Matematika 2 – 2.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Polynómy

Operácie s polynómami

Polynóm (mnohočlen) - $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ člen polynómu

$n = 0, 1, 2 \ldots, a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots a_0 \in R$ (koeficienty), $a_n \neq 0$

stupeň polynómu (napr. $x^4 + 2x^2 - 1 \rightarrow$ stupeň $n = 4$)

a) Sčítavanie (odčítavanie) polynómov - sčítame (odčítame) rovnaké koeficienty pri rovnakej mocnine premennej *x*

$(2x^3 + 5x - 4) \pm (x^3 + 8) =$

$\underline{2x^3 + x^3} + 5x \underline{- 4 + 8} = 3x^3 + 5x + 4$

$\underline{2x^3 - x^3} + 5x \underline{- 4 - 8} = x^3 + 5x - 12$

b) Násobenie polynómov – násobíme každý člen každým členom polynómu

$(x^3 + 2x - 5) \cdot (x + 1) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x - 5x - 5$

c) Delenie polynómov – podobne ako pri delení čísel, delíme dovtedy, kým zvyšok po delení bude mať stupeň menši ako stupeň polynómu, ktorým delíme

Pr. 1 - str. 7 / 3

$$(4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x) : (x^2 + x - 3) = 4x^2 - x + 11$$

$$-(4x^4 + 4x^3 - 12x^2)$$

$$0 - x^3 + 10x^2 + x$$

stupeň polynómu $n = 3 > 2$ stupeň polynómu, ktorým delíme

$\Downarrow$

pokračujeme v delení

$$-(-x^3 - x^2 + 3x)$$

$$0 + 11x^2 - 2x$$

$n = 2 = 2$

$\downarrow$

pokračujeme v delení

$$-(11x^2 + 11x - 33)$$

$$0 - 13x + 33$$

$n = 1 < 2 \rightarrow$ koniec delenia

zvyšok po delení

Výsledok - zápis:

I. $4x^2 - x + 11$ a zvyšok $-13x + 33$

II. $4x^2 - x + 11 + \dfrac{-13x + 33}{x^2 + x - 3}$

Pr. 2 - str. 7 / 1

$$(x^3 + 2x^2 - 2x + 1) : (x^2 - 1)$$

Pr.3 - str. 7 / 5

$$(x^4+4x^3+x^2+30x+14):(x^3+4x^2-x-4) = x + \frac{2x^2+34x+14}{x^3+4x^2-x-4}$$

$$-(x^4+4x^3-x^2-4x)$$

$$\overline{\qquad\qquad 2x^2+34x+14}$$

$n=2<3$ koniec dzielenia

Pr.4 - str. 7 / 8

$$(x^4-2x^3-5x^2-7x+31):(x^3-4x^2+x+6) = x+2+\frac{2x^2-15x+19}{x^3-4x^2+x+6}$$

$$-(x^4-4x^3+x^2+6x)$$

$$0+2x^3-6x^2-13x+31$$

$$-(2x^3-8x^2+2x+12)$$

$$0+2x^2-15x+19$$

$n=2<3$ koniec dzielenia

Pr.5 - str. 7 / 15

$$(x^5-6x^4+5x^3+26x^2-65x+30):(x^4-3x^3-2x^2+12x-8) = x-3$$

$$-(x^5-3x^4-2x^3+12x^2-8x)$$

$$0 \quad -3x^4+7x^3+14x^2-57x+30$$

$$-(-3x^4+9x^3+6x^2-36x+24)$$

$$0 \quad -2x^3+8x^2-21x+6$$

$w = 3 < 4$ koniec dzielenia

$$x-3+\frac{-2x^3+8x^2-21x+6}{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}$$

d) Kanonický rozklad polynómov – na súčin koreňových činiteľov

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_sx+q_s)$$

polynóm $\underline{n}$ stupňa má $\underline{n}$ koreňov $\Rightarrow$ súčin $\underline{n}$ zátvoriek

, ale sú korene rôzne,

nie sú násobné

Napr.: $x^4+2x^2+1 \Rightarrow$ má stupeň $n=4 \rightarrow$ 4 korene

a) ak sú rôzne $b_1, b_2, b_3, b_4 \rightarrow$ rozklad $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)$

$$x^4+2x^2+1 = (x-b_1)^1(x-b_2)^1(x-b_3)^1(x-b_4)^1 \qquad 4 = 1+1+1+1$$

b) ak je b_1 - 3 násobný koreň $\rightarrow$ rozklad $(x-b_1)^3(x-b_2)$

$$x^4+2x^2+1 = (x-b_1)^3(x-b_2)^1 \qquad 4 = 3+1$$

c) ak b_1, b_2 korene a ďalej sa nedá rozložiť v R

rozklad $x^4+2x^2+1 = (x-b_1)^1(x-b_2)^1(x^2+px+q) \qquad 4 = 1+1+2$

I: použitím vzorcov

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Pr.6 - str. 9 / 34

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Pr.7 - str. 9 / 35

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$ → koreń je -1, trojnásobný koreň

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$

$a = x$

$b = 1$

Pr.8 – str. 9 / 48

$$x^4 - 18x^2 + 81$$

Pr.9 – str. 9 / 47

$$x^4-8x^2+16 = (x^2-2^2)^2 = (x-2)^2(x+2)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$a^2=x^4 \qquad a=x^2$

$b^2=16 \rightarrow b=\sqrt{16}=4=2^2$

dva dvojnásobné kořeny, 2, -2

II: postupným vyberaním spoločných výrazov pred zátvorku

Pr.10 - str. 8 / 30

$$x^3 - x^2 + 4x - 4$$

III: postupným vyberaním spoločných výrazov pred zátvorku a použitím vzorcov

Pr.11 – str. 8 / 19

$$x^3-2x^2-x+2 = x(x^2-1)-2(x^2-1) = (x^2-1)(x-2) = (x-1)(x+1)(x-2)$$

a^2-b^2

tri korene → $1 \quad -1 \quad 2$

IV. Hornerova schéma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- určime možné korene ako podiel deliteľov absolútneho člena a_0 a koeficientu pri najvyššej mocnine a_n

$$\frac{\mathbf{D}(a_0)}{D(a_n)} = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \ldots . \pm\alpha_n\}$$

- ak súčet koeficientov polynómu (**$a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots + a_0$**) je rovný nule, potom jedným z koreňov je číslo 1
- ak sú koeficienty polynómu len **kladné čísla**, potom korene polynómu budú len záporné čísla

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0
α_1		$\alpha_1 . a_n$ +	$\alpha_1 (\alpha_1 . a_n + a_{n-1})$ +		+	
.	a_n	$\alpha_1 . a_n + a_{n-1}$				**0**

α_1 je koreň, ak vyjde 0

- začať rátať od najmenšieho celého koreňa

Pr.12 – str. 8 /22 $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ Polynóm stupňa 3, hľadáme tri korene.

možné korene $\frac{\mathbf{D(3)}}{\boldsymbol{D}\mathbf{(2)}} = \frac{\{\pm 1, \pm 3\}}{\{\pm 1, \pm 2\}} = \left\{\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\right\}$

$a_n + a_{n-1} + \ldots\ldots + a_0 = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$, 1 je určite koreň

	2	**3**	**-8**	**3**	
1		2	5	-3	
	2	5	-3	**0**	**je koreň**
-1		- 2	-3		
	2	3	-6	nie je koreň	
	2	5	-3	**0**	**je koreň**
-3		- 6	3		
	2	-1	**0**		

$(a_1x + a_0)$

$P\,(x) = (x - 1)(x + 3)(2x - 1)$

Pr.14 – str. 8 /23 Overte, či 1 a -2 sú korene polynómu, urobte jeho kanonický rozklad.

$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

možné korene $\frac{\mathbf{D(2)}}{\boldsymbol{D(3)}} = \frac{\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}\}}{\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{3}\}} = \left\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \pm\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right\}$

$a_n + a_{n-1} + \dots\dots + a_0 = 3 + 2 - 7 + 2 = 0$, 1 je určite koreň

	3	**2**	**-7**	**2**
1		3	5	-2
	3	5	-2	**0**
-2		- 6	2	
	3	-1	**0**	

$(a_1 x + a_0)$

$P(x) = (x - 1)(x + 2)(3x - 1)$

Pr.15 – str. 10 / 64

Overte, že 3 je trojnásobný koreň polynómu a zapíšte jeho kanonický rozklad.

$$5x^5 - 43x^4 + 117x^3 - 81x^2 - 54x = \boldsymbol{x(5x^4 - 43x^3 + 117x^2 - 81x - 54)}$$

	5	**-43**	**117**	**-81**	**-54**
3		15	-84	99	54
	5	-28	33	18	**0**
3		15	-39	-18	
	5	-13	-6	**0**	
3		15	6		
	5	2	**0**		

$$(a_1 x + a_0)$$

$$P(x) = x(x-3)^3(5x+2)$$

Dú: kap. 1.1 – 3, 4, 11, 12, 13, 20, 29, 40, 43, 45, 47, 51, 57, 67

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Výrazy a_n, a_{n-1}, ... a_0 v polynóme nazývame
   a) členy polynómu,
   b) koeficienty polynómu,
   c) stupne polynómu.

2. Výrazy $a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}$, ... , $a_1 x$, a_0 v polynóme nazývame
   a) členy polynómu,
   b) koeficienty polynómu,
   c) stupne polynómu.

3. **Stupeň** polynómu určuje
   a) najvyššia mocnina v polynóme,
   b) najnižšia mocnina v polynóme,
   c) súčet všetkých mocnín v polynóme.

4. Stupeň polynómu $P(x) = 4x^5 + 2x^3 - x + 2$ je
   a) 1,
   b) 3,
   c) 5,
   d) 0.

5. Vyberte polynóm, ktorého stupeň je rovný 3

a) $P(x) = -2x^4 + x^3 + 5$
b) $P(x) = x^2 - 8x + 9$
c) $P(x) = 8x^3 + x^2 - 2x$

6. Dva polynómy **sčítavame** tak, že

a) odčítame rovnaké koeficienty pri rovnakej mocnine x,
b) sčítame rovnaké koeficienty pri rovnakej mocnine x,
c) sčítame rovnaké koeficienty pri ľubovoľnej mocnine x.

7. Pri **násobení** dvoch polynómov

a) násobíme navzájom rovnaké členy,
b) násobíme navzájom každý člen prvého polynómu prvým členom druhého polynómu,
c) násobíme každý člen prvého polynómu každým členom druhého polynómu.

8. Pri **delení** dvoch polynómov delenie ukončíme, ak

a) zvyšok po delení bude mať rovnaký stupeň ako stupeň polynómu, ktorým delíme,
b) zvyšok po delení bude mať menší stupeň ako stupeň polynómu, ktorým delíme,
c) zvyšok po delení bude mať väčší stupeň ako stupeň polynómu, ktorým delíme.

9. Pri kanonickom rozklade polynómu pomocou Hornerovej určíme možné korene

a) ako podiel deliteľov koeficientov a_0 a a_n b) ako podiel deliteľov koeficientov a_n a a_0
c) ako súčin deliteľov koeficientov a_0 a a_n

10. Ak má polynóm $\mathrm{P(x)} = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ tri jednonásobné korene, jeho kanonický rozklad bude

a) $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$,

b) $(x - \alpha_1)^2(x - \alpha_2)$,

c) $(x - \alpha_1)^3$.

11. Polynóm $P(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2$ má

a) 4 jednonásobné korene,

b) 2 dvojnásobné korene,

c) 4 dvojnásobné korene.

12. Stupeň polynómu $P(x) = x^3(x + 2)^2(x - 1)$ je

a) 5,

b) 6,

c) 4.

13. Stupeň polynómu $\mathrm{P(x)} = (x + 5)(x^2 + x + 1)$ je

a) 1,

b) 2,

c) 3.

14. Pri kanonickom rozklade polynómu pomocou Hornerovej je číslo 1 koreňom polynómu

a) ak súčet koeficientov polynómu je rovný dvom,
b) ak súčet koeficientov polynómu je rovný jednej,
c) ak súčet koeficientov polynómu je rovný nule.

15. Pri kanonickom rozklade polynómu pomocou Hornerovej budú korene polynómu len záporné čísla

a) ak sú koeficienty polynómu len kladné čísla,
b) ak sú koeficienty polynómu len záporné čísla,
c) vždy.

16. Vyberte správny zápis kanonického rozkladu polynómu, ak jeho korene sú: 2, -3, 1.

a) $P(x) = (x-2)(x-3)(x-1)$
b) $P(x) = (x+2)(x+3)(x+1)$
c) $P(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$
d) $P(x) = (x+2)(x-3)(x-1)$

17. Ak kanonický rozklad polynómu je $P(x) = (x-4)(x+3)^3\,(x-1)$

a) polynóm má 5 koreňov a jeden dvojnásobný koreň,
b) polynóm má 4 korene a jeden trojnásobný koreň,
c) polynóm má 5 koreňov a jeden trojnásobný koreň,
d) polynóm má 5 koreňov a jeden dvojnásobný koreň.

18. Ak sú 4 a - 2 jednonásobné korene polynómu, ich zápis v kanonickom rozklade bude

a) $(x-4)(x+2)$,
b) $(x+4)(x-2)$,
c) $(x-4)(x-2)$.

19. Kanonický rozklad polynómu v vyjadrený pomocou Hornerovej schémy zapíšeme

a) $\mathrm{P(x)} = (x+1)(x^2-x-6)$,
b) $\mathrm{P(x)} = (x-1)(-x^2-x-6)$,
c) $\mathrm{P(x)} = (x-1)(x^2+x+6)$,

	1	0	5	-6
1		1	1	0
	1	1	6	

20. Prvý riadok Hornerovej schémy pre polynóm $\mathrm{P(x)} = (x^4+5x^2+x+1)$ bude

a)

1	5	1	1

b)

1	5	1	0	1

c)

1	0	5	1	1