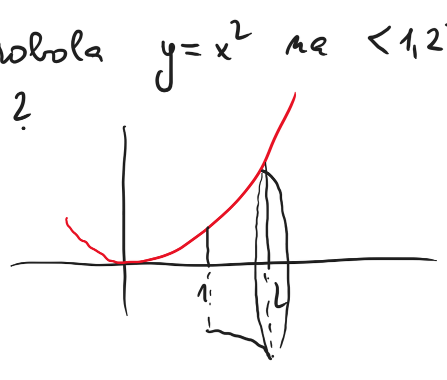
Nevlastný integrál

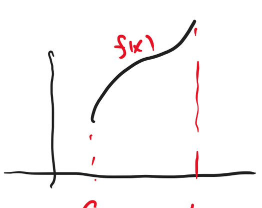
Parabola $y=x^2$ na $\langle 1,2\rangle$ rotuje okolo osi x

V = ?



$$V=\pi\int_1^2 (x^2)^2 dx = \pi\int_1^2 x^4 dx = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{5}(2^5-1)$$

Pr.: Pred tým



l – dĺžka krivky

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$ → no PR, ↳ no PR.

$y=x^2$ $\langle 1,2\rangle$

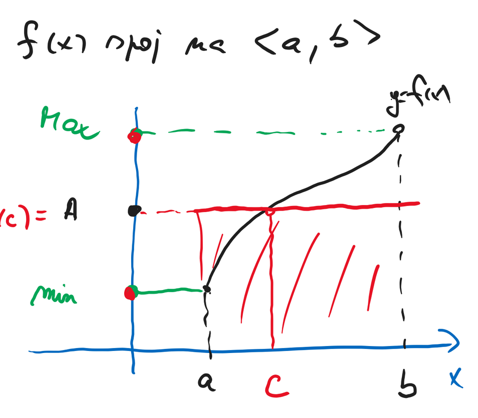
$y'=2x$ $l=\int_1^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$ → nepr. int.

Veta o strednej hodnote

Moduláciu daní hodnoty $a_1, a_2, \dots, a_m$

priemerná hod. $\frac{a_1+a_2+\dots+a_m}{m}$ DISKRÉTNY PRÍPAD

$f(x)$ spoj na $\langle a,b\rangle$



Aká je jej priemerná hodnota ??? geomet. interpretácia?!

$m = min \le f(x) \le Max = M$ $/\int_a^b$

$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$

$m(b-a)$ $A=f(c)$ $M(b-a)$

$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ (číslo, číslo)

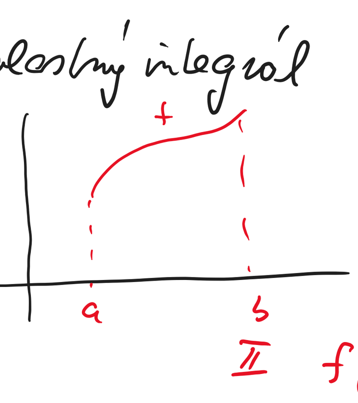
$\exists c$: $f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)dx$ (P, P_f)

obsah obdĺž. ↳ Plocha pod f

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$ → priemerná hod.

Nevlastný integrál

Vlastný $\int_a^b f(x)dx$ ..



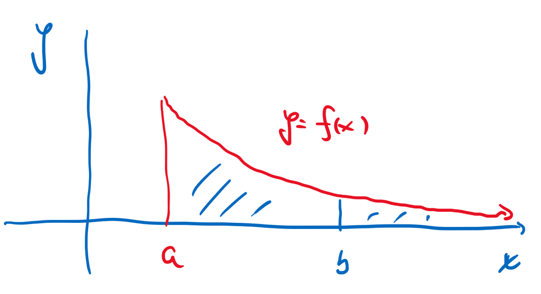
I $\langle a,b\rangle$ konečný II f je ohraničená

AK NIEČO NEPLATÍ ⇒ Nevlastný integrál

typ I
$\langle a,\infty)$ (resp. $(-\infty,a\rangle$) (resp. $(-\infty,\infty)$)

typ II Myslíme limity
$f(c)=\infty$ resp.

Typ I.
f je spoj na $\langle a,\infty)$ (ohran.)



Čo je $\int_a^\infty f(x)dx$ plocha (limitná)

‖ STRUČNÁ DEF NEVL. int. I

$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ plocha

Defin. nevlastn.
Nech f je spoj na $\langle a,\infty)$
- f je integr. na $\langle a,b\rangle$ pre $\forall b>a$
- existuje vlastná $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$

Potom $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$

KONVERG. (inde DIV.)

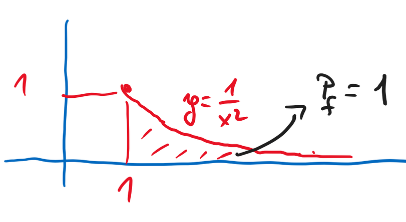
} logická def. VÝPOČET ZÁKL.

Verzia pre počítačiel (ZRÝCHLENÁ)

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \overset{N-L}{=} \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_a^b = \left(\lim_{b\to\infty} F(b)\right) - F(a)$$
$$= F(\infty)-F(a) = F(x)\Big|_a^\infty$$

$\int_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty$ ∞ → limita

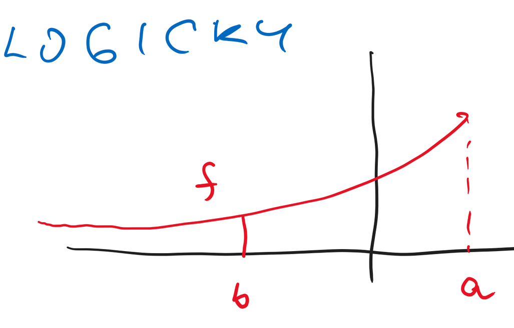
P. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$



1° zákl. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right)=1$

2° rýchl. $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$

ANALOGICKY



b<a

$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$

konečná limita (inak $\int_{-\infty}^a$ DIVERGUJE)

NAKONIEC

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

ak oba sú konverg. — dobre už nadefinované

$a\in(-\infty,\infty)$ spravidla $a=0$

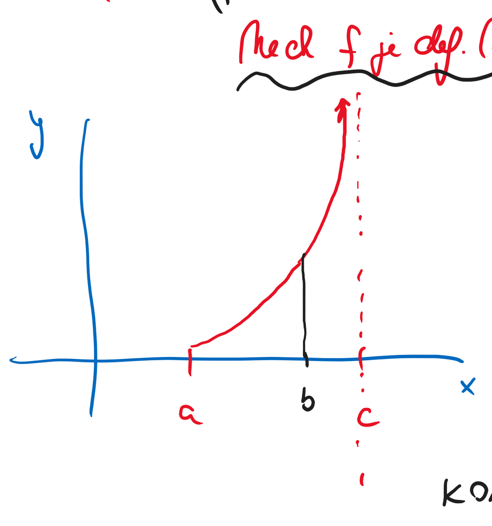
POZOR ↓

TYP 2:

Nech f je def. (spoj) na $\langle a,c)$, pričom (PROBLÉMOVÝ BOD JE PRAVÝ KONCOVÝ BOD INTERVALU)

$\lim_{x\to c^-}|f(x)|=\infty$

t.j. $x=c$ je ABS

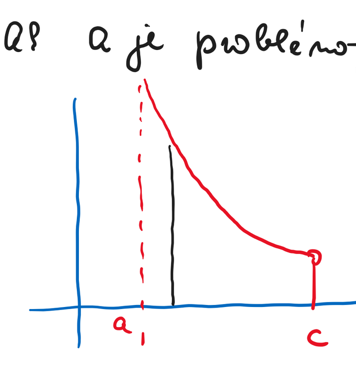


Ako definovať ?

$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c^-}\int_a^b f(x)dx$ táto limita musí byť konečná

KONVERG.

Ak a je problémový bod

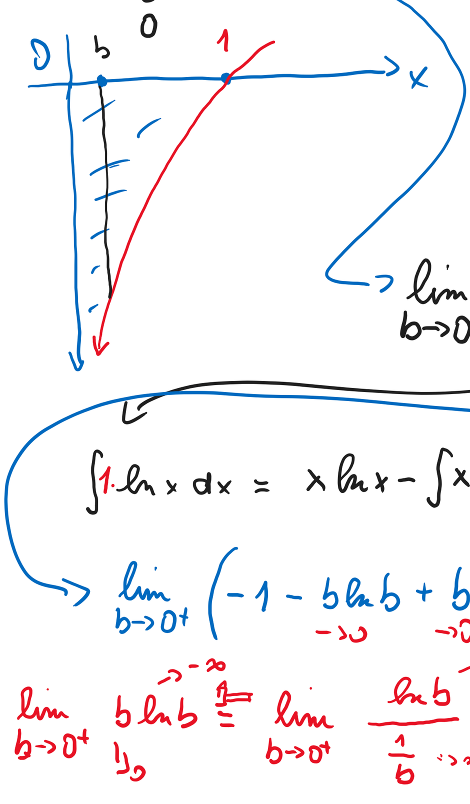


f je spoj na $(a,c\rangle$ & $\lim_{x\to a^+}|f(x)|=\infty$ $x=a$ je ABS

$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to a^+}\int_b^c f(x)dx$ ↳ musí byť konečná limita

Pr. $\int_0^1 \ln x\,dx \overset{?}{=} -1$ ZÁPORNÁ = ak existuje, je to záporné číslo

0 – je probl. bod lebo $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$



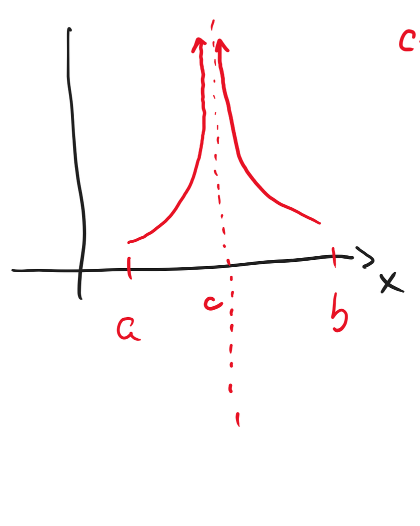
$$\lim_{b\to 0^+}\int_b^1 \ln x\,dx = \lim_{b\to 0^+}(x\ln x - x)\Big|_b^1 =$$

$\int 1\cdot\ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x$

$\lim_{b\to 0^+}(-1 - b\ln b + b) = -1$ ($b\ln b\to 0$, $b\to 0$)

$$\lim_{b\to 0^+} b\ln b \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{b\to 0^+}\frac{\ln b}{\frac{1}{b}} \overset{L'H}{=} \lim_{b\to 0^+}\frac{\frac{1}{b}}{-\frac{1}{b^2}} = \lim_{b\to 0^+}(-b) = 0$$

OSTAL PRÍPAD, KEĎ PROBL. BOD JE VO VNÚTRI INTERVALU



$c\in(a,b)$

buď $\lim_{x\to c^-}|f(x)|=\infty$ alebo $\lim_{x\to c^+}|f(x)|=\infty$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ (konv, konv)

Probl. body sú koncové body intervalu (a to už máme vyriešené!!)