NMPaMŠ – 11.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej

Exponenciálne rozdelenie

Dané $\lambda \in R^+$ (v príkladoch zadané ako stredná, priemerná hodnota).

Hustota pravdepodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0, \\ 0 & \text{pre } x < 0, \end{cases}$$

Distribučná funkcia

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0 \end{cases}$$

označenie $X \sim exp(\lambda)$.

Stredná hodnota **Disperzia (rozptyl)** **Smerodajná odchýlka**

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda^2 \quad a \quad \sigma(X) = \lambda.$$

Pr. 1:

(a) Priemerná doba životnosti súčiastky je 600 hodín. Doba životnosti má exponenciálne rozdelenie. Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne vybraná súčiastka bude fungovať

i. menej ako 800 hodín,

ii. viac ako 500 hodín,

iii. viac ako 600, ale menej ako 700 hodín.

iv. Určte takú hodnotu t, že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude dlhšia ako t hodín, je 0,9.

i $\quad \lambda = 600 \qquad X \sim \exp(600)$

$$P(X \leq 800) = F(800) = 1 - e^{-\frac{800}{600}} \doteq 0,7364$$

ii $$P(X > 500) = 1 - F(500) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{500}{600}}\right) = 0,4346$$

iii $$P(600 < X < 700) = F(700) - F(600) = 1 - e^{-\frac{700}{600}} - \left(1 - e^{-\frac{600}{600}}\right)$$

$$= 0,0564$$

iv $$P(X > t) = 0,9$$

$$1 - F(X \leq t) = 0,9$$

$$1 - 0,9 = F(X \leq t)$$

$$1 - 0,9 = 1 - e^{-\frac{t}{600}}$$

$$0,9 = e^{-\frac{t}{600}}$$

$$t = -600 \cdot \ln 0,9 = 63,27 \text{ hod.}$$

Dú:

(e) Nech $f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{ak } x \in (0,2), \\ 0, & \text{ak } x \notin (0,2). \end{cases}$

i. Určte hodnotu parametra a tak, aby f bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X.
ii. Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X.
iii. Vypočítajte pravdepodobnosť $P(1 < X \leq 2)$.
iv. Nájdite predpis distribučnej funkcie.

[i) $a = -\frac{1}{2}$; ii) $E(X) = \frac{2}{3}$; iii) $\frac{1}{4}$; iv) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 2; \\ \frac{1}{4}(4x - x^2) & \text{pre } x \in \langle 2, 4\rangle; \\ 1 & \text{pre } x > 2. \end{cases}$]

(h) Daná je funkcia

$$F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 0, \\ x+b, & \text{ak } 0 \leq x \leq 1, \\ c, & \text{ak } x > 1. \end{cases}$$

i. Stanovte parametre a, b, c tak, aby $F(x)$ bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X.
ii. Určte hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej premennej X.
iii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.

[i) $a = b = 0, c = 1$; ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0,1\rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle 0,1\rangle; \end{cases}$; iii) $E(X) = \frac{1}{2},\ D(X) = \frac{1}{12}$] gebreak

(b) Doba životnosti elektronickej súčiastky má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 800 hodín. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

i. súčiastka sa nepokazí v priebehu 1000 hodín,
ii. súčiastka sa pokazí skôr ako za 600 hodín,
iii. súčiastka sa pokazí neskôr ako za 500 hodín, ale skôr ako za 800 hodín.
iv. Určte takú hodnotu t, že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude dlhšia ako t hodín, je 0,95.

[i) 0,2865; ii) 0,5263; iii) 0,16746; iv) $t = 41,03$ hod.]

Rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej

Normálne rozdelenie

Dané $\mu \in R$, $\sigma \in R^+$ (v príkladoch zadané ako stredná hodnota, smerodajná odchýlka).

označenie $X \sim norm(\mu, \sigma)$

Distribučná funkcia – F(x)

Normovanie náhodnej premennej X pre normálne rozdelenie, po normovaní nová náhodná premenná Y

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}, \qquad Y \sim norm(0,1)$$

Distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia – Φ (Y)

Vlastnosti Φ (Y)

$\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$ pre každé $y \in R$.

$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Pr. 2:

(b) Výška dospelého muža má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 177 cm smerodajnou odchýlkou 5 cm. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

i. náhodne vybratý muž má výšku menšiu ako 180 cm,
ii. náhodne vybratý muž má výšku väčšiu ako 170 cm,
iii. náhodne vybratý muž má výšku v intervale $\langle 165\text{ cm}, 192\text{ cm}\rangle$.

$\mu = 177$ cm, $\sigma = 5$ cm

i. $P(X < 180\text{ cm}) = F(180) = \phi\left(\frac{180-177}{5}\right) = \phi(0{,}6) = 0{,}72575$

ii. $P(X > 160\text{ cm}) = 1 - P(X < 160) = 1 - F(160) =$

$= 1 - \phi\left(\frac{160-177}{5}\right) = 1 - \phi(-1{,}4) =$

$= 1 - (1 - \phi(1{,}4)) = \phi(1{,}4) = 0{,}91924$

hodnotu určíme z tab. pre distribučnú funkciu ϕ normálneho normovaného rozdelenia

Pr. 2:

(b) Výška dospelého muža má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 177 cm smerodajnou odchýlkou 5 cm. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

i. náhodne vybratý muž má výšku menšiu ako 180 cm,
ii. náhodne vybratý muž má výšku väčšiu ako 170 cm,
iii. náhodne vybratý muž má výšku v intervale $\langle 165\ \mathrm{cm}, 192\ \mathrm{cm}\rangle$.

iii. $P(165 < X < 192\ \mathrm{cm}) = F(192) - F(165) =$

$$= \phi\left(\frac{192-177}{5}\right) - \phi\left(\frac{165-177}{5}\right) =$$

$$= \phi(3) - \phi(-2,4) = \phi(3) - (1 - \phi(2,4)) =$$

$$= 0,99865 - 1 + 0,9918 = 0,99045$$

Matematická štatistika

Triedenie dát:

- **Prosté triedenie** – usporiadanie podľa veľkosti $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, kde x_i sú namerané hodnoty.
- **Triedenie podľa početnosti** – pre každú nameranú hodnotu x_j je n_j počet výskytov hodnoty x_j medzi nameranými hodnotami, napr.

x_j	167	170	174	175	178	180
n_j	1	3	5	6	3	2

,

Výberový priemer náhodného výberu V_n *je číslo*

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ *pre prosté triedenie,*

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j x_j$ *pre triedenie podľa početnosti.* $\left(n = \sum\limits_{j=1}^{k} n_j\right)$

Modifikovaný výberový rozptyl (disperzia) náhodného výberu V_n *je číslo*

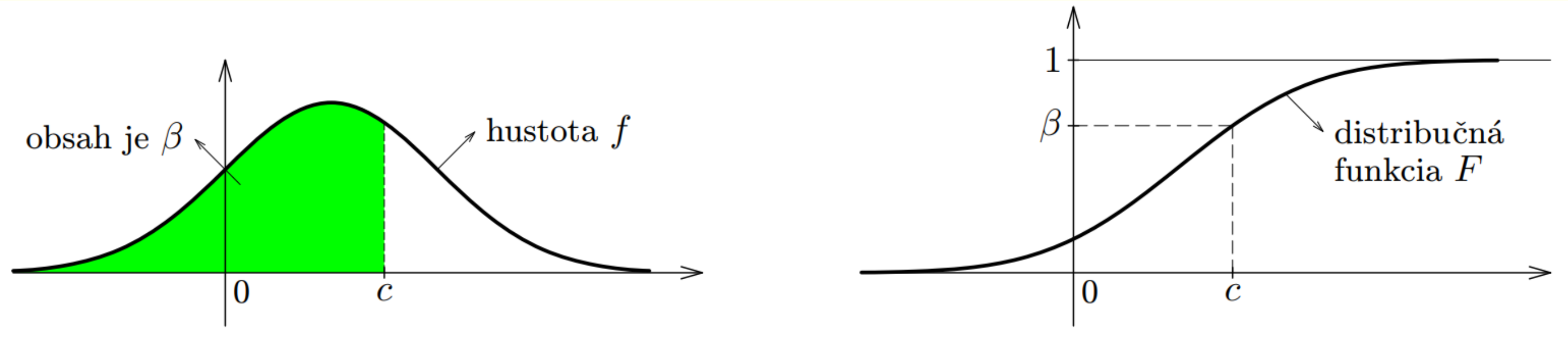
$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ *pre prosté triedenie,*

$s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k}(x_j - \overline{x})^2\, n_j$ *pre triedenie podľa početnosti.*

Modifikovaná výberová odchýlka náhodného výberu V_n *je číslo* $s^* = \sqrt{s^{*2}}$

β - kvantil

Najmenšie reálne číslo c, že $F(c) \geq \beta$ nazývame β-kvantilom rozdelenia pravdepodobnosti F a označujeme ho $c = F^{-1}(\beta)$.



RP – rozdelenie pravdepodobnosti

DF – distribučná funkcia

NP - náhodná premenná

β – kvantil = hodnota z tabuľky

Názov RP	NP	DF	β-kvantil
Normovaná normálna	Y	Φ	$\Phi^{-1}(\beta) = y_\beta$
Chí-kvadrát	χ^2	χ^2_n	$\chi^2_{\beta,n}$
Studentovo t	T	t_n	$t_{\beta,n}$
Fisherovo	F	$F_{n,m}$	$F_{\beta;n,m}$

Intervaly spoľahlivosti

Hladina významnosti α **-** pravdepodobnosť, že náš štatistický záver je chybný, $\alpha \in (0,1)$

Intervalový odhad ***Q*** **na hladine významnosti** α **-** číselný interval $\langle Q_1, Q_2 \rangle$, v ktorom leží *Q* s pravdepodobnosťou 1 - α

1 - α **-** koeficient spoľahlivosti intervalového odhadu $\langle Q_1, Q_2 \rangle$

a) Intervaly spoľahlivosti pre μ (σ - známe)

s^*

Obojstranný interval

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

výberový priemer

Ľavostranný interval **Pravostranný interval**

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \infty \right), \quad \textit{resp.} \quad \mu \in \left(-\infty \, , \, \overline{x} + y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

počet prvkov

β – kvantil pre normálne rozdelenie - hodnota z tabuľky

b) Intervaly spoľahlivosti pre μ (σ - neznáme)

Obojstranný interval

s^*

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \,,\, \overline{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

Ľavostranný interval **Pravostranný interval**

$$\mu \in \left\langle \overline{x} - t_{1-\alpha,\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \,,\, \infty \right), \quad resp. \;\; \mu \in \left(-\infty \,,\, \overline{x} + t_{1-\alpha,\, n-1} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

β – kvantil pre Studentovo rozdelenie - hodnota z tabuľky

b) Intervaly spoľahlivosti pre σ^2 (μ - neznáme)

Obojstranný interval

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}},\quad \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}} \right\rangle$$

Ľavostranný interval

Pravostranný interval

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha,\, n-1}},\quad \infty \right) \quad \textit{resp.} \quad \sigma^2 \in \left(0,\quad \frac{(n-1)\cdot s^{*2}}{\chi^2_{\alpha,\, n-1}} \right\rangle$$

β – kvantil pre χ^2 rozdelenie - hodnota z tabuľky

Pr. 3:

(a) Kontrolór nameral nasledujúce hodnoty objemu fliaš Coca-Coly:

0,49; 0,5; 0,48; 0,47; 0,505; 0,485; 0,49; 0,495; 0,5; 0,48.

i. Určte 95%- ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu a disperziu.
ii. Nájdite 99% -ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.
iii. Na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 0{,}5$ oproti hypotéze $H_1 : \mu < 0{,}5$.

rozdelenie podľa početnosti

x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
0,47	1	$3{,}8025 \cdot 10^{-4}$	$3{,}8025 \cdot 10^{-4}$
0,48	2	$0{,}9025 \cdot 10^{-4}$	$1{,}805 \cdot 10^{-4}$
0,485	1	$0{,}2025 \cdot 10^{-4}$	$0{,}2025 \cdot 10^{-4}$
0,49	2	$0{,}0025 \cdot 10^{-4}$	$0{,}005 \cdot 10^{-4}$
0,495	1	$0{,}3025 \cdot 10^{-4}$	$0{,}3025 \cdot 10^{-4}$
0,5	2	$1{,}1025 \cdot 10^{-4}$	$2{,}205 \cdot 10^{-4}$
0,505	1	$2{,}4025 \cdot 10^{-4}$	$2{,}4025 \cdot 10^{-4}$

(i)

$n = 10$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} x_i n_i = 0{,}4895$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 n_i$$

$$\doteq 0{,}00011916$$

$$\sigma = s^* = \sqrt{s^{*2}} = 0{,}0109161$$

Pr. 3:

určujeme μ, kde σ^2 je neznáme

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \ \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

$$\mu \in \left\langle 0{,}4895 - 2{,}2622 \cdot \frac{0{,}01092}{\sqrt{10}}, \ 0{,}4895 + 2{,}2622 \cdot \frac{0{,}01092}{\sqrt{10}} \right\rangle$$

$$\mu \in \left\langle 0{,}48168, \ 0{,}497311 \right\rangle$$

$1 - \alpha = 0{,}95$

$\alpha = 0{,}05$

$t_{1-\frac{0{,}05}{2}, 10-1} = t_{0{,}975, 9} = 2{,}2622 \rightarrow$ z tabuľky, s-kvantil Studentovo-t rozdel.

Pr. 3:

určujeme σ^2, kde μ je neznáme

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1)\, s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}} \, , \, \frac{(n-1)\, s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}} \right\rangle$$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$ $\quad \sigma^2 \in \langle 0{,}00005637 ,\ 0{,}000397144 \rangle$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} = \chi^2_{0{,}975;\, 9} = 19{,}023$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1} = \chi^2_{0{,}025;\, 9} = 2{,}7004$$

z tabuľky p-kvantil χ^2 rozdelenie

Dú:

(a) Pružnosť náhodne vybratého výrobku má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 3,5 a smerodajnou odchýlkou 0,4. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

i. náhodne vybratý výrobok je má pružnosť menšiu ako 3,7,

ii. náhodne vybratý výrobok je má pružnosť väčšiu ako 3,1,

iii. náhodne vybratý výrobok je má pružnosť v intervale $\langle 3,2,5,2\rangle$.

[i) 0,69146; ii) 0,84134; iii) 0,77336]

(c) Pevnosť v ťahu náhodne vybratého výrobku má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 2,4 a smerodajnou odchýlkou 0,6. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

i. náhodne vybratý výrobok je má pevnosť v ťahu menšiu ako 4,

ii. náhodne vybratý výrobok je má pevnosť v ťahu väčšiu ako 2,2,

iii. náhodne vybratý výrobok je má pevnosť v ťahu v intervale $\langle 2,1;5,2\rangle$.

[i) 0,99621; ii) 0,6293; iii) 0,69146]