte integrálu

a) $\int \sin x \, \mathrm{dx}$, b) $\int \cos 2x \, \mathrm{dx}$, c) $\int \cos^2 x \, \mathrm{dx}$, d) $\int \sin^2 x \, \mathrm{dx}$.

10. Vzorec $\cos^2 x - \sin^2 x$ použijeme pri výpočte integrálu

a) $\int \sin 2x \,.\, \cos x \; \mathrm{d}x$,

b) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, \mathrm{d}x$,

c) $\int \cos^2 x \,(2 \sin x \cos x)\, \mathrm{d}x$,

d $\int \dfrac{\sin 2x}{\cos x + \sin x}\, \mathrm{d}x$.

Správne odpovede: 1c, 2c, 3b, 4b, 5a, 6a, 7c, 8b, 9d, 10b

Hodnotenie:

0 – 2 nesprávna odpoveď – máš vedomosti o integrovaní iracionálnych a goniometrických funkcií

3 – 5 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

6 a viac nesprávnych odpovedí – odporúčam sa na to ešte raz pozrieť