NMPaMŠ – 6.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

2. Simpsonova metóda

Pr. 1: Vypočítajte daný integrál Simpsonovou metódou pre n = 8 delení a urobte odhad chyby výpočtu.

$$\int_1^3 \sqrt{1+2x}\,dx$$

1. **Vypočítame krok delenia h pomocou n delenia intervalu $\langle a, b\rangle$. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme x_i , $f(x_i)$**

i	x_i	$f(x_i)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

2. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(n) = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right]$$

3. vypočítame M_4

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f^{(4)}(x)|$$

4. horný odhad chyby

$$|R_s(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180 n^4}$$

Pr. 2: Vypočítajte daný integrál Simpsonovou metódou pre n = 6 delení a urobte odhad chyby výpočtu.

$$\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$$

a = 0, b = 1, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}$

i	**x_i**	**$f(x_i) = e^x$**
0	0	1
1	1/6	1,18136
2	2/6	1,39561
3	3/6	1,64872
4	4/6	1,94773
5	5/6	2,30098
6	1	2,71828

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(n) = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right]$$

$$S(6) = \frac{1}{18}[1 + 2{,}71828 + 4.5{,}13106 + 2.3{,}34334] = 1{,}71829$$

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f^{(4)}(x)|$$

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |e^x| = 2{,}71829$$

$$f(x) = e^x$$

$$f^4(x) = e^x$$

$$|R_s(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180 n^4}$$

$$|R_s(n)| \leq \frac{(1-0)^5 .\, 2{,}17829}{180.\, 6^4} = 0{,}00001$$

$\int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x \approx S(6) = 2{,}71829$ s chybou $0{,}00001$

Dú:

Pre zadaný počet n delení vypočítajte Simpsonovou metódou integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ a urobte odhad chyby výpočtu.

5.10.

$$\int_0^5 \frac{dx}{1+x}\,, \qquad n = 10$$

[S(10) = 1,79315, $R_S(10)$ = 0,04167]

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Vzťah $h = \frac{b-a}{n}$ vyjadruje
   a) počet delení intervalu $\langle a, b\rangle$,
   b) krok delenia intervalu $\langle a, b\rangle$,
   c) hornú hranicu integrálu.

2. Hodnota M_4 pri Simpsonovej metóde je daná
   a) $\min_{x\in(a,b)} \left|f^{(4)}(x)\right|$,
   b) $\max_{x\in(a,b)} \left|f^{(4)}(x)\right|$,
   c) $\max_{x\in(a,b)} |f''(x)|$.

3. Horná odhad chyby pri Simpsonovej metóde je daný
   a) $R_s(n) \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$,
   b) $R_s(n) \geq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4$,
   c) $R_s(n) \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4$.

4. Vzťah $\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i})\right]$ používame na

a) výpočet chyby pri Simpsonovej metóde,
b) aproximáciu hodnoty integrálu pri Simpsonovej metóde,
c) na delenie delenia intervalu $\langle a, b\rangle$ pri Simpsonovej metóde.

5. Je daný integrál $\int_2^5 (x^2+1)dx$, *n* = 5. Hodnota x_3 v tabuľke je
a) 2 b) 3,2 c) 3,8 d) 4,4.

6. Hodnota x_0 v tabuľke (pri tých istých podmienkach ako v otázke 5) je
a) 2 b) 3,8 c) 3,2 d) 4,4.

7. Hodnota *f*(x_1) v tabuľke (pri tých istých podmienkach ako v otázke 5) je
a) 5 b) 11,24 c) 7,76 d) 26.

8. V tabuľke (otázka 5) je interval $\langle a, b\rangle$ rozdelení na
a) 3 rovnako široké intervaly,
b) 5 rovnako široké intervaly,
c) 4 rovnako široké intervaly.

9. Je daný integrál $\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx$ a n = 6 potom krok delenia intervalu $\langle a, b\rangle$ je

a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{2}{6}$, c) $\frac{5}{3}$, d) $\frac{1}{6}$.

10. Je daný integrál $\int_1^4 x^4 dx$, n = 6, M_4 = 24. Chyba výpočtu je

a) $R_s(6)$ = 0,25, b) $R_s(24)$ = 0,025, c) $R_s(6)$ = 0,025 .

Správne odpovede:
1b, 2b, 3c, 4b, 5c, 6a, 7c, 8b, 9a, 10c

Hodnotenie:
0 – 2 nesprávne odpovede – máš vedomosti o výpočte integrálu funkcie pomocou Simpsonovej metódy
3 - 5 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré
6 a viac nesprávnych odpovedí – tvoje vedomosti nie sú postačujúce, odporúčam sa na to ešte raz pozrieť

Kombinatorika

Princíp násobenia

Ak činnosť pozostáva z k krokov po sebe nasledujúcich a
prvý krok môže byť uskutočnený n_1 spôsobmi,
druhý krok môže byť uskutočnený n_2 spôsobmi,
$\vdots$
k-ty krok môže byť uskutočnený n_k spôsobmi,
tak počet rôznych spôsobov vykonania činnosti je $n_1 \cdot n_2 \ldots n_k$.

Princíp sčítania

Majme množiny $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ktoré sú po dvojiciach disjunktné. Nech $|A_i| = n_i$.
Potom $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Permutácie

Permutácie sú usporiadané n-tice prvkov n-prvkovej množiny. Ak sú všetky prvky navzájom rôzne, jedná sa o permutácie bez opakovania. Ak sú niektoré prvky množiny rovnaké, jedná sa o permutácie s opakovaním.
Počet permutácií n-tej triedy bez opakovania je

$$P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Počet permutácií n-tej triedy s opakovaním je

$$P'_{n_1,n_2,\dots,n_c}(n) = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdot \ldots \cdot n_c!} \qquad (n_1 + n_2 + \dots + n_c = n)$$

Variácie

Variácie sú usporiadané k-tice z n navzájom rôznych prvkov. Rozoznávame variácie bez opakovania a variácie s opakovaním.
Počet variácií k-tej triedy z n prvkov ($k \leq n$) je

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

V prípade $n = k$ dostávame permutácie.

Počet variácií k-tej triedy z n prvkov s opakovaním je

$$V'(n,k) = n^k.$$

Pri variáciách s opakovaním môže byť $k > n$.

Závisí na poradí prvkov.

Kombinácie

Kombinácie sú podmnožiny danej veľkosti odobraté z daného vstupného súboru.
Počet prvkov súboru označíme n a počet prvkov podmnožiny označíme k.
Počet kombinácií z n prvkov k-tej triedy $(k \leq n)$ je

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ak $n = k$, dostávame $C(n,n) = 1$.

Nezávisí na poradí prvkov.

Pre kombinačné čísla platí:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n.$$

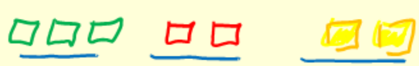
Pr. 1: a) Koľkými spôsobmi môžeme usadiť za stôl päť hostí?

b) Ako by sa zmenilo rozsadenie, ak jeden hosť chce sedieť na prvom mieste?

Pr. 2: Na poličke treba rozostaviť vedľa seba 3 zelené, 2 červené a 2 žlté hrnčeky.

a) Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť?

b) Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť, ak hrnčeky rovnakej farby stoja vedľa seba?

b)  ako tri prvky $\Rightarrow$ $P(3) = 3! = 6$

Pr. 3: Koľko je párnych prirodzených čísel, v zápise ktorých sa vyskytujú cifry 2, 3, 4, 5 iba raz?

Pr. 4: Koľko je 4 – ciferných prirodzených čísel deliteľných 4, v ktorých sa vyskytujú iba číslice 1, 2, 3, 4, 5 a každé z nich sa môže ľubovoľne opakovať.

variácie – výber 4-tíc z 5, s opakovaním 1, 2, 3, 4, 5

číslo je deliteľné 4, ak jeho posledné dvojčíslie je deliteľné 4

$\_\ \_\ (\_\ \_)$ 12, 24, 32, 44, 52 je ich 5

tu vyberám 2 zo 5, môžu sa opakovať $V'(5,2) = 5^2$

variácie s opakovaním

5 možností

$\underline{5}\ \underline{5}\ (\_\ \_)$

Spolu $5^2 \cdot 5 = 125$

Pr. 5: Hokejový zápas sa skončil víťazstvom domácich 11:7, pričom po 1. tretine bol stav 4:6, po druhej 9:7. Koľko rôznych priebehov mohol mať tento zápas?

Dú:

K1:

Koľko rôznych päťciferných prirodzených čísiel možno napísať pomocou číslic 1,2,3,4,5, ak:

a) číslica sa v čísle použije len raz? (120)
b) Koľko z napísaných čísiel sa bude začínať číslicou 5? (24)
c) Koľko z napísaných čísiel bude párnych? (48)

K2:
Dané sú tri prvky **a**, **b**, **c**.
A) Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť, ak sa prvky nemôžu opakovať? (6)
B) Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť, ak sa prvok **a** opakuje 2- krát, **b** – raz a **c** – raz. (12)

K3:
Koľko je všetkých 3 – ciferných prirodzených čísel? (900)

K4:
Angličania obyčajne dávajú svojím deťom niekoľko mien. Koľkými spôsobmi sa dá pomenovať novorodenec nie viac ako 3 menami, ak je k dispozícii 300 rôznych mien? (26 820 600)

Dú:

K5: Koľko trikolór možno zostaviť zo 7 farieb?   (35)

K6:
Desať ľudí sa má ubytovať v 3 izbách. Jedna izba je štvorposteľová a dve trojposteľové. Koľkými spôsobmi možno hostí rozmiestniť v týchto izbách?   (4200)