Matematika II – 8.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Určitý integrál

3.1 Newton – Leibnizov vzorec

Nech funkcia *f* je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a nech má na tomto intervale primitívnu funkciu *F*(*x*). Potom platí

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{určitý integrál}} = [F(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \text{čislo}$$

určitý integrál

dané hranice integrovania

a dolná hranica

b horná hranica

Pr. 1

$$\int_{1}^{3} (x^2 + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$

$$8 + 2\sqrt{3}$$

Pr. 2

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \mathrm{d}x$$

$$\frac{11}{4}$$

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \left[\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + 2\sqrt{x} \right]_0^1 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

Pr. 3 – 58 / 9

$$\int_0^2 \frac{2x-3}{x-3}\,dx \qquad\qquad 4-3\ln 3$$

Pr. 4 – 58 / 9

$$\int_3^7 \frac{x}{x^2-4}\,dx \qquad \ln 3$$

$$\int_3^7 \left(\frac{x}{x^2-4}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_3^7 \left(\frac{2x}{x^2-4}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-4|\right]_3^7 = \left[\frac{1}{2}\ln|7^2-4| - \frac{1}{2}\ln|3^2-4|\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 45 - \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{1}{2}\ln\frac{45}{5} = \frac{1}{2}\ln 9 = \ln 9^{\frac{1}{2}} = \ln 3$$

Určitý integrál

3.2 Substitučná metóda

Nech funkcia *f* je spojitá na intervale $\mathrm{I} \in \langle a, b \rangle$ a nech funkcia má spojitú deriváciu na ohraničenom intervale $\mathrm{J} \in \langle c, d \rangle$ a zobrazuje interval I do J. Potom platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_c^d = \mathrm{F}(d) - \mathrm{F}(c)$$

$$\left| \begin{array}{c} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ a \to c = \varphi(a) \\ b \to d = \varphi(b) \end{array} \right|$$

c, d nové hranice po substitúcii pre t

a, b pôvodné hranice pre x

Pr. 5 – 58 / 15

$$\int_0^1 x\, e^{1+x^2}\; dx \qquad \frac{1}{2}(e^2 - e)$$

Pr. 6 – 58 / 14

$$\int_0^1 2x(x^2+2)^3\,dx \qquad \frac{65}{4}$$

$$\int_0^1 2x\,(x^2+2)^3\,\mathrm{d}x \quad = \int_2^3 t^3\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4}\right]_2^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4}$$

$$\left| \begin{array}{c} x^2+2=t \\ 2x\,dx = dt \end{array} \right| \begin{array}{c} 1+2=3 \\ 0+2=2 \end{array}$$

Pr. 7 – 58 / 20

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx \qquad\qquad 4 - 2\,\mathrm{arctg}\,2$$

Pr. 8 – 58 / 18

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} \qquad \frac{\pi}{6}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x)+3}} =$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+3+1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+4}} =$$

$$\left| \begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} 2-1=1 \\ 1-1=0 \end{array}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-t^2+4}} = \left[\arcsin\frac{t}{2}\right]_0^1 = \arcsin\frac{1}{2} - \underbrace{\arcsin 0}_{0}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

Určitý integrál

3.3 Metóda per partes

Nech funkcie *u*,*v* sú spojito diferencovateľné na intervale $\mathrm{I} \in \langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\int_a^b u(x).\, v'(x)\mathrm{d}x = [u(x).\, v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{dx}$$

Pr. 9 – 60 / 36

$$\int_0^2 xe^{-x}\,dx \qquad\qquad 1-3e^{-2}$$

Pr. 10

$$\int_1^2 (2x+1)e^x \qquad [3e^2 - e]$$

$$\int_1^2 (2x+1)\, e^x\, dx = \left[(2x+1)e^x\right]_1^2 - \int_1^2 2e^x\, dx$$

$$\left[2e^x\right]_1^2$$

$$\left|\begin{array}{ll} u = 2x+1 & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{array}\right|$$

$$= \left[(4+1)e^2 - (2+1)e^1\right] - 2e^2 + 2e^1 =$$

$$= 5e^2 - 3e^1 - 2e^2 + 2e^1 = \underline{\underline{3e^2 - e^1}}$$

Pr. 11 – 60 / 34

$$\int_2^e x \ln x \, dx$$

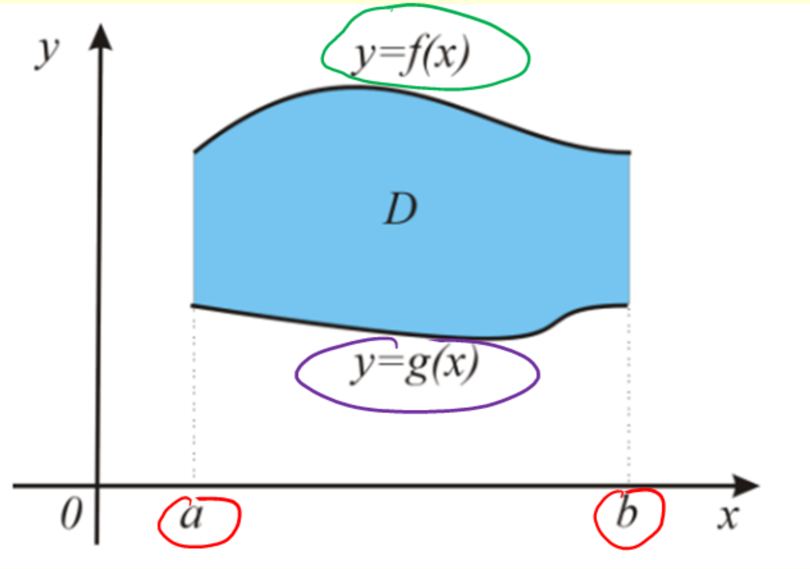
$$\frac{1}{4}e^2 - \ln 4 + 1$$

Dú: str. 58 / 3, 15, 16, 19, 32, 33

Použitie určitého integrálu
Plošný obsah rovinných útvarov

elementárna oblasť vzhľadom na os *x* **typ [x, y]**

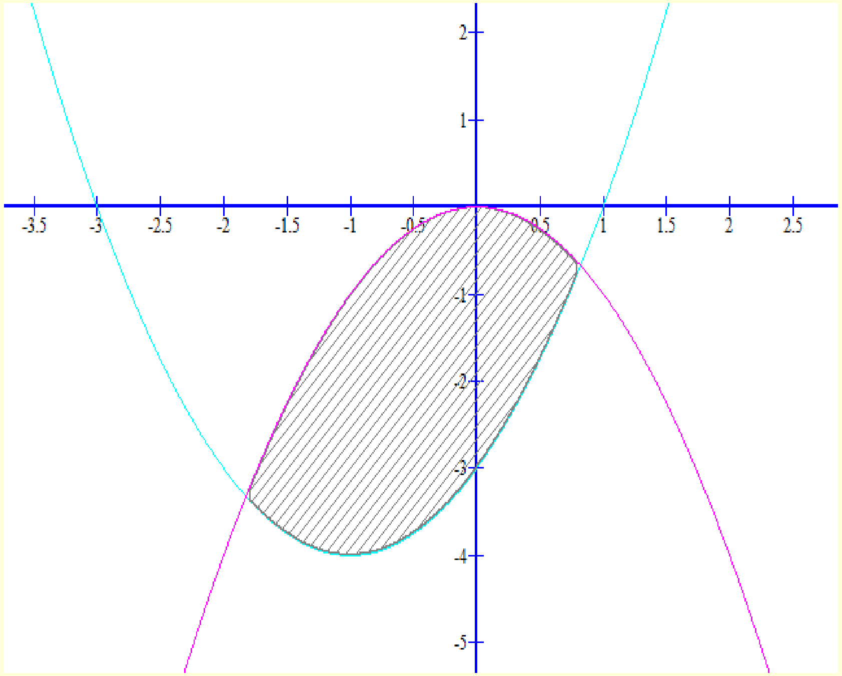
$$a \leq \boldsymbol{x} \leq b$$
$$g(x) \leq \boldsymbol{y} \leq f(x)$$

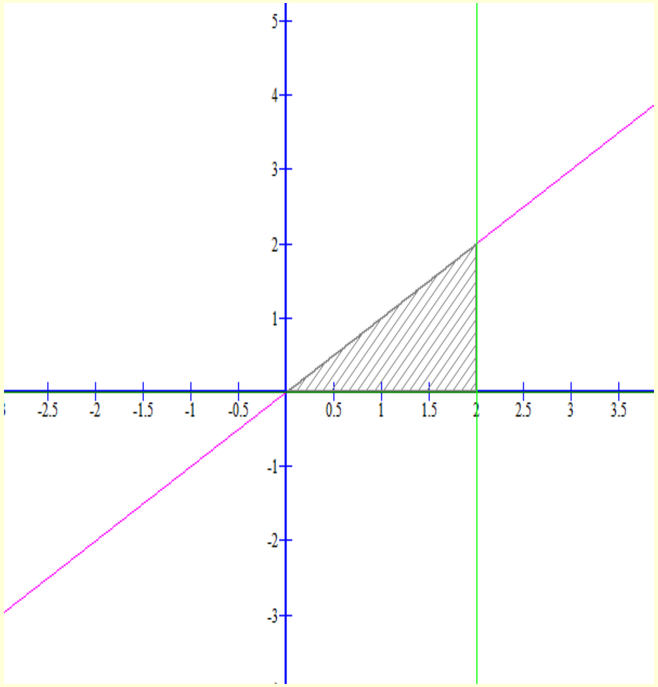


plocha je zhora a zdola ohraničená funkciami

Plošný obsah elementárnej oblasti D sa počíta podľa vzorca $P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$.

Príklady:

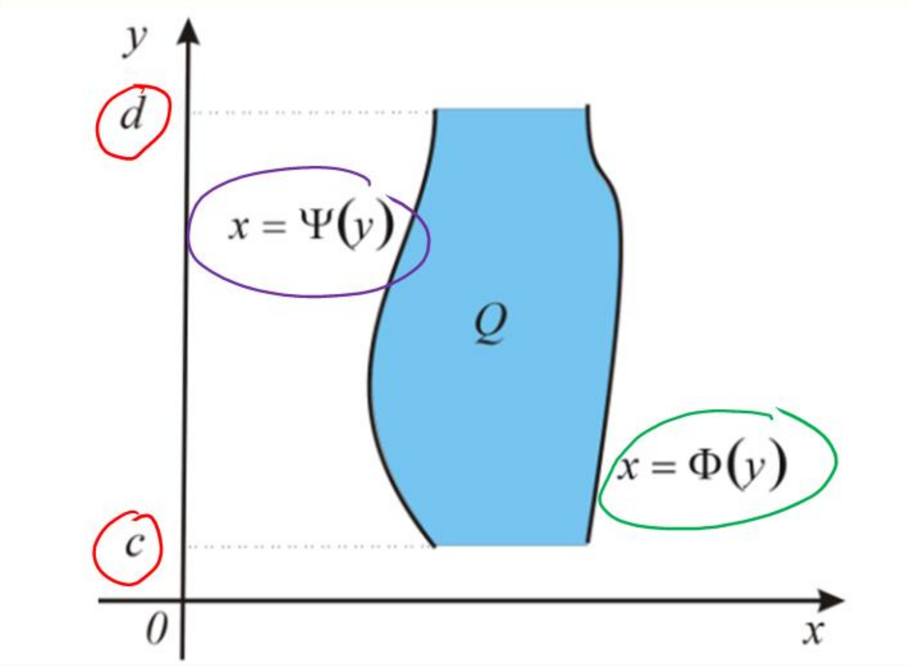




plocha je zhora a zdola ohraničená funkciami

elementárna oblasť vzhľadom na os *y* **typ [y,x]**

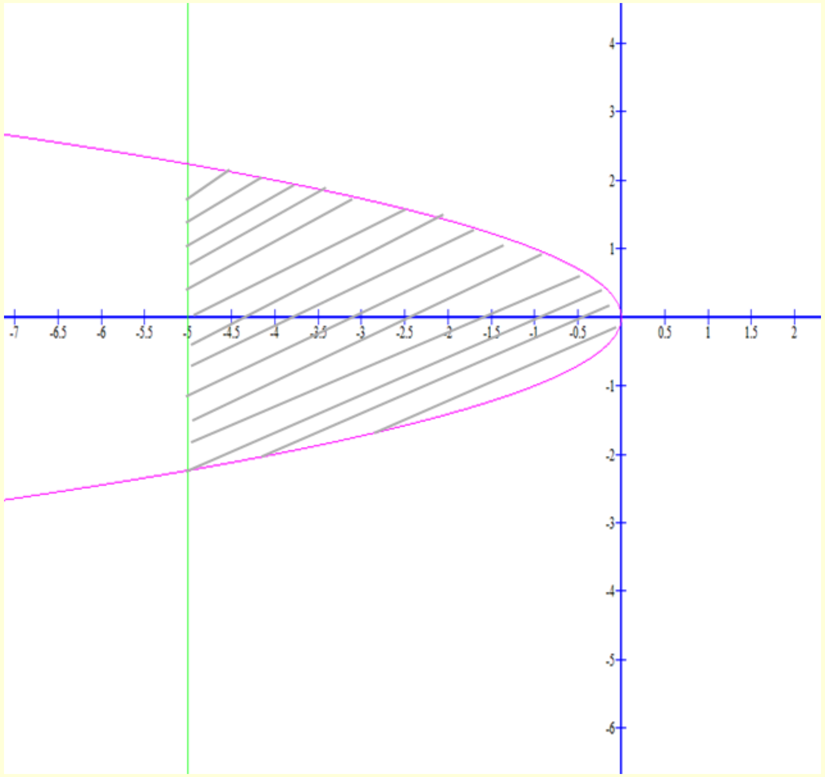
$$c \leq \boldsymbol{y} \leq d$$
$$\Psi(y) \leq \boldsymbol{x} \leq \phi\,(y)$$

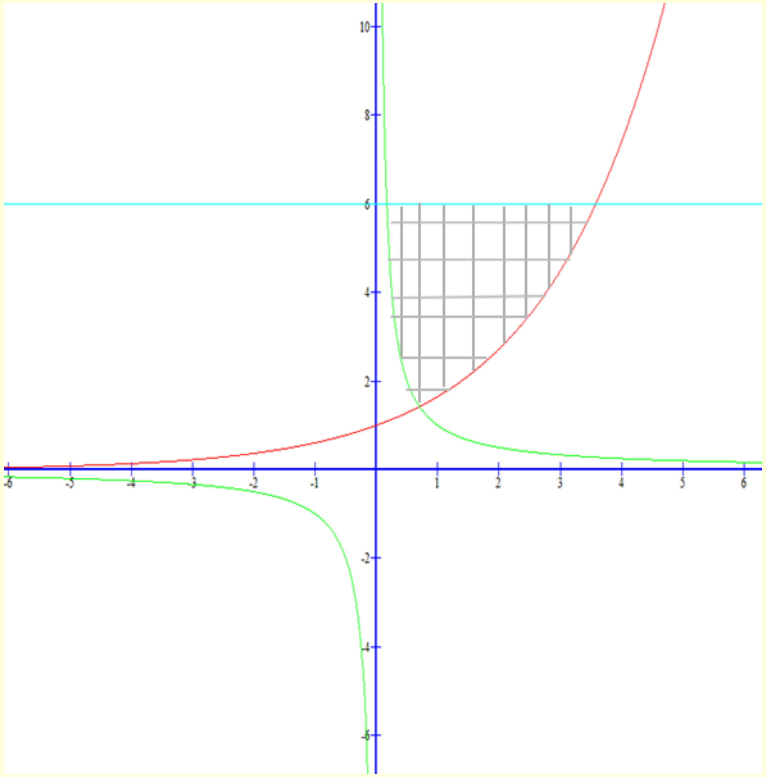


plocha je zprava a zľava ohraničená funkciami

Plošný obsah elementárnej oblasti Q sa počíta podľa vzorca $P = \int_c^d [\Phi(y) - \Psi(y)]\,dy$.

Príklady:

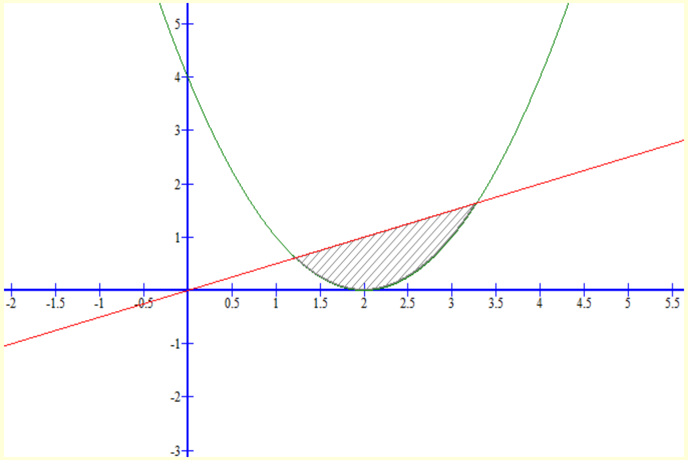




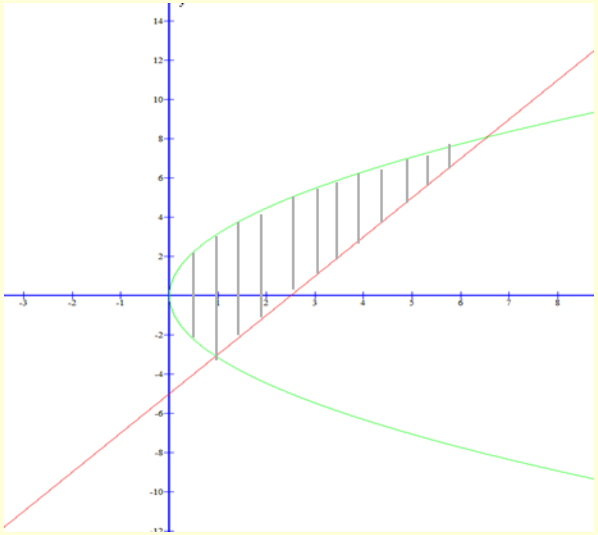
plocha je zprava a zľava ohraničená funkciami

Určte typ elementárnej oblasti v nasledujúcich príkladoch:

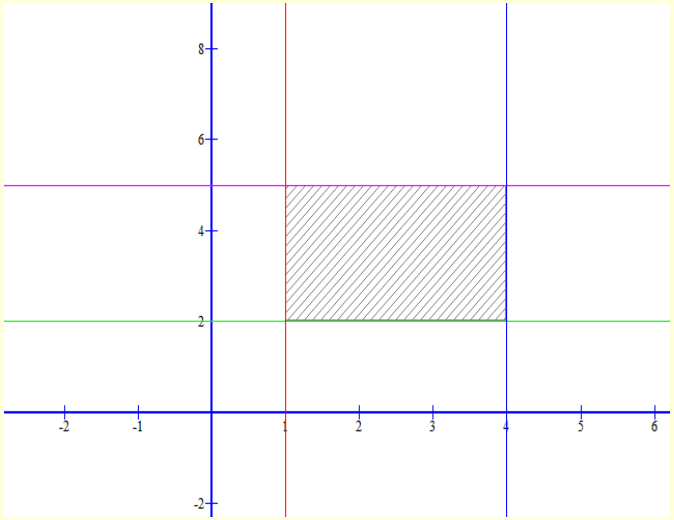
a)



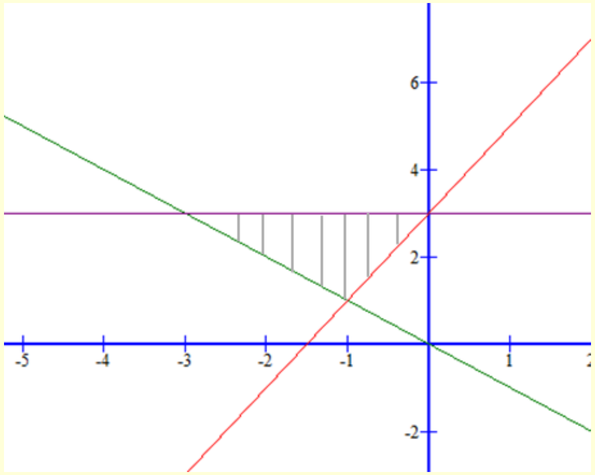
b)



c)



d)



Výsledky: [x, y] - a, c , [y, x] – b,c, d

Pr. 1: Sú dané krivky $y = 2e^{x}, y = e^{x} + 2, x = 0.$ Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

1. **zobraziť krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti**

2. **Určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky**

3. **Vypočítať plochu oblasti**

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Newton – Leibnizov vzorec pre určitý integrál je daný

a) $\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_a{}^b = F(b) - F(a)$,

b) $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a{}^b = F(a) - F(b)$,

c) $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a{}^b = F(b) - F(a)$.

2. Výsledok $e^3 - 1$ patrí k integrálu

a) $\int_1^3 e^x dx$, b) $\int_0^3 e^x dx$, c) $\int_3^1 e^x dx$, d) $\int_3^0 e^x dx$.

3. Výsledok integrálu $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x-2} dx$ je

a) $-\ln 27$, b) $\ln 3$, c) $3\ln 3 + 3\ln 1$, d) $\ln 27$.

4. Výsledok integrálu $\int_{0,5}^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ je

a) $\frac{\pi}{3}$, b) $-\frac{\pi}{3}$, c) $\frac{\pi}{6}$, d) $-\frac{\pi}{6}$.

5. Nové hranice pre integrál $\int_1^e \frac{\ln(x^2)}{x} dx$ pri substitúcii $t = \ln(x^2)$ sú

a) c = 1, d = 2 b) c = 0, d = 2 c) c = 0, d = e .

6. Substitúcia pre integrál $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos x) \sin x \, \mathrm{d}x$ je

a) $\sin x = t$, b) $\cos x = t$, c) $\sin x \cos x = t$.

7. Nové hranice pre integrál z otázky 6 sú

a) c = 0, d = 0,5 b) c = 1, d = 0,5 c) c = 0, d = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Výsledok integrálu z otázky 6 je

a) $\frac{1}{8}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{\pi^2}{18}$, d)π^2.

9. Nové hranice integrálu $\int_a^b \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx$ po substitúcii sú c = 1, d = 3 . Hranice *a, b* pred substitúciou sú

a) $a = 0, b = 3$,
b) $a = 1, b = 3$,
c) $a = 1, b = 27$.

10. Pri metóde per partes je výsledok člena $[u(x).\,v(x)]_a^b$ pre integrál $\int_0^{\pi}(x+1)\sin x\,\mathrm{d}x$

a) $-\pi$, b) $\pi+2$, c) 0 , d) 1.

11. Pri metóde per partes je výsledok člena $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ z integrálu $\int_1^2 x^2\ln x\,\mathrm{d}x$ je

a) $\frac{7}{9}$, b) $-\frac{7}{9}$, c) 1 , d) $\frac{1}{2}$.

12. Integrál $\int_0^1 2x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$ vyjadríme pomocou metódy per partes

a) $[x^2\mathrm{arctg}\,x]_0^1-\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$,

b) $[2\,\mathrm{arctg}\,x]-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$,

c) $[x^2\mathrm{arctg}\,x]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$,

d) $\left[\frac{x^2}{1+x^2}\right]_0^1-\int_0^1 x^2\mathrm{arctg}\,x\mathrm{d}x$.

Správne odpovede: 1c, 2b, 3a, 4a, 5b, 6b, 7b, 8a, 9c, 10b, 11a, 12c

Hodnotenie:

0 – 2 nesprávna odpoveď – máš vedomosti o integrovaní určitých integrálov

3 – 5 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

6 a viac nesprávnych odpovedí – odporúčam sa na to ešte raz pozrieť