NMPaMŠ – 8.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pravdepodobnosť
Podmienená pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B (ak nastal jav B, potom pre jav A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pravdepodobnosť javu B za predpokladu, že nastal jav A (ak nastal jav A, potom pre jav B)

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Vlastnosti pravdepodobnosti

Pre disjunktné javy: ak $A \cap B = \emptyset$, *tak* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

pre ľubovoľné javy A, B *je* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

Veta o úplnej pravdepodobnosti

Nech $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy (t. j. úplný systém disjunktných javov). Potom pre ľubovoľný jav A platí

$$P(A) = P(A|H_1)\cdot P(H_1) + P(A|H_2)\cdot P(H_2) + \cdots + P(A|H_n)\cdot P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)\cdot P(H_i).$$

Bayesov vzorec

Nech javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy a $A \in \tau$ je ľubovoľný jav, pre ktorý je $P(A) \neq 0$. Potom pre každú hypotézu H_k je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)\cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k)\cdot P(A|H_k)}{P(A)}.$$

Okrem toho platí $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1$.

Pr. 1:

(c) Pravdepodobnosť určitého ochorenia je 5%. Test na určenie prítomnosti ochorenia má spoľahlivosť 83%. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná testovaná osoba má pozitívny výsledok testu? [0,203]

Pr. 2: **7.30.**

Dvaja robotníci vyrábajú tie isté výrobky, pričom prvý vyrobí za smenu dvakrát viac ako druhý. Pravdepodobnosť vyrobenia nepodarku je u 1. robotníka 0,02 a u 2. robotníka 0,01. Zo skladu, kde sú uložené všetky výrobky, náhodne vyberieme 1 výrobok. Aká je pravdepodobnosť toho, že daný výrobok nebude nepodarok? [0,9833]

Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraný výrobok bol vyrobený prvým robotníkom, ak bol nepodarok? [0,7984]

Pr. 3:

(j) Z krabice, ktorá obsahuje 6 čiernych a 9 bielych gulí, náhodne vyberieme jednu guľu. Potom ju vrátime späť a pridáme ešte 5 gulí tej istej farby, akej bola vytiahnutá guľa.

a) Aká je pravdepodobnosť toho, že v druhom ťahu vytiahneme z krabice bielu guľu?

b) Aká je pravdepodobnosť, že v prvom ťahu sme vytiahli čiernu guľu, ak v druhom ťahu vytiahneme z krabice bielu guľu?

[a) 0,6, b) 0,3]

Pr. 4:

(i) Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je trikrát vyššia ako produktivita druhého. Prvý automat vyrába 70% kvalitných výrobkov, druhý 80% kvalitných výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

a) náhodne vybratý výrobok je kvalitný;

b) náhodne vybratý výrobok bol vyrobený druhým automatom, ak je kvalitný. [a) 0,725, b) 0,2759]

A – náhodne vybraný výrobok je kvalitný

H_1 – výrobok vyrobil 1. automat

H_2 – výrobok vyrobil 2. automat

A / H_1 – náhodne vybraný výrobok je kvalitný, ak ho vyrobil 1. automat

A / H_2 – náhodne vybraný výrobok je kvalitný, ak ho vyrobil 2. automat

a) $P(A)$ - ?

b) $P(H_2 / A)$ - ?

1. automat vyrobí trikrát viac ako druhý = 3 výrobky
2. <u>automat vyrobí = 1 výrobok</u>

spolu 4 výrobky

$P(H_1) = \frac{3}{4}$, $P(H_2) = \frac{1}{4}$

$P(A / H_1) = 0{,}7$

$P(A / H_2) = 0{,}8$

Pr. 4:

(i) Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je trikrát vyššia ako produktivita druhého. Prvý automat vyrába 70% kvalitných výrobkov, druhý 80% kvalitných výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

a) náhodne vybratý výrobok je kvalitný;

b) náhodne vybratý výrobok bol vyrobený druhým automatom, ak je kvalitný. [a) 0,725, b) 0,2759]

$$a)\ P(A) = P(H_1).P(A/H_1) + P(H_2).P(A/H_2)$$

$$P(A) = \frac{3}{4}.0{,}7 + \frac{1}{4}.0{,}8 = 0{,}725$$

$$b)\ P(H_2/A) = \frac{P(H_2).P(A/H_2)}{P(A)}$$

$$P(H_2/A) = \frac{\frac{1}{4}.0{,}8}{0{,}725} = 0{,}2759$$

Pr. 5:

(e) Istá výrobná chyba sa vyskytuje u 15% práčok. Pri práčkach s touto výrobnou chybou dochádza k poruche v záručnej dobe s pravdepodobnosťou 0,6, kým u ostatných len s pravdepodobnosťou 0,1. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

a) náhodne vybratá práčka sa pokazí v záručnej dobe;

b) náhodne vybratá práčka má výrobnú chybu, ak sa pokazila v záručnej dobe. [a) 0,175, b) 0,5143]

Pr. 6:

(f) V triede je 60% dievčat. Z nich 70% je nižších ako 170 cm. Z chlapcov je nižších ako 170 cm len 30%.

a) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný žiak je nižší ako 170 cm.

b) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný žiak je chlapec, ak je nižší ako 170 cm.

[a) 0,54, b) 0,222]

A – náhodne vybraný žiak je nižší ako 170 cm

H_1 – žiak je dievča

H_2 – žiak je chlapec

A / H_1 – náhodne vybraný žiak je nižší ako 170 cm, ak je dievča

A / H_2 – náhodne vybraný žiak je je nižší ako 170 cm, ak je chlapec

a) $P(A)$ - ?

b) $P(H_2 / A)$ - ?

$P(H_1) = 0{,}6$, $P(H_2) = 0{,}4$

$P(A / H_1) = 0{,}7$, $P(A / H_2) = 0{,}3$

Pr. 6:

(e) V triede je 60% dievčat. Z nich 70% je nižších ako 170 cm. Z chlapcov je nižších ako 170 cm len 30%.

a) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný žiak je nižší ako 170 cm.

b) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný žiak je chlapec, ak je nižší ako 170 cm.

[a) 0,54, b) 0,222]

$$a)\ P(A) = P(H_1).P(A/H_1) + P(H_2).P(A/H_2)$$

$$P(A) = 0{,}6.0{,}7 + 0{,}4.0{,}3 = 0{,}54$$

$$b)\ P(H_2/A) = \frac{P(H_2).P(A/H_2)}{P(A)}$$

$$P(H_2/A) = \frac{0{,}3.0{,}4}{0{,}54} = 0{,}222$$

Dú:

7.32.

Z urny, ktorá obsahuje 5 čiernych a 10 bielych guli, náhodne vyberieme 1 guľu. Potom ju vrátime naspäť a pridáme ešte 5 guli tej istej farby, akej bola vytiahnutá guľa. Aká je pravdepodobnosť toho, že guľa vytiahnutá v druhom ťahu bude biela? [2/3]

7.36.

V určitej spoločnosti je 40 % mužov a 60 % žien. Vysokých nad 180 cm je 35 % mužov a 6 % žien. Náhodne vybraná osoba z danej spoločnosti má výšku nad 180 cm. Aká je pravdepodobnosť toho, že je to: a) žena; b) muž? [*a*) 0,2045; *b*) 0,7955]

(h) 30 % študentov študuje priebežne počas semestra. Z nich 90 % urobí skúšku v riadnom termíne. Zo študentov, ktorí neštudujú priebežne počas semestra len 20 % urobí skúšku v riadnom termíne.

a) Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne vybraný študent urobil skúšku v riadnom termíne.

b) Náhodne vybraný študent urobil skúšku v riadnom termíne. Aká je pravdepodobnosť, že študoval priebežne počas semestra? [a) 0,41, b) 0,6585]

Dú:

7.27.

Štatisticky bolo zistené, že asi 30 % študentov sa učí priebežne počas celého semestra. Z nich asi 90 % urobí skúšku v riadnom termíne. Celkovo urobí skúšku v riadnom termíne asi 55 % študentov. Aká je pravdepodobnosť toho, že študent, úspešný v riadnom termíne, študoval priebežne? [0,4909]

7.29.

Skúška z určitého predmetu má 3 časti. Aby študent úspešne urobil skúšku, musí úspešne urobiť všetky 3 časti. Pravdepodobnosť úspechu v 1. časti je 0,6. Pravdepodobnosť úspechu v 2. časti, za predpokladu úspechu v 1. časti je 0,75 a pravdepodobnosť úspechu v 3. časti, za predpokladu, že obidve predchádzajúce časti boli úspešné je 0,9. Aká je pravdepodobnosť úspešného zloženia skúšky? [0,405]

7.37.

Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je dvakrát vyššia ako druhého. 1. automat vyrába priemerne 60 % kvalitných výrobkov, pričom 2. automat 84 %. Náhodne bol vybraný 1 výrobok, o ktorom kontrola zistila, že je kvalitný. Aká je pravdepodobnosť toho, že ho vyrobil: a) 1. automat; b) 2. automat? [*a*) 0,5882; *b*) 0,4118]

(g) Pomer počtu výrobkov vyrobených na štyroch strojoch je 4 : 6 : 5 : 5. Pravdepodobnosť produkcie výrobku prvej akosti je pre jednotlivé stroje v danom poradí takáto: 0,7; 0,6; 0,8 a 0,7.

a) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný výrobok je prvej akosti.

b) Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok bol vyrobený na prvom stroji, ak je prvej akosti. [a) 0,695, b) 0,2014]

Pravdepodobnosť
Opakované nezávislé pokusy

Nezávislý pokus – výsledkom pokusu je jav A, ktorý opakujeme n - krát, pričom tieto pokusy sú navzájom nezávislé, výsledok jedného nezávisí od výsledku druhého, pravdepodobnosť javu A je pre všetky pokusy rovnaká

Bernoulliho veta

A - jav, **p** je jeho pravdepodobnosť pri danom pokuse,
k – počet nastatia javu A pri danom pokuse,
n – počet nezávislých opakovaní pokusu

$P_{n,p}$ (k) je pravdepodobnosť toho, že pri **n** – násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve **k**-krát

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Pr. 1:

(g) Predpokladajme, že hádžeme súčasne dvomi mincami. Minca má dve strany– hlava a znak. Vykonáme štyri hody. Aká je pravdepodobnosť, že
a) pri dvoch hodoch zo štyroch hodíme dve hlavy;
b) aspoň (najmenej) pri jednom hode zo štyroch hodíme dve hlavy. [a) 0,2109; b) 0,6836]

Pr. 2:

(d) Pravdepodobnosť toho, že basketbalista trafí do koša je 0,7. Určte pravdepodobnosť toho, že basketbalista pri šiestich nezávislých hodoch:
a) práve dvakrát trafí do koša;
b) aspoň dvakrát trafí do koša. [a) 0,0595; b) 0,9891]

a) A – basketbalista trafí do koša
p (A) = 0,7
n = 6
k = 2 (práve dvakrát trafí)

$$P_{6,0,7}(2) = \binom{6}{2} 0{,}7^2 . 0{,}3^4 = 0{,}0595$$

b) A – basketbalista trafí do koša
p (A) = 0,7
n = 6
k ≥ 2 (aspoň dvakrát trafí, k = 2 - 6)

B – basketbalista trafí kôš aspoň dvakrát pri 6 nezávislých hodoch
$\overline{\mathrm{B}}$ – basketbalista trafí kôš najviac jedenkrát pri 6 nezávislých hodoch, k < 2 $(k = 0, 1)$

$$\mathrm{P(B)} = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - (P_{6,0,7}(0) + P_{6,0,7}(1))$$

$$\mathrm{P(B)} = 1 - \left(\binom{6}{0} 0{,}7^0 . 0{,}3^6 + \binom{6}{1} 0{,}7^1 . 0{,}3^5\right) = 0{,}9891$$

Dú: Príklady na precvičenie č.2, časť nezávislé javy

(e) Zistilo sa, že semienko vyklíči s pravdepodobnosťou 80%. Ak zasejeme 10 semiačok, aká je pravdepodobnosť, že

a) vyklíči práve 7 semiačok,

b) vyklíčia spoň 4 semiačka. [a) 0,20133; b) 0,99914]

(f) Z urny, v ktorej je 8 bielych a dve čierne guľky, sa ťahá po jednej guľke, pričom sa po každom ťahu guľka vráti späť do urny. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

a) medzi šiestimi postupne vytiahnutými guľkami budú tri biele guľky;

b) medzi ôsmimi postupne vytiahnutými guľkami budú aspoň štyri biele guľky. [a) 0,08192; b) 0,98959]

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Podmienenú pravdepodobnosť javu A na jave B vyjadruje
   a) $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$,
   b) $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$,
   c) $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$.

2. Sú dané hypotézy H_1 – študent sa učil na skúšku, H_2 – študent sa neučil na skúšku a jav A – náhodne vybraný študent urobil skúšku. Podmienená pravdepodobnosť $\mathrm{A}|\mathrm{H}_1$ bude slovne interpretovaná
   a) ak sa študent neučil, tak urobil skúšku,
   b) študent urobil skúšku, ak sa učil,
   c) ak sa študent učil, tak urobil skúšku,
   d) študent urobil skúšku, ak sa neučil.

3. Janko a Miško hádžu kockou, každý dvakrát. Janko hodil čísla 1, 3 a Miško 2,3.
   Ak A – sú hodnoty, ktoré hodil Janko, B - sú hodnoty, ktoré hodil Miško. Potom
   a) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \{1, 2, 3\}$, b) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \{1,3\}$, c) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \{2\}$.

4. Ak Janko a Miško súčasne hodili číslo 3 na kocke, potom to vyjadríme
   a) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, b) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, c) $\mathrm{A}|\mathrm{B}$.

5. Ak sú javy A, B disjunktné, potom pre ich zjednotenie platí

a) $\mathrm{P(A) + P(B)}$, b) $\mathrm{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$, c) $\mathrm{P(A) + P(B) - P(A|B)}$.

6. Vo vrecku sú sladké a kyslé cukríky. Náhodne vyberieme za sebou 4 cukríky. A_i je jav, ktorý vyjadruje, že i – tý cukrík je sladký. Pravdepodobnosť, že prvý cukrík bude sladký a druhý a tretí kyslý a štvrtý sladký zapíšeme

a) $\mathrm{P}(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4)$, b) $\mathrm{P}(\bar{A}_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \bar{A}_4)$,

c) $\mathrm{P}(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4)$, d) $\mathrm{P}(A_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 \cup A_4)$.

7. V čakárni u lekára je 10 ľudí, z nich 4 majú teplotu vyššiu ako 38 stupňov. A_i je i – tý pacient, ktorý má teplotu nižšiu ako 38 stupňov. Pravdepodobnosť, že medzi 3 náhodne postupne vybranými pacientmi bude prvý mať vyššiu teplotu a ostatní dvaja budú mať nižšiu ako 38 stupňov vypočítame

a) $\mathrm{P(\overline{A}_1).P(A_2|\overline{A}_1).P(A_3|\overline{A}_1 \cap A_2)}$, b) $\mathrm{P(\overline{A}_1).P(A_2|\overline{A}_1).P(A_3|A_2)}$,

c) $\mathrm{P(\overline{A}_1).P(A_2|\overline{A}_1).P(A_3|\overline{A}_1 \cup A_2)}$, d)$\mathrm{P(A_2|\overline{A}_1).P(A_3|A_2 \cap A_1)}$.

8. Podmienenú pravdepodobnosť $\mathrm{P(A_2|\overline{A}_1)}$ z otázky 7 vypočítame

a) $\mathrm{P(A_2|\overline{A}_1)} = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{9}{3}}$, b) $\mathrm{P(A_2|\overline{A}_1)} = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}$, c)$\mathrm{P(A_2|\overline{A}_1)} = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}$, d) $\mathrm{P(A_2|\overline{A}_1)} = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}$.

9. V rodine je 5 ľudí: otec, mama a 3 detí. Riad umývajú členovia rodiny nepravidelne. Pravdepodobnosť, že náhodne vybraný tanier je umytý, ak riad umývajú rodičia je 0,8. Pravdepodobnosť, že náhodne vybraný tanier je umytý, ak riad umývajú deti je 0,5. Hypotézy k tejto úlohe sú

a) H_1 – tanier je umytý, H_2 – tanier nie je umytý,
b) H_1 – riad umývajú rodičia, H_2 – riad umývajú deti,
c) H_1 – náhodne vybraný tanier je umytý, ak riad umývajú rodičia,
H_2 – náhodne vybraný tanier je umytý, ak riad umývajú deti.

10. Pravdepodobnosť (z otázky 9), že riad umyli deti, ak náhodne vybratý tanier je umytý určíme

a) $P(H_2|A) = \frac{P(H_2).P(A|H_2)}{P(A)}$,
b) $P(A|H_2) = \frac{P(A).P(H_2|A)}{P(H_2)}$,
c) $P(H_1|A) = \frac{P(H_1).P(A|H_1)}{P(A)}$.

11. Pravdepodobnosť (z otázky 9) prvej hypotézy je

a) $P(H_1) = \frac{3}{5}$, b) $P(H_1) = \frac{2}{5}$, c) $P(H_1) = 2$, d) $P(H_1) = 3$.

12. Ak P (A) = 0,62 (z otázky 9), potom pravdepodobnosť $P(H_2|A)$ je

a) $0{,}48$, b) $0{,}52$, c) $0{,}6$.

13. Máme dva košíky plné banánov. V prvom košíku je 3 – krát viac banánov ako v druhom. Pravdepodobnosť, že náhodne vybraný banán je nezrelý (zelený), ak je z prvého košíka je 40%.Pravdepodobnosť, že náhodne vybraný banán je nezrelý (zelený) je

a) $\mathrm{P(A)} = \frac{3}{4}.0{,}4 + \frac{1}{4}.0{,}6 = 0{,}45$ b) $\mathrm{P(A)} = 3.0{,}4 + 0{,}6 = 1{,}8$

c) $\mathrm{P(A)} = \frac{1}{4}.0{,}4 + \frac{3}{4}.0{,}6 = 1{,}55$ d) $\mathrm{P(A)} = 1.0{,}4 + \frac{1}{3}.0{,}6 = 0{,}6$

14. Je daný jav A – mobil je kvalitný, jeho $\mathrm{P(A)}$ = 0,95. opačný jav k javu A bude

a) $\overline{\mathrm{A}}$ - mobil je stredne dobrý,
b) $\overline{\mathrm{A}}$ - mobil je vynikajúci,
c) $\overline{\mathrm{A}}$ - mobil je nekvalitný (zlý).

15. Pravdepodobnosť P($\overline{\mathrm{A}}$) z otázky 14 určíme ako

a) $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 + \mathrm{P(A)} = 1{,}95$,
b) $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{P(A)} = 0{,}95$,
c) $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)} = 0{,}05$.

16. Pravdepodobnosť ľubovoľného javu A je vždy

a) $0 \leq \mathrm{P(A)} \leq 1$,
b) $\mathrm{P(A)} > 1$,
c) $\mathrm{P(A)} = 1$.

Správne odpovede:
1c, 2c, 3a, 4b, 5a, 6c, 7a, 8c, 9b, 10a, 11b, 12a, 13a, 14c, 15c, 16a

Hodnotenie:
0 – 3 nesprávne odpovede – máš vedomosti o podmienenej pravdepodobnosti
4 - 8 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré
9 a viac nesprávnych odpovedí – tvoje vedomosti nie sú postačujúce, odporúčam sa na to ešte raz pozrieť