

NMPaMŠ – 9. cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pravdepodobnosť

Opakované nezávislé pokusy

Nezávislý pokus – výsledkom pokusu je jav A, ktorý opakujeme n - krát, pričom tieto pokusy sú navzájom nezávislé, výsledok jedného nezávisí od výsledku druhého, pravdepodobnosť javu A je pre všetky pokusy rovnaká

Bernoulliho veta

A - jav, **p** je jeho **pravdepodobnosť** pri danom pokuse,

k – počet nastatia javu A pri danom pokuse,

n – počet nezávislých opakovaní pokusu

$P_{n,p}(k)$ je pravdepodobnosť toho, že pri **n** – násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve **k**-krát

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Pr. 2:

- (h) Test pozostáva z 8 otázok, pričom pri každej otázke študent vyberá z 3 možností (práve 1 je správna). Ak sa študent učil, je pravdepodobnosť správnej odpovede pri každej z otázok 0,7. Ak sa neučil, volí odpovede náhodne. Aká je pravdepodobnosť toho, že
- a) študent správne odpovie aspoň na šesť otázok, ak sa učil;
 - b) študent správne odpovie aspoň na šesť otázok, ak sa neučil.
 - c) náhodne vybraný študent odpovie aspoň na šesť otázok, ak vieme, že tretina študentov sa učila.

Pravdepodobnosť

Náhodná premenná

Náhodná premenná – premenná, ktorá nadobúda svoje hodnoty náhodne

Náhodné premenné – X, Y, X_1, X_2, \dots

Hodnoty náhodných premenných – x, y, x_1, x_2, \dots

1. Diskrétne rozdelenie náhodnej premennej

Pravdepodobnostná tabuľka náhodnej premennej X

x_j	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X = x_j) = p_j$	p_1	p_2	\dots	p_n

$$\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$$

Distribučná funkcia F náhodnej premennej X

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Modus diskkrétnej náhodnej premennej $M_o(X)$ – najpravdepodobnejšia hodnota náhodnej premennej (najväčšia hodnota pravdepodobnosti)

Stredná hodnota náhodnej premennej

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ kde } E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i.$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Pr. 1:

8.1. Diskrétna náhodná premenná X je daná pravdepodobnostnou tabuľkou

Určte neznámu hodnotu p_5 , strednú hodnotu, modus, disperziu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X .

i	1	2	3	4	5
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	p_5

$$\sum_{i=1}^5 p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

$$p_5 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,1296$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = 1 \cdot 0,1536 + 2 \cdot 0,3456 + 3 \cdot 0,3456 + 4 \cdot 0,1296 = 2,4$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6,72 - 2,4^2 = 0,96$$

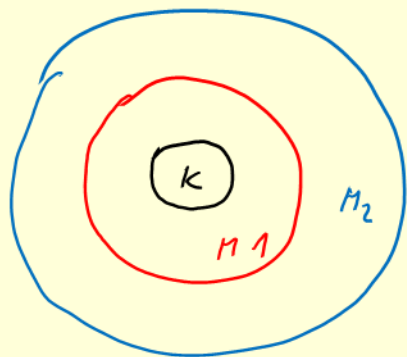
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 p_i = 6,72$$

$$M_0(X) = 2 \quad M_1(X) = 3 \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,9798$$

Pr. 2:

10. Terč tvorí kruh K a dve medzikružia M_1 a M_2 . Zásah do kruhu K znamená 10 bodov, zásah do medzikružia M_1 znamená 5 bodov a do M_2 znamená 0 bodov. Pravdepodobnosť zásahu kruhu K je 0,5, pravdepodobnosť zásahu medzikružia M_1 je 0,3 a pravdepodobnosť zásahu medzikružia M_2 je 0,2. Nech náhodná premenná X je rovná počtu získaných bodov pri 2 nezávislých výstreloch. Určte:

- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);
- strednú hodnotu náhodnej premennej X ;
- pravdepodobnosti $P(X \leq 10)$, $P(5 < X \leq 15)$;
- Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X .



zásah do K - 10 bodov, $P(K) = 0,5$

zásah do M_1 - 5 b, $P(M_1) = 0,3$

zásah do M_2 - 0 b, $P(M_2) = 0,2$

X - počet bodov pri 2 nezávis. výstreloch

$X_i = 0, 5, 10, 15, 20$ bodov

$$P(X=0) = 0,2^2 = 0,04 \quad \rightarrow \quad \frac{M_2}{M_2} \frac{M_2}{M_2} \rightarrow \text{prav. } 0,2 \cdot 0,2$$

$$P(X=5) = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,12 \quad \rightarrow \quad \left. \frac{M_1}{M_2} \frac{M_2}{M_1} \right\} \rightarrow \text{prav. } 0,3 \cdot 0,2 \cdot 2$$

$$P(X=10) = 0,3^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 0,29$$

$$\frac{M_1}{M_1} \frac{M_1}{M_1} \rightarrow \text{prav. } 0,3 \cdot 0,3$$

$$\frac{M_2}{K} \frac{K}{M_2} \rightarrow \text{pravdep. } 0,2 \cdot 0,5 \cdot 2$$

$$P(X=15) = 2 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 0,3 \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{M_1}{K} \\ \frac{K}{M_1} \end{array} \right\} \text{prav. } 0,3 \cdot 0,5 \cdot 2$$

$$P(X=20) = 0,5^2 = 0,25$$

$$\swarrow$$

$$\frac{K}{K} \text{ prav. } 0,5 \cdot 0,5$$

x_i	0	5	10	15	20
p_i	0,04	0,12	0,29	0,3	0,25

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot p_i = 12,12$$

$$P(X \leq 10) = P(X=0) + P(X=5) + P(X=10)$$

$$= 0,45$$

$$P(5 < X \leq 15) = P(X=10) + P(X=15)$$

$$= 0,59$$

Pr. 2:

$$F(x) = 0 \quad 0 < x$$

$$\rightarrow p_1 = 0,04 \quad 0 \leq x < 5$$

$$\rightarrow p_1 + p_2 = 0,16 \quad 5 \leq x < 10$$

$$\rightarrow p_1 + p_2 + p_3 = 0,45 \quad 10 \leq x < 15$$

$$\rightarrow 0,75 \quad 15 \leq x < 20$$

$$\rightarrow 1 \quad 20 \leq x$$

x_i	0	5	10	15	20
p_i	0,04	0,12	0,29	0,3	0,25
F_i	0,04	0,16	0,45	0,75	1

Dú: Príklady na precvičenie č.3

2. Náhodná premenná X je daná pravdepodobnostnou tabuľkou

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & x_1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & 0,1 & 0,2 & p_3 & 0,4 \end{array},$$

pričom platí, že $D(X) = 1$ a $x_1 \leq 4$. Určte:

- i. neznáme hodnoty x_1 a p_3 ;
- ii. strednú hodnotu a modus náhodnej premennej X ;
- iii. $P(0 \leq X < 2)$ a $P(|X - 1,5| \leq 1)$;
- iv. distribučnú funkciu náhodnej premennej X .

(Návod: Použite vzťah $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, $E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$.)

- [i] $p_3 = ?$; $x_1 = 0$; ii) $E(X) = 2$; $Mo(X) = 3$;
iii) $P(0 \leq X < 2) = 0,3$; $P(|X - 1,5| \leq 1) = 0,5$

Rozdelenia pravdepodobnosti diskkrétnej náhodnej premennej

Binomické rozdelenie

Dané $n \in \mathbb{N}$ a reálne číslo $p \in (0,1)$, náhodná veličina X má binomické rozdelenie s parametrami n a p

vieme sa zamerať na danú hodnotu

pravdepodobnosť y a w, vieme vypočítať

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

označenie $X \sim \text{bino}(n; p)$

Stredná hodnota náhodnej premennej $E(X)$

$$E(X) = n \cdot p,$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = n \cdot p \cdot q$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej X

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \text{ kde } q = 1 - p$$

Hypergeometrické rozdelenie

Dané M množina objektov, K objektov má určitú vlastnosť, $M - K$ objektov túto vlastnosť nemá. Vyberieme bez vrátenia N objektov. Chceme vedieť pravdepodobnosť, že medzi vybranými má x objektov túto vlastnosť. Náhodná veličina X má **hypergeometrické rozdelenie** s parametrami M, K, N

dané v zadaní

M, K, N

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}}$$

označenie $X \sim \text{hyge}(M, K, N)$

Stredná hodnota náhodnej premennej $E(X)$

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M}$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = \frac{(M-N) \cdot N \cdot K}{(M-1) \cdot M} \left(1 - \frac{K}{M}\right)$$

Poissonove rozdelenie

Poissonovo rozdelenie je rozdelenie diskkrétnej náhodnej premennej X , ktoré má nasledovné vlastnosti:

- Experiment pozostáva z počítania, koľkokrát jav nastane v danom intervale. Interval môže byť interval času, vzdialenosti, plochy, objemu. . .
- Pravdepodobnosť, že k javu dôjde, je rovnaká v ľubovoľnom intervale.
- Počet výskytov javu v jednom intervale je nezávislý na počte výskytov v iných intervaloch.
- Priemerný počet výskytov javu je priamo úmerný dĺžke intervalu.
- Priemerný počet výskytov javu v danom intervale je známy a rovná sa číslu λ .

Náhodná veličina X má **poissonovo rozdelenie s parametrom λ**

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \text{ pre každé } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

označenie $X \sim \text{poiss}(\lambda)$

Stredná hodnota

$$E(X) = \lambda$$

Disperzia

$$D(X) = \lambda$$

Smerodajná odchýlka

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Pr. 1:

3. Predpokladajme, že hádzame súčasne dvoma kockami. Vykonáme 3 hody. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme súčet 9.

- Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú X (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov).
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X .
- Vypočítajte $P(0 < X \leq 2)$, $P(X > E(X))$.
- Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X .

(i)

dané : $N = 3$ hody

p - prav., že hodíme súčet 9 na 2 kockách
(vypočítame pomocou klas. prav.)

$$p = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad m \quad \left. \begin{array}{cc} \frac{3}{6} & \frac{6}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{5}{4} \end{array} \right\} = 4$$

$$X \sim \text{bino} \left(3, \frac{1}{9} \right)$$

$$n \quad \frac{6}{6} = 6^2 = 36$$

može podmieť číslo od 1-6

X - počet hodov, pri kt. hodíme súčet 9

$x_i = 0, 1, 2, 3$ hody

$$P(X=0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{9} \right)^0 \left(1 - \frac{1}{9} \right)^3 = \frac{512}{729}$$

Pr. 1:

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{9}\right)^1 \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{243}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^1 = \frac{8}{243}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(\frac{8}{9}\right)^0 = \frac{1}{729}$$

X_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

(ii)

$$E(X) = p \cdot N = \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}$$

$$D(X) = p \cdot N \cdot q = \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

Pr. 2:

11. V triede je 15 študentov, z ktorých jedna tretina študuje s vyznamenaním. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu vyznamenaných študentov medzi tromi náhodne vybranými študentmi. Určte:

- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);
- pravdepodobnosť, že medzi tromi náhodne vybranými študentmi bol aspoň jeden vyznamenaný študent.
- strednú hodnotu náhodnej premennej X .
- distribučnú funkciu náhodnej premennej X .

(i) dané: $M = 15$ študentov
 $K = \frac{1}{3}M = 5$ s vyznamenaním

$$N = 3$$

$M - K = 10$ s nemá vyznamenaním.

$$X \sim \text{hyper}(15, 5, 3)$$

X - počet vyznam. št. medzi 3 vybranými náhodne

$X_i = 0, 1, 2, 3$ vyz. študentov

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{0} \binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{120}{455}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{100}{455}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{225}{455}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{3} \binom{10}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{10}{455}$$

Pr. 2:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{120}{455}$	$\frac{225}{455}$	$\frac{100}{455}$	$\frac{10}{455}$

ii

аспоћ 1 вызначење \checkmark = 1 а \checkmark ас \checkmark

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

алебо

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = \frac{335}{455}$$

iii

$$E(X) = N \frac{K}{M} = 3 \cdot \frac{1}{15} = 1$$

Pr. 3:

13. Do predajne príde priemerne 90 zákazníkov za hodinu. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

- v priebehu 5 minút nepríde do predajne žiaden zákazník,
 - v priebehu 3 minút prídu do predajne aspoň traja zákazníci,
 - v priebehu 4 minút prídu do predajne najviac traja zákazníci.
- [i) $5,53 \cdot 10^{-4}$; ii) 0,82641; iii) 0,1512]

(i)

- do predajne príde priemerne 90 zákazn. za 1 hod.

dané: $\lambda = 5 \cdot \frac{90}{60} = \frac{15}{2}$

5 min

$$X \sim \text{poiss} \left(\frac{15}{2} \right)$$

žiadny zákazník $\Rightarrow X = 0$

$$P(X=0) = \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^0 e^{-\frac{15}{2}}}{0!} = 5,53 \cdot 10^{-4}$$

(ii)

$$\lambda = 3 \cdot \frac{90}{60} = \frac{9}{2} \quad \text{aspoň 3 zákazn.} = 3 \text{ a viac}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$$

$$P(X=0) = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^0 \cdot e^{-\frac{9}{2}}}{0!} = 0,011109$$

Pr. 4:

8.3.

V súbore desiatich výrobkov je osem 1. kvality a dva nepodarky. Výberom bez vrátenia je náhodne vybraných 5 výrobkov. Určte:

- pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej X – počtu výrobkov 1. kvality vo výbere,
- číselné charakteristiky $E(X)$, $D(X)$ a $\sigma(X)$.

Spolu: 10 výrobkov = M

8 - 1. kvality = K

2 - nepodarky

výber = 5 = N

$X \sim \text{hyper}(10, 8, 5)$

X - počet výrobkov 1. kvality vo výbere

$$x_i = 3, 4, 5 \quad P(X=3) = \frac{\binom{8}{3} \binom{2}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$

$$P(X=4) = \frac{\binom{8}{4} \binom{2}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{9}$$

$$P(X=5) = \frac{\binom{8}{5} \binom{2}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$

Pr. 4:

$$E(x) = \frac{N \cdot K}{M} = \frac{5 \cdot 8}{10} = \underline{\underline{4}}$$

$$D(x) = \frac{(M-N) \cdot N \cdot K}{(M-1) \cdot M} \left(1 - \frac{K}{M}\right) = \frac{(10-5) \cdot 5 \cdot 8}{(10-1) \cdot 10} \left(1 - \frac{8}{10}\right)$$

$$D(x) = \frac{4}{9}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

x_i	3	4	5
p_i	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Pr. 5:

8.5.

V urne je 6 bielych a 4 čierne gule. Z urny sa postupne vyberie 5 gulí, pričom po každom ťahu sa guľa vráti späť. Určte:

- pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej X – počtu vytiahnutých bielych gulí,
- distribučnú funkciu a jej graf,
- číselné charakteristiky $E(X)$, $Mo(X)$, $D(X)$ a $\sigma(X)$;
- pravdepodobnosti $P(X < 3)$, $P(X \leq 3)$, $P(X > 1)$ a $P(1 < X < 4)$.

$$\begin{array}{r} B - 6 \\ \bar{C} - 4 \\ \hline S - 10 \end{array}$$

výber: 5

X - počet vytiahnutých B gulí

$$x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$X \sim \left(5, \frac{6}{10}\right)$$

A - vytiahneme B guľu

$$P(A) = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{10}{1}} = \frac{6}{10}$$

$$P(X=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{6}{10}\right)^0 \left(\frac{4}{10}\right)^5 = 0,01024$$

Pr. 5:

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \left(\frac{6}{10}\right)^1 \left(\frac{4}{10}\right)^4 = 0,768$$

$$P(X=2) = \binom{5}{2} 0,6^2 0,4^3 = 0,2304$$

0	1	2	3	4	5
0,01204	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0776

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{6}{10} = 3$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,2} = 1,04$$

$$D(X) = n p (1-p) = 5 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = 1,2 \quad M_0(X) = 3$$

$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,31744$$

$$P(X \leq 3) = P(X < 3) + P(X=3) = 0,66304$$

$$P(X > 1) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 0,91296$$

$$P(1 < X < 4) = P(2) + P(3) = 0,576$$

Pr. 5:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = p_1 = 0,09024$$

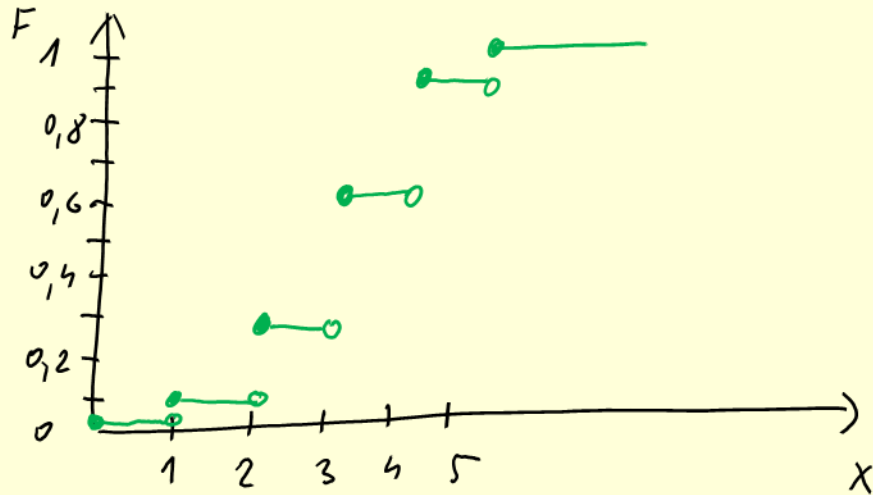
$$F(1) = P(X \leq 1) = p_1 + p_2 = 0,08704$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = 0,31744$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = 0,66304$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = 0,92224$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = 1$$



Pr. 6:

15. Rádioaktívna látka vyžaruje priemerne 80 častíc za minútu. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

- i. v priebehu 5 sekúnd vyžiari najviac 2 častice;
- ii. v priebehu 3 sekúnd vyžiari aspoň 4 častice.
- iii. v priebehu 6 sekúnd vyžiari 8 častíc.

[i) 0,03804; ii) 0,56653; iii) 0,1396]

$$a) \quad 80 \text{ v min} = \frac{80}{60} \text{ v sek.} = \frac{4}{3} \text{ v sek.}$$

$$\lambda = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} \quad X \sim \text{pois} \left(\frac{20}{3} \right)$$

najviac 2 častice = 0, 1, 2

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,03802$$

$$P(0) = \frac{e^{-\frac{20}{3}} \left(\frac{20}{3} \right)^0}{0!} = 0,00127$$

$$P(2) = 0,0283$$

$$P(1) = \frac{e^{-\frac{20}{3}} \left(\frac{20}{3} \right)^1}{1!} = 0,00848$$

Pr. 6:

$$b) \quad \lambda = 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

aspoň 4 častice = 4 a viac

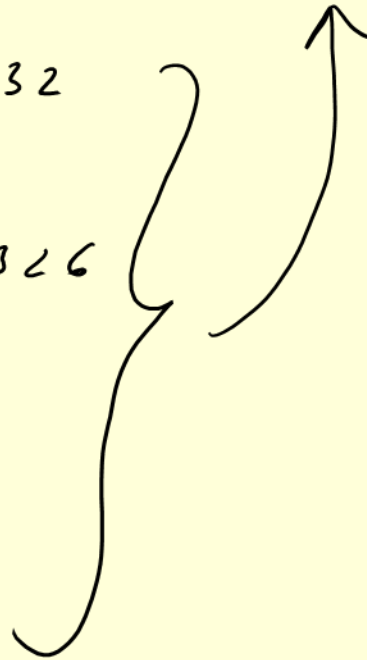
$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - 0,43348 = 0,56652$$

$$P(0) = \frac{e^{-4} 4^0}{0!} = 0,01832$$

$$P(1) = \frac{e^{-4} 4^1}{1!} = 0,07326$$

$$P(2) = 0,14653$$

$$P(3) = 0,19537$$



Pr. 6:

$$c) \quad \lambda = 6 \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

vy \bar{v}_i v_i 8 \bar{c} s h c — $x = 8$

$$P(8) = \frac{8^8 e^{-8}}{8!} = 0,1396$$

Dú: prepočítať všetky príklady zo súborov príkladov na precvičenie 2 a 3.