NMPaMŠ – 7.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pravdepodobnosť

Klasická pravdepodobnosť

Jav (A) - výsledok pokusu, ktorý je možné opakovať za určitých podmienok niekoľkokrát

Istý jav *I*, nemožný jav 0.

Pravdepodobnosť javu A

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$P(A) = \frac{\text{počet všetkých možných priaznivých výsledkov javu } A}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu}}$$

Pre istý a nemožný jav je $P(I) = 1$ *a* $P(\emptyset) = 0$.

Pre opačný jav platí $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

<ins>Žiadny </ins>= znamená 0 a nie viac

<ins>Najviac</ins> 3 = znamená 0, 1, 2, 3 a nie viac

<ins>Aspoň 2</ins> = znamená dva a viac

<ins>Najmenej</ins> 5 = znamená 5 a viac

Pr. 1:

7.3.

Na poličke je náhodne rozostavených 20 rôznych kníh, medzi ktorými sú 4 knihy o počítačoch. Aká je pravdepodobnosť toho, že tieto 4 knihy sú postavené vedľa seba?

[1/285]

Pr. 2:

7.6.

Každá z troch krabíc obsahuje 10 lístkov očíslovaných od 1 do 10. Z každej krabice je náhodne vytiahnutý jeden lístok. Určte pravdepodobnosť toho, že súčet čísel na vytiahnutých lístkoch je väčší ako 4. [0,996]

Pr. 3:

7.11.

Máme 10 vstupeniek po 200 Sk, 3 vstupenky po 300 Sk a 2 po 500 Sk. Náhodne vyberieme 3 vstupenky. Určte pravdepodobnosť toho, že aspoň 2 z týchto vstupeniek budú mať rovnakú cenu. [79/91]

Pr. 4: **7.19.**

Zo sady 32 kariet náhodne vyberieme 5. Aká je pravdepodobnosť toho, že medzi nimi budú aspoň 3 rovnakej farby? [0,3415]

n - výber 5 kariet z 32 kariet (8 kariet x 4 farby)

A - vo výbere 5 kariet budú aspoň 3 rovnakej farby

(3 a viac = 3 a 4 a 5)

$$m = \left[\underbrace{\binom{8}{3}\binom{24}{2}}_{\text{3 karty rovnakej farby}} + \underbrace{\binom{8}{4}\binom{24}{1}}_{\text{4 karty rovnakej farby}} + \underbrace{\binom{8}{5}\binom{24}{0}}_{\text{5 kariet}} \right] \cdot 4 \text{ rôzne farby}$$

$m = 68768$

$$n = C(32,5) = \frac{32!}{5!\ 27!} = 201\ 376$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{68\ 768}{201\ 376}$$

$P(A) = 0,3415$

Pr. 5: **7.15.**

Počet bielych ako aj čiernych guľôčok v urne je 7. Určte pravdepodobnosť toho, že medzi šiestimi náhodne vybranými guľôčkami bude práve $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ bielych guľôčok.

[0,0023; 0,0490; 0,2448; 0,4079; 0,2448; 0,0490; 0,0023]

k							
P (A_k)							

Dú:

7.4.

Študent chce telefonovať svojmu priateľovi, ale zabudol posledné dvojčíslie jeho telefónneho čísla. Pamätal si však, že tieto 2 číslice sú rôzne a nepárne. Zvolil ich teda náhodne. Aká je pravdepodobnosť toho, že ich uhádol? [1/20]

(a) Číslice 1, 2, 3, 4, 5 sú po jednej napísané na piatich lístkoch. Náhodne vyberieme tri lístky a uložíme ich vedľa seba. Určte pravdepodobnosť toho, že takto vzniknuté trojciferné číslo bude párne. [0,4]

(c) Na poličke je náhodne položených 17 rôznych kníh, medzi ktorými je trojdielny román. Určte pravdepodobnosť toho, že

a) diely románu sú postavené vedľa seba;

b) diely románu sú usporiadané vedľa seba podľa náväznosti zľava doprava. [a) $\frac{3}{136}$; b) $\frac{1}{272}$]

(k) Triedny učiteľ zistil, že 12 z 20 študentov býva na stredoškolskom internáte. Náhodne vyberieme 8 študentov. Aká je pravdepodobnosť, že

a) 6 študenti bývajú na stredoškolskom internáte,

b) najmenej 3 študenti bývajú na stredoškolskom internáte. [a) 0,20538; b) 0,98456]

7.16.

Medzi 100 výrobkami je 15 % nepodarkov. Na kontrolu kvality náhodne vyberieme 10 kusov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že medzi nimi bude najviac k = 1, 2, ... , 5 nepodarkov. [0,5375 ; 0,8295 ; 0,9592 ; 0,9937 ; 0,9994]

Pravdepodobnosť
Podmienená pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B (ak nastal jav B, potom pre jav A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pravdepodobnosť javu B za predpokladu, že nastal jav A (ak nastal jav A, potom pre jav B)

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Vlastnosti pravdepodobnosti

Pre disjunktné javy: ak $A \cap B = \emptyset$, *tak* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

pre ľubovoľné javy A, B *je* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

Veta o úplnej pravdepodobnosti

Nech $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy (t. j. úplný systém disjunktných javov). Potom pre ľubovoľný jav A platí

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \cdots + P(A|H_n) \cdot P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i).$$

Bayesov vzorec

Nech javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy a $A \in \tau$ je ľubovoľný jav, pre ktorý je $P(A) \neq 0$. Potom pre každú hypotézu H_k je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Okrem toho platí $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1$.

Pr. 1:

(a) Školský prieskum zistil, že 7 z 30 študentov chodí do školy pešo. Náhodne vyberieme postupne štyroch študentov. Aká je pravdepodobnosť, že prvý a druhý vybraný študent chodí do školy pešo, ale tretí a štvrtý nechodí do školy pešo? [0,03231]

Pr. 2: **7.23.**

Pravdepodobnosť toho, že ženatý muž pravidelne sporí je 0,6; pravdepodobnosť toho, že vydatá žena pravidelne sporí je 0,5 a pravdepodobnosť toho, že vydatá žena pravidelne sporí, ak pravidelne sporí jej muž, je 0,4. Určte pravdepodobnosť toho, že:

a) obaja pravidelne sporia,

b) pravidelne sporí ženatý muž, ak pravidelne sporí jeho žena;

c) aspoň jeden z manželov pravidelne sporí. [*a*) 0,24; *b*) 0,48; *c*) 0,86]

Pr. 3:

(c) Pravdepodobnosť určitého ochorenia je 5%. Test na určenie prítomnosti ochorenia má spoľahlivosť 83%. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná testovaná osoba má pozitívny výsledok testu? [0,203]

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Ak sú dva javy (množiny) A_1 , A_2 disjunktné znamená to, že
   a) $A_1 \cap A_2 = 0$,
   b) $A_1 \cap A_2 \neq 0$,
   c) $A_1 \cup A_2 = 0$.

2. Princíp sčítania hovorí, ak sú množiny A_1 , A_2 .. A_n po dvojicaich disjunktné a $|A_i| = n_i$
   a) $\text{potom } |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots\ldots \cap A_n| = n_1 + n_2 + \ldots + n_n$
   b) $\text{potom } |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots\ldots \cap A_n| = n_1 . n_2 . \ldots . n_n$,
   c) $\text{potom } |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots\ldots \cup A_n| = n_1 + n_2 + \ldots + n_n$.

3. Pri permutáciách bez opakovania, vytvárame
   a) *k* – tice s *n* prvkovej množiny,
   b) *n* – tice s *n* prvkovej množiny,
   c) *n* – tice s *k* prvkovej množiny.

4. Koľko slov (aj neplnovýznamových) môžeme vytvoriť" zámenou poradia písmen v slove MAMKA? Počet slov je
   a) $V(5,3) = \frac{5!}{3!} = 20$, b) $C(5,3) = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$, c) $P'_{1,2,2}(5) = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$.

5. Pri určení počtu všetkých možností padnutia ľubovoľných čísel na dvoch kockách použijeme

a) kombinácie,
b) permutácie s opakovaním,
c) variácie s opakovaním.

6. Pre kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ platí

a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ b) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!}$ c) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n+k)!}$

7. Ak pri vytváraní *k* – tíc s *n* prvkovej množiny nezávisí na poradí prvkov, ide o

a) permutácie,
b) variácie,
c) kombinácie.

8. V balíčku je 12 cukríkov troch rôznych farieb. Koľko je možností výberu 4 cukríkov, ak tri majú byť rovnakej farby? Počet možností je

a) $\binom{4}{3}\binom{8}{1}$, b) $3.\binom{4}{3}\binom{8}{1}$, c) $\binom{12}{4}$, d) $\binom{4}{3}\binom{12}{1}$.

9. Ak je vo vrecku 10 gaštanov a vyberáme z neho najmenej 4, to znamená

a) že vyberáme 0 – 4 gaštany,
b) že vyberáme 4 gaštany,
c) že vyberáme 4 -10 gaštanov,
d) že vyberáme 4 a 5 gaštanov.

10. Ak hádžeme kockou 5 – krát a padne nám číslo 6 dvakrát, potom pri výpočte pravdepodobnosti padnutia čísla 6 pri 5 hodoch je počet priaznivých pokusov

a) $m = 5$, b) $n = 2$, c) $m = 2$, d) $n = 5$.

11. Pravdepodobnosť padnutia čísla 6 na kocke z otázky 9 je

a) $P(A) = 2{,}25$

b) $P(A) = 0{,}4$

c) $P(A) = 0{,}2$.

Správne odpovede:

1a, 2c, 3b, 4c, 5c, 6a, 7c, 8b, 9c, 10c, 11b

Hodnotenie:

0 – 2 nesprávne odpovede – máš vedomosti s kombinatoriky a klasickej pravdepodobnosti

3 - 5 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

6 a viac nesprávnych odpovedí – tvoje vedomosti nie sú postačujúce, odporúčam sa na to ešte raz pozrieť