NMPaMŠ – 10.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

2.Spojitá náhodná premenná

Distribučná funkcia F(x)

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

Vlastnosti:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) =$$
$$= P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Hustota pravdepodobnosti f(x)

Vlastnosti:

$$\text{ak existuje derivácia } F'(x), \text{ tak } F'(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R};$$

$$\text{tzv.„normalizačná podmienka“: } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Stredná hodnota náhodnej premennej E(X)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,dx$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Analógia medzi rozdeleniami náhodnej premennej

veličina	Diskrétne rozdelenie	Spojité rozdelenie
distribučná funkcia	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$	$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$
pravdepodobnosť / hustota pravdepodobnosti	$P(X = x_i) = p_i$ $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$	$f(x)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
stredná hodnota	$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$
disperzia	$D(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 p_i$	$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\,dx$
smerodajná odchýlka	$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$	$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Pr. 1:

(a) Nech $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } \; x \leq -1, \\ k \cdot (x+1) & \text{for } \; -1 < x < 2, \\ 0 & \text{for } \; x \geq 2. \end{cases}$

i. Vypočítajte konštantu k tak, aby f bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X.

ii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.

iii. Vypočítajte $P(-1 \leq X < 1)$.

iv. Nájdite predpis distribučnej funkcie.

i

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{2} k(x+1)\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = 0 + \left[k\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right]_{-1}^{2} + 0$$

$$4k + \frac{k}{2} = 1$$

$$9k = 2$$

$$k = \frac{2}{9}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{2}{9}(x+1) & -1 < x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

Pr. 1:

ii)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x)\, dx$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{-1} x \cdot 0\, dx + \int_{-1}^{2} \frac{2}{9}(x+1) \cdot x\, dx + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0\, dx = \int_{-1}^{2} \frac{2}{9}(x^2 + x)\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{2} = \frac{28}{27} - \frac{2}{54} = \frac{54}{54} = 1$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\, dx + \int_{-1}^{2} (x - 1)^2\, \frac{2}{9}(x+1)\, dx + \int_{2}^{\infty} 0\, dx =$$

$$= \frac{2}{9}\int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 1)(x+1)\, dx = \frac{2}{9}\int_{-1}^{2} (x^3 - x^2 - x + 1)\, dx$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}$$

Pr. 1:

iii

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$P(-1 \le X < 1) = \int_{-1}^{1} \frac{2}{9}(x+1)\,dx = \left[\frac{2}{9}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_{-1}^{1} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$$

iv

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \frac{1}{9}(x+1)^2 & -1 < x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$x \le -1$ $\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

$-1 < x \le 2$ $\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{2}{9}(t+1)\,dt = 0 + \frac{2}{9}\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{x}$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{x^2}{2}+x\right] - \frac{2}{9}\left[\frac{1}{2}-1\right] = \frac{1}{9}(x^2+2x+1) = \frac{1}{9}(x+1)^2$$

$x > 2$ $\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_{-1}^{2} \frac{2}{9}(t+1)\,dt + \int_{2}^{x} 0\,dt = 1$

Pr. 2:

(f) Daná je funkcia: $F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 1, \\ b \cdot (x^2 - 1), & \text{ak } 1 \le x \le 3, \\ c, & \text{ak } x > 3. \end{cases}$

i. Stanovte parametre a, b tak, aby $F(x)$ bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X.

ii. Určte hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej premennej X.

iii. Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X.

iv. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(0 \le X < 2)$.

i

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

$\lim_{x \to -\infty} a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 0}}$ $\qquad$ $\lim_{x \to \infty} c = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$

$x = 1 \qquad b(1-1) = 0$

$b \cdot 0 = 0$

$x = 3 \qquad b(9-1) = 1$

$\underline{\underline{b = \frac{1}{8}}}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{8}(x^2 - 1) & 1 \le x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

Pr. 2:

ii $\quad f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} 2x = \frac{x}{4} & x \in \langle 1, 3 \rangle \\ 0 & x \notin \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$$

iii

$$E(x) = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot x \, dx + \int_{1}^{3} \frac{x}{4} x \, dx + \int_{3}^{\infty} 0 \, dx = \int_{1}^{3} \frac{x^2}{4} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{12} \right]_1^3 = \frac{27}{12} - \frac{1}{12} = \frac{26}{12} = \underline{\underline{\frac{13}{6}}}$$

iv

$$P(0 \leq x < 2) = \int_{0}^{1} 0 \, dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{4} x \, dx = 0 + \left[\frac{x^2}{8} \right]_1^2 = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

Rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej

Exponenciálne rozdelenie

Dané $\lambda \in R^+$ (v príkladoch zadané ako stredná, priemerná hodnota).

Hustota pravdepodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & pre\ x \geq 0, \\ 0 & pre\ x < 0, \end{cases}$$

Distribučná funkcia

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0 \end{cases}$$

označenie $X \sim exp(\lambda)$.

Stredná hodnota **Disperzia (rozptyl)** **Smerodajná odchýlka**

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda^2 \quad a \quad \sigma(X) = \lambda.$$

Pr. 3:

(a) Priemerná doba životnosti súčiastky je 600 hodín. Doba životnosti má exponenciálne rozdelenie. Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne vybraná súčiastka bude fungovať

i. menej ako 800 hodín,
ii. viac ako 500 hodín,
iii. viac ako 600, ale menej ako 700 hodín.
iv. Určte takú hodnotu t, že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude dlhšia ako t hodín, je 0,9.

i. $\lambda = 600$ $\quad X \sim exp(600)$

$$P(X \leq 800) = F(800) = 1 - e^{-\frac{800}{600}} \doteq 0{,}7364$$

ii. $$P(X > 500) = 1 - F(500) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{500}{600}}\right) = 0{,}4346$$

iii. $$P(600 < X < 700) = F(700) - F(600) = 1 - e^{-\frac{700}{600}} - \left(1 - e^{-\frac{600}{600}}\right)$$
$$= 0{,}0564$$

iv. $$P(X > t) = 0{,}9$$
$$1 - F(X \leq t) = 0{,}9$$

$$1 - 0{,}9 = F(X \leq t)$$
$$1 - 0{,}9 = 1 - e^{-\frac{t}{600}}$$
$$0{,}9 = e^{-\frac{t}{600}}$$
$$t = -600 \cdot \ln 0{,}9 = 63{,}27 \text{ hod.}$$

Dú:

(e) Nech $f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{ak } x \in (0,2), \\ 0, & \text{ak } x \notin (0,2). \end{cases}$

i. Určte hodnotu parametra a tak, aby f bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X.
ii. Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X.
iii. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(1 < X \leq 2)$.
iv. Nájdite predpis distribučnej funkcie.

[i) $a = -\frac{1}{2}$; ii) $E(X) = \frac{2}{3}$; iii) $\frac{1}{4}$; iv) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 2; \\ \frac{1}{4}(4x - x^2) & \text{pre } x \in \langle 2,4 \rangle; \\ 1 & \text{pre } x > 2. \end{cases}$]

(h) Daná je funkcia

$$F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 0, \\ x+b, & \text{ak } 0 \leq x \leq 1, \\ c, & \text{ak } x > 1. \end{cases}$$

i. Stanovte parametre a, b, c tak, aby $F(x)$ bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X.
ii. Určte hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej premennej X.
iii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.

[i) $a = b = 0, c = 1$; ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0,1 \rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle 0,1 \rangle; \end{cases}$; iii) $E(X) = \frac{1}{2}$, $D(X) = \frac{1}{12}$] gebreak

(b) Doba životnosti elektronickej súčiastky má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 800 hodín. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

i. súčiastka sa nepokazí v priebehu 1000 hodín,
ii. súčiastka sa pokazí skôr ako za 600 hodín,
iii. súčiastka sa pokazí neskôr ako za 500 hodín, ale skôr ako za 800 hodín.
iv. Určte takú hodnotu t, že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude dlhšia ako t hodín, je 0,95.

[i) 0,2865; ii) 0,5263; iii) 0,16746; iv) $t = 41,03$ hod.]