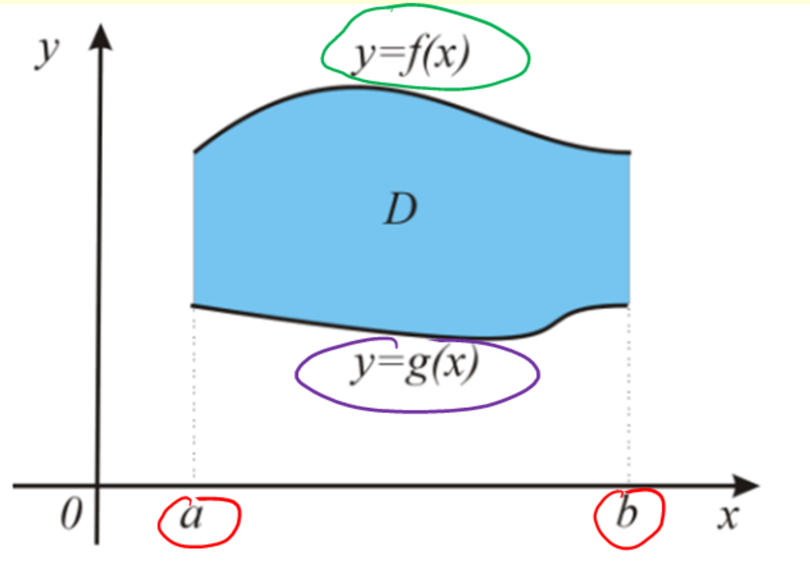
Matematika II – 9.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Použitie určitého integrálu
Plošný obsah rovinných útvarov

elementárna oblasť vzhľadom na os *x* **typ [x, y]**

$$a \leq \boldsymbol{x} \leq b$$
$$g(x) \leq \boldsymbol{y} \leq f(x)$$

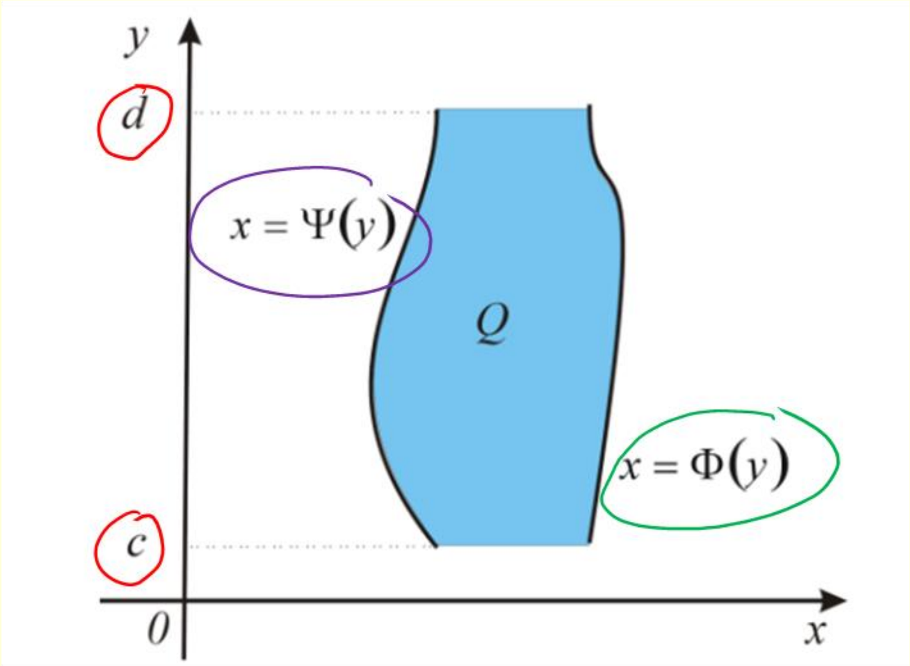


plocha je zhora a zdola ohraničená funkciami

Plošný obsah elementárnej oblasti D sa počíta podľa vzorca $P = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.

elementárna oblasť vzhľadom na os *y* **typ [y,x]**

$$c \leq \boldsymbol{y} \leq d$$
$$\Psi(y) \leq \boldsymbol{x} \leq \phi\,(y)$$



plocha je zprava a zľava ohraničená funkciami

Plošný obsah elementárnej oblasti Q sa počíta podľa vzorca $P = \int_c^d [\Phi(y) - \Psi(y)]\,dy$.

Pr. 1: Sú dané krivky $y = 2e^x, y = e^x + 2, x = 0.$ Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

1. **zobraziť krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti**

2. **Určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky**

3. **Vypočítať plochu oblasti**

Pr. 2 – 64 / 2: Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

$y = 3 - x,\ y = x,\ y = 0$

$\frac{9}{4}$

Pr. 3 : Sú dané krivky $y = x^2, y = 4.$ Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

1. zobraziť krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti

$y = x^2$ parabola

$V\ (0,0)$

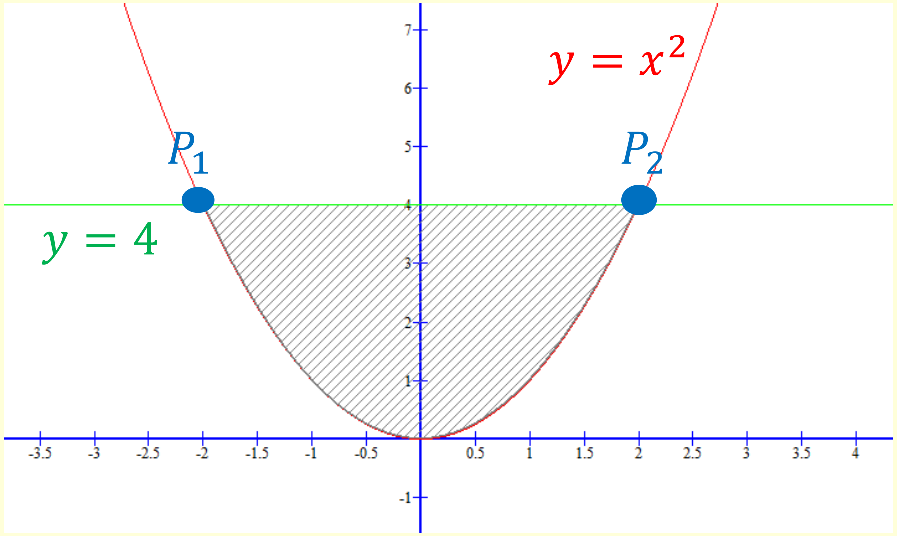
$x = 1, y = 1$

$x = -1, y = 1$

$y = 4$ priamka

$x = 0, y = 4$

$x = 1, y = 4$



Plocha typ [x, y]:

$$x_{p1} \leq \boldsymbol{x} \leq x_{p2}$$
$$g(x) \leq \boldsymbol{y} \leq f(x)$$

2. určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky (x - ové súradnice priesečníkov, dávame do rovnosti y – ové súradnice)

$y_1 = y_2$

$x^2 = 4$

$x_p = \pm 2$

$x_{p1} = -2, x_{p2} = 2$

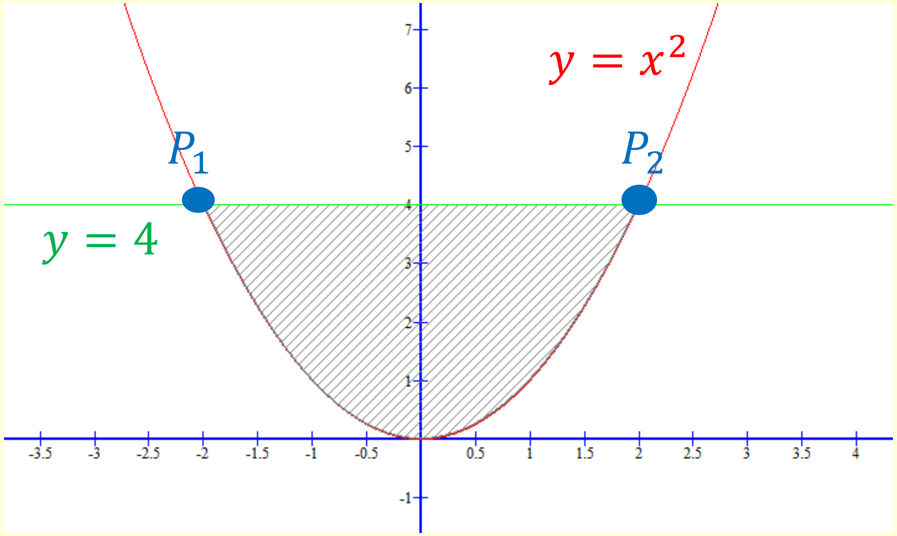
$$-2 \leq \boldsymbol{x} \leq 2$$
$$x^2 \leq \boldsymbol{y} \leq 4$$

Pr. 3 : Sú dané krivky $y = x^2, y = 4.$ Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

3. Vypočítať plochu oblasti

$$P = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$



$$P = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4.2 - \frac{2^3}{3} = \frac{32}{3}$$

Pr. 4 – 64 / 4: Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

$x = y^2,\ y = x - 2$ $\qquad \frac{9}{2}$

1. zobraziť krivky do grafu a určiť typ elementárnej oblasti

$x = y^2$ parabola

$V\ (0, 0)$

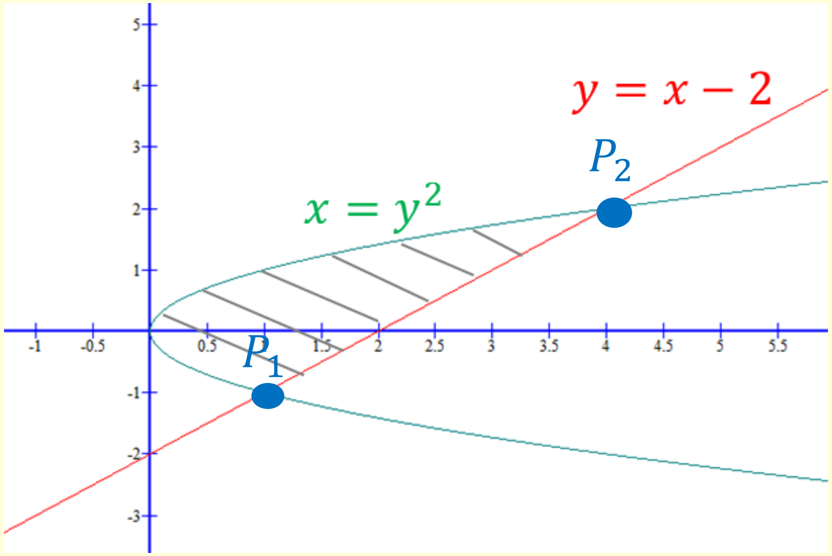
$y = 1, x = 1$

y$= -1, x = 1$

$y = x - 2$ priamka

$x = 0, y = -2$

$x = -2, y = 0$



Plocha typ [*y*, *x*]: $y_{p1} \leq \boldsymbol{y} \leq y_{p2}$

$\Psi(y) \leq \boldsymbol{x} \leq \phi(y)$

2. určiť hranice plochy – vypočítať priesečníky (y- ové súradnice priesečníkov, dávame do rovnosti x – ové súradnice)

$x_1 = x_2$

$y^2 = y + 2$

$y^2 - y - 2 = 0$

$(y - 2)(y + 1) = 0$

$y_{p1} = -1, y_{p2} = 2$

$y^2 \leq \boldsymbol{x} \leq y + 2$

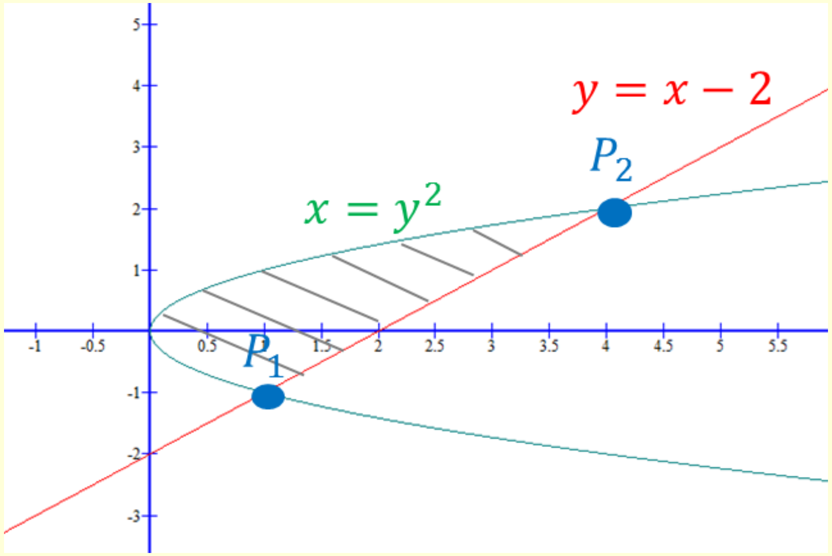
$-1 \leq \boldsymbol{y} \leq 2$

Pr. 4 – 64 / 4: Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

$$x = y^2,\ y = x - 2 \qquad \frac{9}{2}$$

3. Vypočítať plochu oblasti

$$P = \int_c^d (\Phi(y) - \Psi(y))dy$$

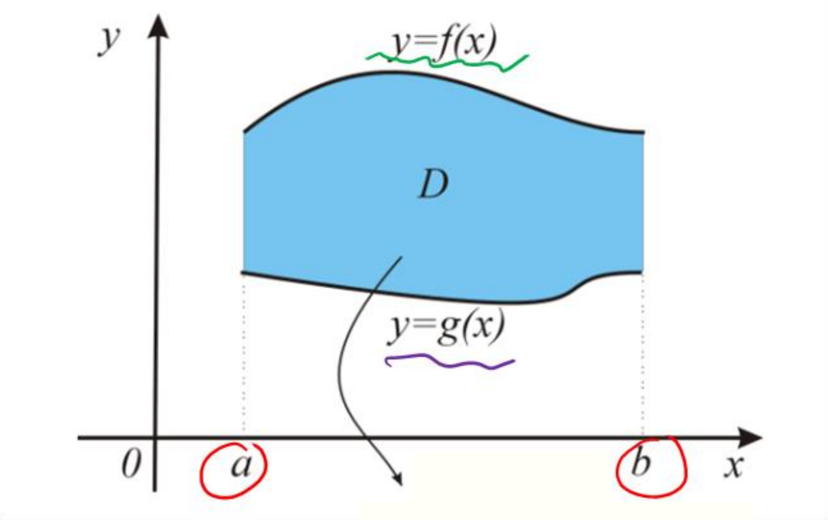


$$P = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)dy = = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2} =$$

$$\left(\frac{2^2}{2} + 2.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2.(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

Použitie určitého integrálu
Objem rotačného telesa

$$a \leq \boldsymbol{x} \leq b$$
$$g(x) \leq \boldsymbol{y} \leq f(x)$$



Rotácia okolo osi x

Rotáciou krivočiareho lichobežníka A v priestore $\mathbf{R}^3$ s osami x, y, z, okolo x - ovej osi vznikne rotačné teleso, ktorého objem V vypočítame pomocou vzorca

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx.$$

Pr. 5 – 69 / 12: Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo osi *x.*

$$y = \frac{4}{x},\ y = 6 - 2x \qquad\qquad \frac{4}{3}\pi$$

Pr. 6 – a) 64 / 1: Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.
b) 68 / 1: Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo osi *x.*

$y = 2x,\ y = x,\ x = 5$

a) $\frac{25}{2}$ b) 125π

a) $y = 2x$ $\quad$ $y = x$

$y = 0, x = 0$ $\quad$ $x = 0, y = 0$

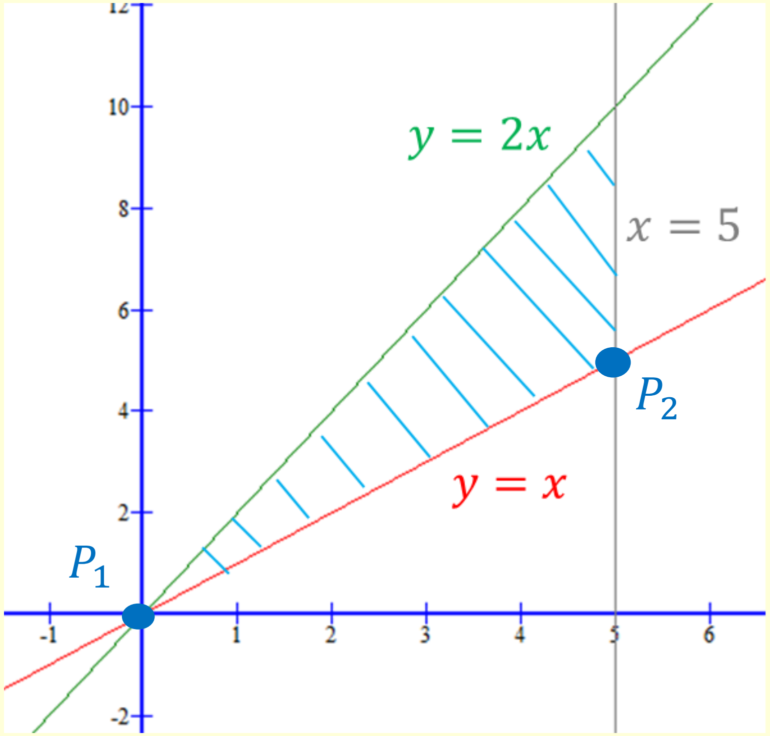
$y = 1, x = 2$ $\quad$ $x = 1, y = 1$

Plocha typ [*x*, *y*]: $x_{p1} \le \boldsymbol{x} \le x_{p2}$

$g(x) \le \boldsymbol{y} \le f(x)$

$0 \le \boldsymbol{x} \le 5$

$x \le \boldsymbol{y} \le 2x$



$$\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_0^5 (2x - x)dx = \int_0^5 x\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{25}{2}$$

Pr. 6 – a) 64 / 1: Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

b) 68 / 1: Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo osi *x.*

$y = 2x,\ y = x,\ x = 5$ a) $\dfrac{25}{2}$ b) 125π

b) Plocha typ [*x*, *y*]:

$0 \leq \boldsymbol{x} \leq 5$

$x \leq \boldsymbol{y} \leq 2x$

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx = \pi \int_0^5 ((2x)^2 - (x)^2)dx = \pi \int_0^5 (3x)^2 dx = \pi [x^3]_0^{\ 5} =$$

$$V = 125\pi$$

Pr. 7 – 65 / 14: Vypočítajte obsah časti roviny ohraničenej danými krivkami.

$y = x^2 - x,\ y = -x^2 + 3x$ $\qquad$ $\dfrac{8}{3}$

Pr. 8 – 68 / 5 : Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo osi *x*.

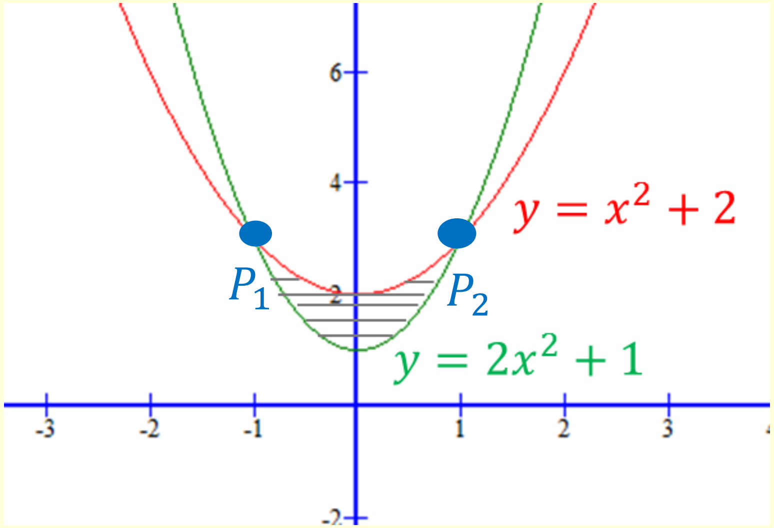
$y = x^2 + 2,\ y = 2x^2 + 1$ $\qquad \frac{24}{5}\pi$

$y = x^2 + 2$ $\qquad y = 2x^2 + 1$

$\mathrm{V}\,(0, 2)$ $\qquad \mathrm{V}\,(0, 1)$

$x = 1, y = 3$ $\qquad x = 1, y = 3$

$x = -1, y = 3$ $\qquad x = -1, y = 3$



Plocha typ [*x*, *y*]: $\qquad x_{p1} \le \boldsymbol{x} \le x_{p2}$

$g(x) \le \boldsymbol{y} \le f(x)$

$-1 \le \boldsymbol{x} \le 1$

$2x^2 + 1 \ \le \boldsymbol{y} \le x^2 + 2$

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) \ - g^2(x))dx = \pi \ \int_{-1}^{1} ((x^2 + 2)^2 - (\,2x^2 + 1)^2)dx =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} [(x^4 + 4x^2 + 4) \ - (4x^4 + 4x^2 + 1)]dx = \pi \int_{-1}^{1} [-3x^4 + 3]dx =$$

$$V = \pi \left[-\frac{3x^5}{5} + 3x\right]_{-1}^{1} = \pi \left[\left(-\frac{3}{5} + 3\right) - \left(\frac{3}{5} - 3\right)\right] = \frac{24}{5}\pi$$

Pr. 9 – 69/26: Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou danej elementárnej oblasti okolo osi *x.*

$$y = \frac{8}{x},\ y = \frac{x}{2},\ y = 5$$

Dú: kap. 64 / 3, 8, 13, 17, 19, 22, 33, 35, 42, 45
68 / 2,6, 7, 9, 11, 13, 18, 22, 25, 29