

NMPaMŠ – 9. cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pravdepodobnosť

Opakované nezávislé pokusy

Nezávislý pokus – výsledkom pokusu je jav A, ktorý opakujeme n - krát, pričom tieto pokusy sú navzájom nezávislé, výsledok jedného nezávisí od výsledku druhého, pravdepodobnosť javu A je pre všetky pokusy rovnaká

Bernoulliho veta

A - jav, **p** je jeho **pravdepodobnosť** pri danom pokuse,

k – počet nastatia javu A pri danom pokuse,

n – počet nezávislých opakovaní pokusu

$P_{n,p}(k)$ je pravdepodobnosť toho, že pri **n** – násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve **k**-krát

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Pr. 2:

- (h) Test pozostáva z 8 otázok, pričom pri každej otázke študent vyberá z 3 možností (práve 1 je správna). Ak sa študent učil, je pravdepodobnosť správnej odpovede pri každej z otázok 0,7. Ak sa neučil, volí odpovede náhodne. Aká je pravdepodobnosť toho, že
- študent správne odpovie aspoň na šesť otázok, ak sa učil;
 - študent správne odpovie aspoň na šesť otázok, ak sa neučil.
 - náhodne vybraný študent odpovie aspoň na šesť otázok, ak vieme, že tretina študentov sa učila.

Pravdepodobnosť

Náhodná premenná

Náhodná premenná – premenná, ktorá nadobúda svoje hodnoty náhodne

Náhodné premenné – X, Y, X_1, X_2, \dots

Hodnoty náhodných premenných – x, y, x_1, x_2, \dots

1. Diskrétne rozdelenie náhodnej premennej

Pravdepodobnostná tabuľka náhodnej premennej X

x_j	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X = x_j) = p_j$	p_1	p_2	\dots	p_n

$$\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$$

Distribučná funkcia F náhodnej premennej X

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Modus diskkrétnej náhodnej premennej $M_o(X)$ – najpravdepodobnejšia hodnota náhodnej premennej (najväčšia hodnota pravdepodobnosti)

Stredná hodnota náhodnej premennej

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ kde } E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i.$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Pr. 1:**8.1.** Diskrétna náhodná premenná X je daná pravdepodobnostnou tabuľkouUrčte neznámu hodnotu p_5 , strednú hodnotu, modus, disperziu a smerodajnú odchýlku náhodnej premennej X .

i	1	2	3	4	5
x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	p_5

$$\sum_{i=1}^5 p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

$$p_5 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,1296$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = 1 \cdot 0,1536 + 2 \cdot 0,3456 + 3 \cdot 0,3456 + 4 \cdot 0,1296 = 2,4$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6,72 - 2,4^2 = 0,96$$

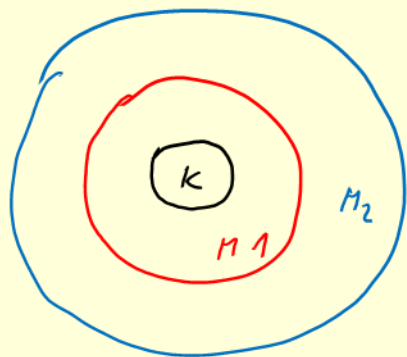
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^5 x_i^2 p_i = 6,72$$

$$M_0(X) = 2 \quad M_1(X) = 3 \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,9798$$

Pr. 2:

10. Terč tvorí kruh K a dve medzikružia M_1 a M_2 . Zásah do kruhu K znamená 10 bodov, zásah do medzikružia M_1 znamená 5 bodov a do M_2 znamená 0 bodov. Pravdepodobnosť zásahu kruhu K je 0,5, pravdepodobnosť zásahu medzikružia M_1 je 0,3 a pravdepodobnosť zásahu medzikružia M_2 je 0,2. Nech náhodná premenná X je rovná počtu získaných bodov pri 2 nezávislých výstreloch. Určte:

- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);
- strednú hodnotu náhodnej premennej X ;
- pravdepodobnosti $P(X \leq 10)$, $P(5 < X \leq 15)$;
- Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X .



zásah do K - 10 bodov, $P(K) = 0,5$

zásah do M_1 - 5 b, $P(M_1) = 0,3$

zásah do M_2 - 0 b, $P(M_2) = 0,2$

X - počet bodov pri 2 nezávis. výstreloch

$X_i = 0, 5, 10, 15, 20$ bodov

$$P(X=0) = 0,2^2 = 0,04 \quad \rightarrow \quad \underbrace{M_2}_{M_2} \underbrace{M_2}_{M_2} \rightarrow \text{prav. } 0,2 \cdot 0,2$$

$$P(X=5) = 2 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,12 \quad \rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \underbrace{M_1}_{M_2} \underbrace{M_2}_{M_1} \\ \underbrace{M_2}_{M_1} \underbrace{M_1}_{M_2} \end{array} \right\} \rightarrow \text{prav. } 0,3 \cdot 0,2 \cdot 2$$

$$P(X=10) = 0,3^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 0,29$$

$$\underbrace{M_1}_{M_1} \underbrace{M_1}_{M_1} \rightarrow \text{prav. } 0,3 \cdot 0,3$$

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{M_2}_{K} \underbrace{K}_{M_2} \\ \underbrace{K}_{M_2} \underbrace{M_2}_{K} \end{array} \right\} \rightarrow \text{pravdep. } 0,2 \cdot 0,5 \cdot 2$$

$$P(X=15) = 2 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 0,3 \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{M_1}{K} \\ \frac{K}{M_1} \end{array} \right\} \text{prav. } 0,3 \cdot 0,5 \cdot 2$$

$$P(X=20) = 0,5^2 = 0,25$$

$$\swarrow$$

$$\frac{K}{K} \text{ prav. } 0,5 \cdot 0,5$$

x_i	0	5	10	15	20
p_i	0,04	0,12	0,29	0,3	0,25

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot p_i = 12,12$$

$$P(X \leq 10) = P(X=0) + P(X=5) + P(X=10)$$

$$= 0,45$$

$$P(5 < X \leq 15) = P(X=10) + P(X=15)$$

$$= 0,59$$

Pr. 2:

$$F(x) = 0 \quad 0 < x$$

$$\rightarrow p_1 = 0,04 \quad 0 \leq x < 5$$

$$\rightarrow p_1 + p_2 = 0,16 \quad 5 \leq x < 10$$

$$\rightarrow p_1 + p_2 + p_3 = 0,45 \quad 10 \leq x < 15$$

$$\rightarrow 0,75 \quad 15 \leq x < 20$$

$$\rightarrow 1 \quad 20 \leq x$$

x_i	0	5	10	15	20
p_i	0,04	0,12	0,29	0,3	0,25
F_i	0,04	0,16	0,45	0,75	1

Dú: Príklady na precvičenie č.3

2. Náhodná premenná X je daná pravdepodobnostnou tabuľkou

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & x_1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & 0,1 & 0,2 & p_3 & 0,4 \end{array},$$

pričom platí, že $D(X) = 1$ a $x_1 \leq 4$. Určte:

- neznáme hodnoty x_1 a p_3 ;
- strednú hodnotu a modus náhodnej premennej X ;
- $P(0 \leq X < 2)$ a $P(|X - 1,5| \leq 1)$;
- distribučnú funkciu náhodnej premennej X .

(Návod: Použite vzťah $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, $E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$.)

- [i] $p_3 = ?$; $x_1 = 0$; ii) $E(X) = 2$; $Mo(X) = 3$;
iii) $P(0 \leq X < 2) = 0,3$; $P(|X - 1,5| \leq 1) = 0,5$

Rozdelenia pravdepodobnosti diskkrétnej náhodnej premennej

Binomické rozdelenie

Dané $n \in \mathbb{N}$ a reálne číslo $p \in (0,1)$, náhodná veličina X má binomické rozdelenie s parametrami n a p

vieme sa zanedbať

pravdepodobnosť y a w, vieme vypočítať

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

označenie $X \sim \text{bino}(n; p)$

Stredná hodnota náhodnej premennej $E(X)$

$$E(X) = n \cdot p,$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = n \cdot p \cdot q$$

Smerodajná odchýlka náhodnej premennej X

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \text{ kde } q = 1 - p$$

Hypergeometrické rozdelenie

Dané M množina objektov, K objektov má určitú vlastnosť, $M - K$ objektov túto vlastnosť nemá. Vyberieme bez vrátenia N objektov. Chceme vedieť pravdepodobnosť, že medzi vybranými má x objektov túto vlastnosť. Náhodná veličina X má **hypergeometrické rozdelenie s parametrami M, K, N**

dané v zadaní

M, K, N

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}}$$

označenie $X \sim \text{hyge}(M, K, N)$

Stredná hodnota náhodnej premennej $E(X)$

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M}$$

Disperzia (rozptyl) náhodnej premennej X

$$D(X) = \frac{(M-N) \cdot N \cdot K}{(M-1) \cdot M} \left(1 - \frac{K}{M}\right)$$

Poissonove rozdelenie

Poissonovo rozdelenie je rozdelenie diskkrétnej náhodnej premennej X , ktoré má nasledovné vlastnosti:

- Experiment pozostáva z počítania, koľkokrát jav nastane v danom intervale. Interval môže byť interval času, vzdialenosti, plochy, objemu. . .
- Pravdepodobnosť, že k javu dôjde, je rovnaká v ľubovoľnom intervale.
- Počet výskytov javu v jednom intervale je nezávislý na počte výskytov v iných intervaloch.
- Priemerný počet výskytov javu je priamo úmerný dĺžke intervalu.
- Priemerný počet výskytov javu v danom intervale je známy a rovná sa číslu λ .

Náhodná veličina X má **poissonovo rozdelenie s parametrom λ**

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \text{ pre každé } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

označenie $X \sim \text{poiss}(\lambda)$

Stredná hodnota

$$E(X) = \lambda$$

Disperzia

$$D(X) = \lambda$$

Smerodajná odchýlka

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Pr. 1:

3. Predpokladajme, že hádzame súčasne dvoma kockami. Vykonáme 3 hody. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme súčet 9.

- Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú X (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov).
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X .
- Vypočítajte $P(0 < X \leq 2), P(X > E(X))$.
- Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej X .

(i)

dané : $N = 3$ hody

p - prav., že hodíme súčet 9 na 2 kockách
(vypočítame pomocou klasic. prav.)

$$p = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad m \quad \left. \begin{array}{cc} \frac{3}{6} & \frac{6}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{5}{4} \end{array} \right\} = 4$$

$$X \sim \text{bino} \left(3, \frac{1}{9} \right)$$

$$n \quad \frac{6}{6} = 6^2 = 36$$

može podmíť číslo od 1-6

X - počet hodov, pri kt. hodíme súčet 9

$x_i = 0, 1, 2, 3$ hody

$$P(X=0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{9} \right)^0 \left(1 - \frac{1}{9} \right)^3 = \frac{512}{729}$$

Pr. 1:

$$P(X=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{9}\right)^1 \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{243}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^1 = \frac{8}{243}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(\frac{8}{9}\right)^0 = \frac{1}{729}$$

X_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{512}{729}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{8}{243}$	$\frac{1}{729}$

(ii)

$$E(X) = p \cdot N = \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}$$

$$D(X) = p \cdot N \cdot q = \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot \frac{8}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

Pr. 2:

11. V triede je 15 študentov, z ktorých jedna tretina študuje s vyznamenaním. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu vyznamenaných študentov medzi tromi náhodne vybranými študentmi. Určte:

- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);
- pravdepodobnosť, že medzi tromi náhodne vybranými študentmi bol aspoň jeden vyznamenaný študent.
- strednú hodnotu náhodnej premennej X .
- distribučnú funkciu náhodnej premennej X .

(i) dané: $M = 15$ študentov
 $K = \frac{1}{3}M = 5$ s vyznamenaním

$$N = 3$$

$M - K = 10$ s nemá vyznamenaním.

$$X \sim \text{hyper}(15, 5, 3)$$

X - počet vyznam. št. medzi 3 vybranými náhodne

$X_i = 0, 1, 2, 3$ vyz. študentov

$$P(X=0) = \frac{\binom{5}{0} \binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{120}{455}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{5}{2} \binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{100}{455}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{225}{455}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{3} \binom{10}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{10}{455}$$

Pr. 2:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{120}{455}$	$\frac{225}{455}$	$\frac{100}{455}$	$\frac{10}{455}$

ii

аспоћ 1 вызначена \checkmark = 1 а \checkmark \checkmark

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

алебо

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = \frac{335}{455}$$

iii

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M} = 3 \cdot \frac{17}{17} = 1$$

Pr. 3:

13. Do predajne príde priemerne 90 zákazníkov za hodinu. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

- v priebehu 5 minút nepríde do predajne žiaden zákazník,
 - v priebehu 3 minút prídu do predajne aspoň traja zákazníci,
 - v priebehu 4 minút prídu do predajne najviac traja zákazníci.
- [i) $5,53 \cdot 10^{-4}$; ii) 0,82641; iii) 0,1512]

(i)

- do predajne príde priemerne 90 zákazn. za 1 hod.

dané: $\lambda = 5 \cdot \frac{90}{60} = \frac{15}{2}$

5 min

$$X \sim \text{poiss} \left(\frac{15}{2} \right)$$

žiadny zákazník $\Rightarrow X = 0$

$$P(X=0) = \frac{\left(\frac{15}{2}\right)^0 e^{-\frac{15}{2}}}{0!} = 5,53 \cdot 10^{-4}$$

(ii)

$$\lambda = 3 \cdot \frac{90}{60} = \frac{9}{2} \quad \text{aspoň 3 zákazn.} = 3 \text{ a viac}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$$

$$P(X=0) = \frac{\left(\frac{9}{2}\right)^0 \cdot e^{-\frac{9}{2}}}{0!} = 0,011109$$

Pr. 4:

8.3.

V súbore desiatich výrobkov je osem 1. kvality a dva nepodarky. Výberom bez vrátenia je náhodne vybraných 5 výrobkov. Určte:

- pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej X – počtu výrobkov 1. kvality vo výbere,
- číselné charakteristiky $E(X)$, $D(X)$ a $\sigma(X)$.

Spolu: 10 výrobkov = M

8 - 1. kvality = K

2 - nepodarky

výber = 5 = N

$X \sim \text{hyge}(10, 8, 5)$

X - počet výrobkov 1. kvality vo výbere

$$x_i = 3, 4, 5 \quad P(X=3) = \frac{\binom{8}{3} \binom{2}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$

$$P(X=4) = \frac{\binom{8}{4} \binom{2}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{9}$$

$$P(X=5) = \frac{\binom{8}{5} \binom{2}{0}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$

Pr. 4:

$$E(x) = \frac{N \cdot K}{M} = \frac{5 \cdot 8}{10} = \underline{\underline{4}}$$

$$D(x) = \frac{(M-N) \cdot N \cdot K}{(M-1) \cdot M} \left(1 - \frac{K}{M}\right) = \frac{(10-5) \cdot 5 \cdot 8}{(10-1) \cdot 10} \left(1 - \frac{8}{10}\right)$$

$$D(x) = \frac{4}{9}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

x_i	3	4	5
p_i	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Pr. 5:

8.5.

V urne je 6 bielych a 4 čierne gule. Z urny sa postupne vyberie 5 gulí, pričom po každom ťahu sa guľa vráti späť. Určte:

- pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej X – počtu vytiahnutých bielych gulí,
- distribučnú funkciu a jej graf,
- číselné charakteristiky $E(X)$, $Mo(X)$, $D(X)$ a $\sigma(X)$;
- pravdepodobnosti $P(X < 3)$, $P(X \leq 3)$, $P(X > 1)$ a $P(1 < X < 4)$.

$$\begin{array}{r} B - 6 \\ \bar{C} - 4 \\ \hline S - 10 \end{array}$$

výber: 5

X - počet vytiahnutých B gulí

$$x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$X \sim \left(5, \frac{6}{10}\right)$$

A - vytiahneme B guľu

$$P(A) = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{10}{1}} = \frac{6}{10}$$

$$P(X=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{6}{10}\right)^0 \left(\frac{4}{10}\right)^5 = 0,01024$$

Pr. 5:

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \left(\frac{6}{10}\right)^1 \left(\frac{4}{10}\right)^4 = 0,0768$$

$$P(X=2) = \binom{5}{2} 0,6^2 0,4^3 = 0,2304$$

0	1	2	3	4	5
0,01204	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0776

$$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{6}{10} = 3$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1,2} = 1,04$$

$$D(X) = n p (1-p) = 5 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{10} = 1,2 \quad M_0(X) = 3$$

$$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,31744$$

$$P(X \leq 3) = P(X < 3) + P(X=3) = 0,66304$$

$$P(X > 1) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 0,91296$$

$$P(1 < X < 4) = P(2) + P(3) = 0,576$$

Pr. 5:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

$$F(0) = P(X \leq 0) = p_1 = 0,01024$$

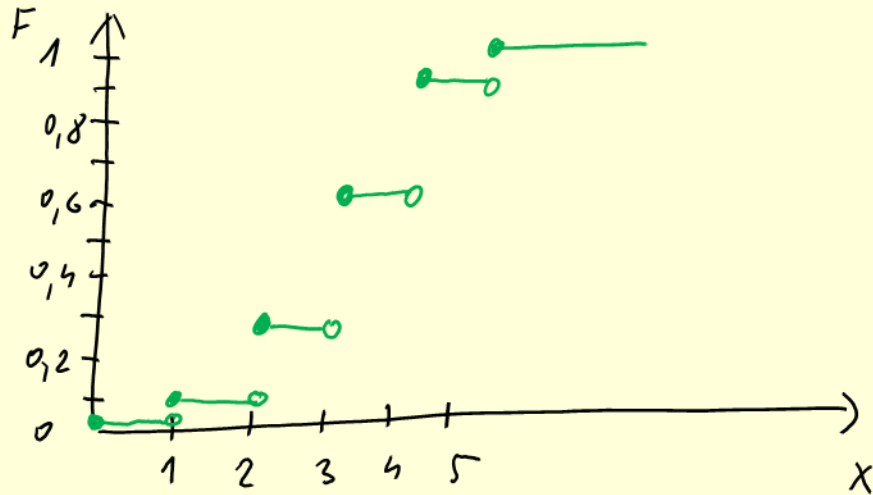
$$F(1) = P(X \leq 1) = p_1 + p_2 = 0,08804$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = 0,31744$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = 0,66304$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = 0,92224$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = 1$$



Pr. 6:

15. Rádioaktívna látka vyžaruje priemerne 80 častíc za minútu. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

- i. v priebehu 5 sekúnd vyžiari najviac 2 častice;
- ii. v priebehu 3 sekúnd vyžiari aspoň 4 častice.
- iii. v priebehu 6 sekúnd vyžiari 8 častíc.

[i) 0,03804; ii) 0,56653; iii) 0,1396]

$$a) \quad 80 \text{ v min} = \frac{80}{60} \text{ v sek.} = \frac{4}{3} \text{ v sek.}$$

$$\lambda = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} \quad X \sim \text{pois} \left(\frac{20}{3} \right)$$

najviac 2 častice = 0, 1, 2

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,03802$$

$$P(0) = \frac{e^{-\frac{20}{3}} \left(\frac{20}{3} \right)^0}{0!} = 0,00127$$

$$P(2) = 0,0283$$

$$P(1) = \frac{e^{-\frac{20}{3}} \left(\frac{20}{3} \right)^1}{1!} = 0,00848$$

Pr. 6:

$$b) \quad \lambda = 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

aspoň 4 častice = 4 a viac

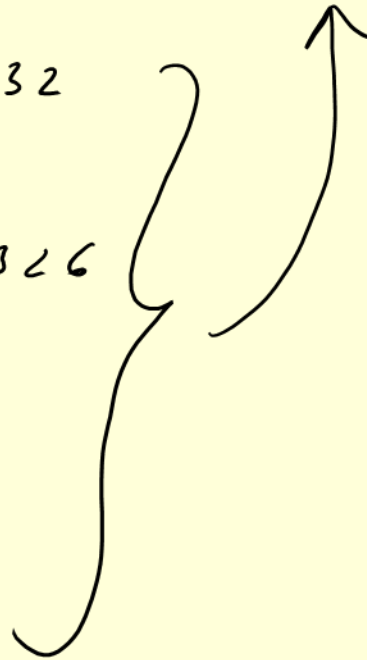
$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - 0,43348 = 0,56652$$

$$P(0) = \frac{e^{-4} 4^0}{0!} = 0,01832$$

$$P(1) = \frac{e^{-4} 4^1}{1!} = 0,07326$$

$$P(2) = 0,14653$$

$$P(3) = 0,19537$$



Pr. 6:

$$c) \quad \lambda = 6 \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

vy \bar{v}_i v_i 8 $\bar{c} \text{ s t c}$ — $x = 8$

$$P(8) = \frac{8^8 e^{-8}}{8!} = 0,1396$$

Dú: prepočítať všetky príklady zo súborov príkladov na precvičenie 2 a 3.

Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

1. Chýbajúca hodnota pravdepodobnosti v tabuľke je

- a) 1 b) 0,5 c) 2.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1		0,25	0,15

2. Stredná hodnota náhodnej premennej z otázky 1 je

- a) 1,45 b) 2,85 c) 1

3. Disperziu pre náhodnú premennú určíme podľa vzťahu

- a) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, b) $D(X) = E(X) - [E(X)]^2$, c) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]$.

4. Modus $M_0(X)$ z otázky 1 je

- a) 0,25 b) 1,5 c) 2 d) 1.

5. Pravdepodobnosť $P(1 < X < 3)$ z otázky 1 je

- a) 0,4 b) 0,25 c) 0,9.

6. Distribučná funkcia $F(2)$ z otázky 1 je

- a) 0,25 b) 0,6 c) 0,85, d) 0,5.

7. Ak $D(X) = 0,7475$ potom smerodajná odchýlka je

- a) 0,865 b) 0,6 c) 1,495.

8. V záhone je posadených 12 cibuliek kvetov, medzi ktorými sú aj narcisy, ktoré kvitnú skôr ako ostatné. Pravdepodobnosť skoršieho kvitnutia narcisov je 60%. Pre výpočet pravdepodobnosti, že za pekného počasia rozkvitne 5 narcisov, sú parametre k , p , n

a) $k = 5$, $p = 12$, $n = 0,6$,

b) $k = 12$, $p = 0,6$, $n = 5$,

c) $k = 5$, $p = 0,6$, $n = 12$.

9. Pravdepodobnosť, že rozkvitne 5 narcisov z otázky 8 je

a) $\binom{12}{5} 0,6^5 \cdot 0,4^7$

c) $\binom{12}{6} 0,5^5 \cdot 0,5^7$

b) $\binom{12}{5} 0,4^5 \cdot 0,6^7$

d) $\binom{12}{6} 0,5^{12} \cdot 0,5^0$.

10. Vo vrecku sú žetóny, 10 žetónov červenej farby a 5 žltej farby. Postupne vyťahujeme po jednom žetóne a zistíme jeho farbu a vrátime ho späť. Pravdepodobnosť, že medzi 4 postupne za sebou vytiahnutými žetónmi bude najviac jeden červenej farby bude daná

a) $P_{4, \frac{2}{3}}(1)$,

c) $P_{4, \frac{2}{3}}(0) + P_{4, \frac{2}{3}}(1)$,

b) $P_{4, \frac{1}{3}}(0) + P_{4, \frac{1}{3}}(1)$,

d) $1 - (P_{4, \frac{2}{3}}(0) + P_{4, \frac{2}{3}}(1))$.

11. V dvoch vrecúškach je po 5 lístkov, na ktorých sú čísla od 1 – 5. Z každého ťaháme po jednom lístku. Vykonáme 4 ťahy. X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet ťahov, pri ktorých bude súčet na dvoch náhodne vytiahnutých lístkoch rovný 8. Hodnota x_i bude

- a) 0 - 4, b) 1 - 5, c) 0 – 8.

12. V otázke 11 pri zostavení pravdepodobnostnej tabuľky náhodnej premennej X použijeme

- a) Poissonovo rozdelenie,
b) hypergeometrické rozdelenie,
c) binomické rozdelenie,
d) Bernoulliho vetu.

13. V otázke 11 sú dané parametre

- a) $n = 4$, $p = 3/25$, b) $M = 10$, $K = 4$, $N = 8$,
c) $k = 5$, $p = 3/5$, $n = 4$ d) $\lambda = 8$.

14. Vzťah pre pravdepodobnosť pri binomickom rozdelení je daný

a) $P(X) = \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}}$, b) $P(X) = \frac{\lambda^x e^{-x}}{x!}$,
c) $P(X) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, d) $P(X) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

15. Pravdepodobnosť $P_{n,p}(k)$ predstavuje

- a) pravdepodobnosť javu A pri danom pokuse,
- b) pravdepodobnosť, že pri n – násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve k - krát,
- c) pravdepodobnosť počtu nastatia javu A pri danom pokuse.

16. V priebehu jednej hodiny príde na čerpaciu stanicu priemerne 90 zákazníkov. Hodnota parametra λ pri určení pravdepodobnosti, že za 4 minúty prídu práve dvaja je

- a) $\lambda = 1,5$
- b) $\lambda = 3,$
- c) $\lambda = 6.$

17. Stredná hodnota náhodnej premennej z otázky 11 bude určená

- a) $E(X) = n \cdot p$,
- b) $E(X) = \lambda,$
- c) $E(X) = \frac{N \cdot K}{M},$
- d) $E(X) = \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} x_i p_i.$

18. V nádobe na zber starých plechoviek je 50 ks plechoviek, z nich je 15 od nealkoholického nápoja a zbytok je od piva. Pravdepodobnosť, že medzi 8 náhodne vybranými budú 2 od nealkoholického nápoja je

a) $P(X) = \frac{\binom{35}{2} \binom{15}{6}}{\binom{50}{8}},$

b) $P(X) = \frac{\binom{15}{2} \binom{35}{6}}{\binom{50}{8}},$

c) $P(X) = \binom{8}{2} 2^{15} \cdot 6^{35}$

d) $P(X) = \binom{50}{15} 2^{15} \cdot 6^{35} .$

19. Firma vyrábajúca počítače expedovala 100 počítačov. Pravdepodobnosť, že sa počítač cestou pokazí je 0,05. Náhodou rozbalíme 3 počítače. X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet pokazených počítačov, medzi náhodne vybranými. Chýbajúce hodnoty v pravdepodobnostnej tabuľke sú

a) $p_1 = \frac{1083}{8000}$, $p_3 = \frac{1}{8000}$,

b) $p_1 = \frac{1}{100}$, $p_3 = \frac{3}{100}$,

c) $p_1 = \frac{3492}{25}$, $p_3 = \frac{1}{25}$.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{6859}{8000}$		$\frac{57}{8000}$	

20. Disperzia z otázky 19 je

a) $D(x) = 4,75$, b) $D(x) = 0,1425$, c) $D(x) = 5,125$.

21. Stredná hodnota náhodnej premennej z otázky 18 je

a) $E(X) = 1,2$, b) $E(X) = 30$, c) $E(X) = 2,4$, d) $E(X) = 0,6$.

22. V dielni sa vyrobilo 10 ks výrobkov, z nich sú 3 chybné. Pri zostavení pravdepodobnostnej tabuľky náhodnej premennej X použijeme

- Poissonovo rozdelenie,
- hypergeometrické rozdelenie,
- binomické rozdelenie,
- Bernoulliho vetu.

23. Pravdepodobnosť, že medzi 5 náhodne vybranými bude 1 chybný z otázky 22 je

a) $P(10) = 0,834$,

b) $P(10) = 0,4167$,

c) $P(10) = 0,0138$.

24. Úspešnosť zásahu cieľa istého športovca je 65%. Pri dvadsiatich nezávislých výstreloch zasiahne cieľ 7- krát. Parametre n a p sú

a) $n = 7$, $p = 0,65$, b) $n = 20$, $p = 7$, c) $n = 20$, $p = 0,65$, c) $n = 0,65$, $p = 7/20$.

25. V košíku je 10 kusov ovocia, z toho 6 hrušiek. Náhodou vyberieme 2 kusy ovocia. X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hrušiek medzi náhodne vybranými. Chýbajúce hodnoty v pravdepodobnostnej tabuľke sú

a) $\frac{15}{45}, \frac{24}{45}$, b) $\frac{15}{45}, \frac{15}{45}$,

c) $\frac{24}{45}, \frac{15}{45}$.

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{6}{45}$		

26. Na cvičenia z matematiky v priebehu jednej minúty príde 5 študentov.

Pravdepodobnosť, že v priebehu 30 sekúnd na cvičenia nepríde žiaden študent je

a) 0,25 b) 0,001, c) 0,082.

27. Stredná hodnota náhodnej premennej z otázky 26 je

a) 0,0834 b) 2,5, c) 0,167.

Správne odpovede:

1b, 2a, 3a, 4d, 5b, 6c, 7a, 8c, 9a, 10b, 11a, 12b, 13a, 14c, 15b, 16c, 17a, 18b, 19a, 20b, 21c, 22b, 23b, 24c, 25c, 26c, 27b

Hodnotenie:

0 – 4 nesprávne odpovede – máš vedomosti o Bernoulliho vzorci a diskkrétnej náhodnej premennej

5 - 15 nesprávne odpovede – tvoje vedomosti sú celkom dobré

16 a viac nesprávnych odpovedí – tvoje vedomosti nie sú postačujúce, odporúčam sa na to ešte raz pozrieť