Pojem náhodnej premennej

Pod **náhodnou premennou** budeme rozumieť takú premennú, ktorá svoje hodnoty nadobúda náhodne.
Príklady náhodnej premennej:

1. Súčet bodov hodených napr. na troch bežných hracích kockách (možné hodnoty: $3, 4, \dots, 18$);
2. počet bodov, ktoré študent získa z písomky,
3. počet úspešných hodov do basketbalového koša,
4. počet výtlkov na ceste z Košíc do Prešova,
5. doba, ktorú študent strávi pri príprave na skúšku,
6. výška dospelého muža,
7. polčas rozpadu rádioaktívnej látky (nadobúda hodnoty z určitého intervalu).

Náhodné premenné delíme na

- **diskrétne**,
- **spojité**.

Definícia náhodnej premennej

Definícia

Pod **náhodnou premennou** rozumieme každé zobrazenie $X : \gamma \to \mathbb{R}$, kde γ je množina elementárnych javov a $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Pre každý elementárny jav E je zrejme $X(E)$ nejaké reálne číslo, ktoré nazývame **hodnotou náhodnej premennej pre elementárny jav E** alebo skrátene **hodnotou náhodnej premennej**.

Náhodná premenná priradí každému elementárnemu javu nejaké reálne číslo.
Každému javu A priradí číselnú množinu tvorenú číslami, ktoré sú priradené elemen. javom, na ktoré sa jav A rozkladá.
Náhodné premenné – $X, Y, X_1, X_2, \ldots$
Hodnoty náhodných premenných – $x, y, x_1, x_2, \ldots$.
Budeme predpokladať, že pre každé $a \in \mathbb{R}$ vieme určiť pravdepodobnosti typu:

1. $P(X = a)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnota náhodnej premennej X je rovná číslu a;
2. $P(X \leq a)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnoty náhodnej premennej X nebudú väčšie než číslo a;
3. $P(X \in I)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná X nadobúda hodnoty z intervalu I.

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia

Distribučná funkcia F **náhodnej premennej** X je funkcia, ktorá je pre každé $x \in \mathbb{R}$ určená predpisom

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{1}$$

Veta (Vlastnosti distribučnej funkcie)

1. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *je* $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *a* $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;
3. F *je neklesajúca funkcia, t. j. pre každé* $a < b$ *je* $F(a) \leq F(b)$;
4. F *je sprava spojitá pre diskrétnu náhodnú premennú a spojitá pre spojitú náhodnú premennú na celej množine reálnych čísel;*
5. *ak* $a < b$, *tak*

$$P(X \in (a, b\rangle) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Diskrétna náhodná premenná

Definícia (Rozdelenie diskrétneho typu)

Náhodná premenná X má **rozdelenie diskrétneho typu**, ak existuje konečná alebo spočítateľná množina reálnych čísel $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ taká, že pre každé $x_i \in \mathcal{H}(X)$ je daná pravdepodobnosť $P(X = x_i) = p_i$ a platí $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$. Množinu $\mathcal{H}(X)$ nazývame **obor hodnôt** náhodnej premennej X.

Náhodnú premennú X môžeme popísať tabuľkou:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline P(X = x_i) = p_i & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}, \tag{3}$$

ktorú nazývame **pravdepodobnostná tabuľka náhodnej premennej X**.
Iný spôsob zadania je **pravdepodobnostnou funkciou**

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{ak } x = x_i \in \mathcal{H}(X); \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \tag{4}$$

Modus a stredná hodnota náhodnej premennej

Definícia

Modus diskrétnej náhodnej premennej X je najpravdepodobnejšia hodnota tejto náhodnej premennej. Označujeme $\mathcal{M}o(X)$.

$\mathcal{M}o(X)$ sa môže rovnať viac-prvkovej množine. V krajnom prípade $\mathcal{M}o(X) = \mathcal{H}(X)$, ak je pravdepodobnosť rovnaká pre všetky hodnoty $x_i \in \mathcal{H}(X)$.

Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X. Pod **strednou hodnotou náhodnej premennej** X rozumieme číslo $E(X)$, ktoré je definované pre diskrétnu náhodnú premennú vzťahom

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i.$$

Disperzia

Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X, ktorej stredná hodnota je $E(X)$. Pod **disperziou (rozptylom) náhodnej premennej** X rozumieme číslo $D(X)$ (ak existuje), ktoré je definované takto

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 p_i.$$

Pod **smerodajnou odchýlkou náhodnej premennej** X rozumieme číslo $\sigma(X)$, ktoré je definované takto

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{5}$$

Vlastnosti strednej hodnoty a disperzie

Veta

Nech X je náhodná premenná a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. *ak $X = a$ je konštantná náhodná premenná, tak $E(X) = a$ a $D(X) = 0$;*
2. $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$;
3. $E(X - E(X)) = 0$;
4. $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$;
5. $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, *kde* $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$.

Dôkaz. Dokážeme tvrdenie 5:

$D(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2 \cdot X \cdot E(X) + (E(X))^2] =$
$E(X^2) + E[-2 \cdot X \cdot E(X)] + E[(E(X))^2] = E(X^2) - 2 \cdot E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 =$
$E(X^2) - [E(X)]^2$,

Príklad

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X so strednou hodnotou 3,7 je dané pravdepodobnostnou tabuľkou

x_i	1	2	3	4	x_5
p_i	0,1	p_2	0,3	0,35	0,2

. Určte:

a) *neznáme hodnoty x_5 a p_2;*

b) *disperziu a modus náhodnej premennej X;*

c) $P(X \geq 5)$ *a* $P(E(X) < X \leq 7)$*;*

Riešenie.
a) Hodnotu p_2 určíme zo vzťahu $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.
Teda: $0,1 + p_1 + 0,3 + 0,35 + 0,2 = 1$, odtiaľ $p_2 = 0,05$.
Pre určenie hodnoty x_5 dosadíme do vzorca pre strednú hodnotu, ktorá je daná.
Dostávame

$$1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,35 + 0,2 \cdot x_5 = 3,7 \implies x_5 = 6.$$

b) $D(X) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - 3,7)^2 \cdot 0,1 + (2 - 3,7)^2 \cdot 0,05$
$+ (3 - 3,7)^2 \cdot 0,3 + (4 - 3,7)^2 \cdot 0,35 + (6 - 3,7)^2 \cdot 0,2 = 2,11.$
Modus je najpravdepodobnejšia hodnota, teda $\mathcal{M}o(X) = 4$.
c) $P(X \geq 5) = P(X = 6) = 0,2;$
$P(E(X) < X \leq 7) = P(3,7 < X \leq 7) = P(X = 4) + P(X = 6) = 0,55$

Príklad

Hádžeme dvoma kockami. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnotu maxima z hodených hodnôt. Určte:

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *distribučnú funkciu $F(x)$;*

c) $P(X < 4)$, $P(X \geq 3)$, $P(2 < X \leq 5)$,

d) *strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$.*

Riešenie. a) Maximum hodených hodnôt môže byť 1,2,3,4,5 alebo 6. Teda $\mathcal{H}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pre každú hodnotu z množiny $\mathcal{H}(X)$ vypočítame pravdepodobnosť, s ktorou je daná hodnota dosiahnutá.
Pre výpočet $P(X = 1)$ si treba uvedomiť, že maximum sa rovná 1 len v prípade, že na obidvoch kockách hodíme číslo 1, teda $m = 1$, $n = 36$. Odtiaľ $P(X = 1) = \frac{1}{36}$.
$P(X = 2) = \frac{3}{36}$, lebo maximum je rovné 2 pre dvojice (1,2), (2,1), (2,2).
Rovnakým spôsobom vypočítame zvyšné pravdepodobnosti. Výsledok zapíšeme do tabuľky

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

c) $P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;
$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$;
$P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$;
alebo inak podľa (10):
$P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{25}{36} - \frac{4}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

d) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}$;

$D(X) = \sum_{i=1}^{6} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{1}{36} + (2 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{3}{36} + (3 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{5}{36} +$
$(4 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{7}{36} + (5 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{9}{36} + (6 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{2555}{1296}$.

Inak môžeme $D(X)$ vypočítať podľa vzťahu $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
Vypočítame
$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 16 \cdot \frac{7}{36} + 25 \cdot \frac{9}{36} + 36 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36}$ a dosadíme
$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{791}{36} - (\frac{161}{36})^2 = \frac{2555}{1296}$

Rozdelenia pravdepodobnosti diskrétnych náhodných premenných

Binomické rozdelenie pravdepodobnosti

Vstupy: Prirodzené číslo n a reálne číslo $p \in (0, 1)$.

Definícia

Náhodná premenná X má binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami n a p *práve vtedy, keď*

1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$;

2.

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}. \quad (6)$$

Používame pritom označenie $X \sim bino(n; p)$.

Veta

Ak $X \sim bino(n; p)$, tak

$$E(X) = n \cdot p, \qquad D(X) = n \cdot p \cdot q \quad a \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \text{kde } q = 1 - p. \quad (7)$$

Príklad

Predpokladajme, že hádžeme kockou. Vykonáme 4 hody. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme číslo väčšie ako 4.

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.*

Riešenie. a) Pravdepodobnosť, že pri hode kockou hodíme číslo väčšie ako 4, je $p = \frac{1}{3}$. Jedná sa o opakované nezávislé pokusy, náh. prem. X má binomické rozdelenie, teda $X \sim bino(4; \frac{1}{3})$. Máme $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vypočítame všetky pravdepodobnosti:

$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot (\frac{1}{3})^0 \cdot (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$; $P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot (\frac{1}{3})^1 \cdot (\frac{2}{3})^3 = \frac{32}{81}$;

$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 = \frac{24}{81}$; $P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{2}{3})^1 = \frac{8}{81}$;

$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot (\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{2}{3})^0 = \frac{1}{81}$.

Výsledky zapíšeme do tabuľky:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

b) $E(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$.

Poznámka. Môžete si overiť, že rovnaké hodnoty dostaneme aj použitím všeobecných vzorcov pre $E(X)$ a $D(X)$.

Hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti

Toto rozdelenie pravdepodobnosti môže byť charakterizované modelom, v ktorom je daná množina objektov M, pričom K objektov má určitú vlastnosť a $M - K$ objektov nemá túto vlastnosť. Z tejto množiny vyberieme bez vrátenia N objektov. Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že medzi vybratými objektmi je x takých, ktoré majú túto vlastnosť.

Definícia

Náhodná premenná X má hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami M, K a N *práve vtedy, keď*

1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{\max\{0, K - M + N\}, \ldots, \min\{K, N\}\}$;

2.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}} \text{ pre každé } x \in \mathcal{H}(X). \tag{9}$$

Používame označenie $X \sim hyge(M, K, N)$.

Veta

Ak $X \sim hyge(M, K, N)$, tak

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M} \quad a \quad D(X) = \frac{(M-N) \cdot N \cdot K}{(M-1) \cdot M} \left(1 - \frac{K}{M}\right). \tag{10}$$

Príklad

Triedny učiteľ zistil, že 12 z 30 študentov býva na stredoškolskom internáte. Náhodne vyberieme 10 študentov. Aká je pravdepodobnosť, že

a) *6 študenti bývajú na stredoškolskom internáte,*

b) *najviac 3 študenti bývajú na stredoškolskom internáte.*

Riešenie. $M = 30;\ N = 10;\ K = 12.$

a) $P(X = 6) = \dfrac{\binom{12}{6} \cdot \binom{18}{4}}{\binom{30}{10}} = 0,0941$

b) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$
$\dfrac{\binom{12}{0} \cdot \binom{18}{10}}{\binom{30}{10}} + \dfrac{\binom{12}{1} \cdot \binom{18}{9}}{\binom{30}{10}} + \dfrac{\binom{12}{2} \cdot \binom{18}{8}}{\binom{30}{10}} + \dfrac{\binom{12}{3} \cdot \binom{18}{7}}{\binom{30}{10}} =$
$0,00145 + 0,0194 + 0,0961 + 0,2330 = 0,34955$

Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti

Poissonovo rozdelenie je rozdelenie diskrétnej náhodnej premennej X, ktoré má nasledovné vlastnosti:

- Experiment pozostáva z počítania, koľkokrát jav nastane v danom intervale. Interval môže byť interval času, vzdialenosti, plochy, objemu...
- Pravdepodobnosť, že k javu dôjde, je rovnaká v ľubovoľnom intervale.
- Počet výskytov javu v jednom intervale je nezávislý na počte výskytov v iných intervaloch.
- Priemerný počet výskytov javu je priamo úmerný dĺžke intervalu.
- Priemerný počet výskytov javu v danom intervale je známy a rovná sa číslu λ.

Definícia

Náhodná premenná X má Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ *práve vtedy, keď*
1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
2.

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!} \text{ pre každé } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{11}$$

Používame pritom označenie $X \sim poiss(\lambda)$.

Veta

Ak $X \sim poiss(\lambda)$, tak

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda \quad a \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{12}$$

Príklad

Rybár chytí priemerne 2 ryby v priebehu 3 hodín. Predpokladajme, že rybár strávi pri rybníku 7 hodín. Aká je pravdepodobnosť, že chytí
a) práve 4 ryby, b) aspoň 3 ryby, c) aspoň 3, ale najviac 6 rýb?

Riešenie. $\lambda = 7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

a) $P(X = 4) = \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^4}{4!} = 0,1858$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$
$1 - [\dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^0}{0!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^1}{1!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^2}{2!}] = 0,8443$

c) $P(3 \leq X \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$
$\dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^3}{3!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^4}{4!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^5}{5!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^6}{6!} = 0,6534$

Spojitá náhodná premenná a jej hustota pravdepodobnosti

Príklady spojitej náhodnej premennej:

- doba, ktorú študent strávi pri príprave na skúšku,
- výška človeka,
- hmotnosť dieťaťa daného veku,
- polčas rozpadu rádioaktívnej látky,
- fyzikálne vlastnosti látok, napr. pevnosť, pružnosť, teplota topenia,. . .

Definícia

Náhodnú premennú X nazývame **spojitou** práve vtedy, keď existuje taká nezáporná a na množine $\mathbb{R}$ integrovateľná funkcia f, pre ktorú platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{13}$$

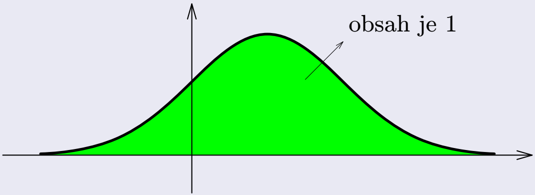
kde F je distribučná funkcia náhodnej premennej X. Takejto funkcii f hovoríme **hustota pravdepodobnosti náhodnej premennej** X.

Poznámka: Distribučná funkcia $F(x)$ je definovaná rovnako ako pre diskrétnu náhodnú premennú vzťahom $F(x) = P(X \leq x)$.

Veta (Vlastnosti hustoty pravdepodobnosti)

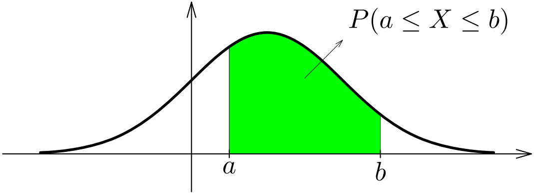
Pre spojitú náhodnú premennú platí:

1. *ak hodnota* $f(x)$ *existuje, tak* $f(x) \geq 0$;
2. *ak existuje derivácia* $F'(x)$, *tak* $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
3. *tzv. „normalizačná podmienka“:* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$,



Ďalšie vlastnosti spojitej náhodnej premennej:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
2. distribučná funkcia $F(x)$ je spojitá na celej množine reálnych čísel;
3. pre každé $a \in \mathbb{R}$ je $P(X = a) = 0$;
4. $$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = \\ &= P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \end{aligned} \tag{14}$$



Graf hustoty pravdepodobnosti $f(x)$

Stredná hodnota a disperzia spojitej náhodnej premennej

Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X. Pod **strednou hodnotou** spojitej náhodnej premennej X rozumieme číslo $E(X)$, ktoré je definované pre spojitú náhodnú premennú vzťahom

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

Pod **disperziou (rozptylom) náhodnej premennej X** rozumieme číslo $D(X)$, ktoré je definované vzťahom

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\, dx.$$

Pod **smerodajnou odchýlkou náhodnej premennej X** rozumieme číslo $\sigma(X)$, ktoré je definované takto

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{15}$$

Príklad

Daná je funkcia $F(x) = \begin{cases} a & \textit{pre } x < -4, \\ bx + c & \textit{pre } x \in \langle -4; 2\rangle. \\ d & \textit{pre } x > 2. \end{cases}$ *Určte:*

a) *pre aké hodnoty* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *je* F *distribučnou funkciu náh. prem.* X*;*

b) *hustotu pravdepodobnosti náhodnej premennej* X*;*

c) $P(X \leq 0),\ P(-5 \leq X < -3)$*;*

d) *strednú hodnotu* $E(X)$ *a disperziu* $D(X)$*.*

Riešenie. a)Pre výpočet koeficientov a, d použijeme vzťahy $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.
Dostávame $a = 0,\ d = 1$. Koeficienty b, c určíme na základe spojitosti funkcie $F(x)$.
$F(x)$ je spojitá v bode $x = -4$, ak platí $-4b + c = 0$.
$F(x)$ je spojitá v bode $x = 2$, ak platí $2b + c = 1$.
Dostávame sústavu dvoch lineárnych rovníc, riešením ktorej je $b = \frac{1}{6}, \quad c = \frac{2}{3}$.

Teda $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < -4, \\ \frac{1}{6}x + \frac{2}{3} & \text{pre } x \in \langle -4; 2\rangle, \\ 1 & \text{pre } x > 2. \end{cases}$

b) Hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ určíme zo vzťahu $f(x) = F^{'}(x)$. Dostávame

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < -4, \\ \frac{1}{6} & \text{pre } x \in \langle -4; 2 \rangle, \\ 0 & \text{pre } x > 2. \end{cases}$$

c) $P(X \leq 0) = F(0) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$,
$P(-5 \leq X < -3) = F(-3) - F(-5) = \left(\frac{1}{6} \cdot (-3) + \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{6}$.

d) $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx =$

$$\int\limits_{-\infty}^{-4} 0 \cdot x\, dx + \int\limits_{-4}^{2} \frac{1}{6} \cdot x\, dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0 \cdot x\, dx = 0 + \left[\frac{1}{6}\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{2} = \frac{1}{12}(4 - 16) = -1$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\, dx = \int\limits_{-4}^{2} \frac{1}{6} \cdot (x+1)^2\, dx = \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-4}^{2} =$$

$$\frac{1}{18}(27 - (-27)) = \frac{54}{18} = 3$$

Príklad

Majme danú funkciu f predpisom $f(x) = \begin{cases} k \cdot (x+1) & \textit{pre } x \in \langle -1, 0), \\ k & \textit{pre } x \in \langle 0, 2), \\ 0 & \textit{pre } x \notin \langle -1; 2\rangle; \end{cases}$

kde $k \in R$. Určme:
a) konštantu k tak, aby funkcia f bola hustotou pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X;
b) predpis distribučnej funkcie tejto náhodnej premennej;
c) $P(0 < X)$.

a) Hodnotu k určíme z normalizačnej podmienky. Vypočítame

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} k \cdot (x+1) \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} k \cdot \mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0 \cdot \mathrm{d}x =$$

$$0 + k \cdot \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + k \cdot \Big[x\Big]_{0}^{2} + 0 = \frac{1}{2}k + 2k$$

Podľa normalizačnej podmienky $\frac{1}{2}k + 2k = 1 \Rightarrow k = 0{,}4$. Dostávame

$$f(x) = \begin{cases} 0,4 \cdot (x+1) & \text{pre } x \in \langle -1, 0), \\ 0,4 & \text{pre } x \in \langle 0, 2), \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle -1; 2\rangle; \end{cases}$$

b) Na základe vzťahu $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ je

- pre $x \in (-\infty, -1)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$;
- pre $x \in \langle -1, 0)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{x} 0{,}4 \cdot (t+1)\,\mathrm{d}t = 0 + 0,4\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{x} =$ $0,4(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + 1) = 0{,}2x^2 + 0,4x + 0,2 = 0,2(x+1)^2$;
- pre $x \in \langle 0, 2)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{0} 0{,}4 \cdot (t+1)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{x} 0{,}4\,\mathrm{d}t =$ $0 + 0,4\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{0} + 0,4\Big[t\Big]_{0}^{x} = 0{,}2(2x+1)$; (po úprave)
- pre $x \in \langle 2, \infty)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{0} 0{,}4 \cdot (t+1)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2} 0{,}4\,\mathrm{d}t + \int\limits_{2}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 1$

Teda

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \in (-\infty, -1); \\ 0{,}2 \cdot (x+1)^2 & \text{pre} \quad x \in \langle -1, 0), \\ 0{,}2 \cdot (2x+1) & \text{pre} \quad x \in \langle 0, 2), \\ 1 & \text{pre} \quad x \in \langle 2, \infty). \end{cases}$$

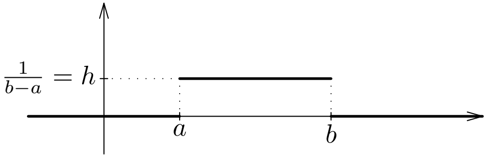
c) $P(X < 0) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} 0,4 \cdot (x+1) \cdot \mathrm{d}x = 0,4 \cdot \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} = 0,2.$

Definícia

Náhodná premenná X má spojité rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti na intervale $\langle a, b\rangle$ *práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} h & \text{pre } x \in \langle a, b\rangle, \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle a, b\rangle, \end{cases} \tag{16}$$

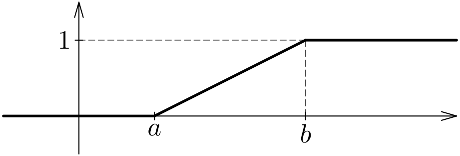
pre nejaké $h \in R$. Používame pritom označenie $X \sim unif(a; b)$.



Obr.: Graf hustoty pravdepodobnosti $f(x)$

Nájdenie predpisu pre distribučnú funkciu F:

- pre $x \in (-\infty, a)$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \,\mathrm{d}t = 0;$
- pre $x \in \langle a, b \rangle$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \,\mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t = \frac{x-a}{b-a};$
- pre $x \in (b, \infty)$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \,\mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t + \int\limits_{b}^{x} 0 \,\mathrm{d}t = 1.$



Obr.: Graf distribučnej funkcie $F(x)$

Veta

Ak $X \sim unif(a, b)$, tak

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad a \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}2887 \cdot (b-a). \quad (17)$$

Príklad

Spoločnosť dodáva tovar v balíkoch s hmotnosťou 2 kg až 20 kg. Bolo zistené, že hmotnosť balíka má rovnomerné spojité rozdelenie medzi 2 kg a 20 kg.

a) *Aká je pravdepodobnosť, že balík má hmotnosť medzi 10 kg a 15 kg?*

b) *Určte hmotnosť m, ktorá je prekročená s pravdepodobnosťou 0,7.*

Riešenie.

a) $P(10 \leq X \leq 15) = F(15) - F(10) = \frac{15-2}{20-2} - \frac{10-2}{20-2} = \frac{5}{18} = 0,2778$

b) $P(X > m) = 0,7 \Rightarrow 1 - P(X \leq m) = 0,7 \Rightarrow 1 - F(m) = 0,7 \Rightarrow F(m) = 0,3.$
Teda $\frac{m-2}{18} = 0,3 \Rightarrow m = 7,4.$

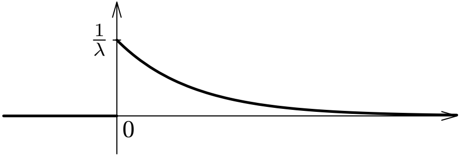
Exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti

Definícia

Náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ $(\lambda \in \mathbb{R}^+)$ *práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0, \\ 0 & \text{pre } x < 0, \end{cases} \tag{18}$$

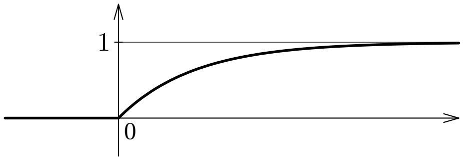
Používame pritom označenie $X \sim exp(\lambda)$.



Obr.: Hustota pravdepodobnosti $f(x)$

Distribučná funkcia je daná predpisom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0. \end{cases} \tag{19}$$



Obr.: Distribučná funkcia $F(x)$

Veta

Ak $X \sim exp(\lambda)$, *tak* $E(X) = \lambda$, $\quad D(X) = \lambda^2 \quad$ *a* $\quad \sigma(X) = \lambda$.

Príklad

Pokiaľ zákazník volá na zákaznícku linku, doba, ktorú musí zákazník počkať, kým ho spoja s operátorom, má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 4 minúty.

a) *Aká je pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať na spojenie maximálne 3 minúty?*

b) *Aká je pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať na spojenie aspoň 5 minút?*

c) *Aká je pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať na spojenie viac ako 3 minúty, ale menej ako 6 minút?*

d) *Určte dobu čakania, ktorá nebude prekročená s pravdepodobnosťou 0,9.*

Riešenie. Máme $E(X) = \lambda = 4$.

a) $P(X \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-\frac{3}{4}} = 0,52763$

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\frac{5}{4}}) = e^{-\frac{5}{4}} = 0,28650$

c)$P(3 < X < 6) = F(6) - F(3) = (1 - e^{-\frac{6}{4}}) - (1 - e^{-\frac{3}{4}}) = 0,24923$

d) Označme ako t hľadanú dobu čakania. Máme $P(X < t) = 0,9 \Rightarrow$
$F(t) = 0,9 \Rightarrow 1 - e^{-\frac{t}{4}} = 0,9 \Rightarrow e^{-\frac{t}{4}} = 0,1 \Rightarrow t = -4 \cdot \ln 0,1 = 9,21$.
S pravdepodobnosťou 0,9 nebude prekročená doba čakania na spojenie 9,21 minút.

Normálne (Gaussovo) rozdelenie pravdepodobnosti

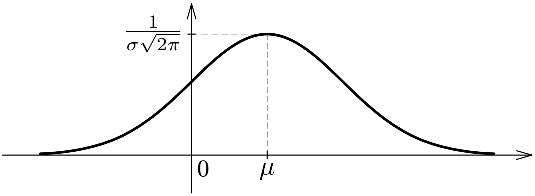
Vstup: Dve reálne čísla: $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$.

Definícia

Náhodná premenná X má normálne (Gaussovo) rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ *práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{pre každé } x \in R. \tag{20}$$

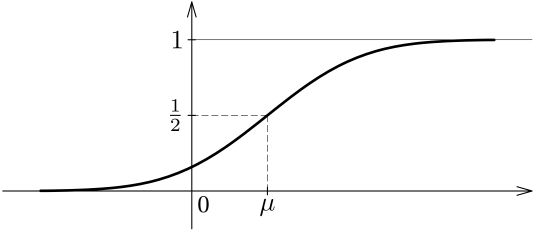
Používame pritom označenie $X \sim norm(\mu, \sigma)$ alebo $X \sim N(\mu, \sigma)$.



Obr.: Hustota pravdepodobnosti $f(x)$

Distribučná funkcia

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}t \qquad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}. \tag{21}$$



Obr.: Distribučná funkcia $F(x)$

Veta

Ak $X \sim norm(\mu, \sigma)$, tak

$$E(X) = \mu, \qquad D(X) = \sigma^2 \quad a \quad \sigma(X) = \sigma. \tag{22}$$

Normovaná náhodná premenná

Definícia

Hovoríme, že náhodná premenná Y je **normovanou náhodnou premennou** práve vtedy, keď pre ňu platí $E(Y) = 0$ a $D(Y) = 1$.

Veta (Normovanie náhodnej premennej)

Nech X je náhodná premenná so známou strednou hodnotou a nenulovou disperziou. Potom náhodná premenná

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \tag{23}$$

je normovanou náhodnou premennou.

Normovaním náhodnej premennej $X \sim norm(\mu, \sigma)$ dostaneme náhodnú premennú

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \qquad Y \sim norm(0, 1).$$

Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia normovanej náhodnej premennej

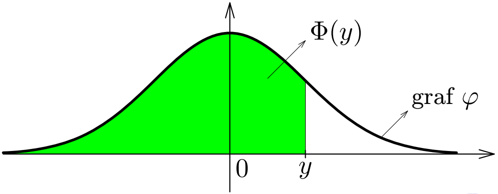
Hustota pravdepodobnosti φ normovanej náhodnej premennej Y je zrejme daná predpisom

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \qquad \text{pre každé } y \in \mathbb{R} \tag{24}$$

Distribučná funkcia Φ normovanej náhodnej premennej Y je daná predpisom

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{pre každé } y \in R \tag{25}$$

Číslo $\Phi(y)$ určuje obsah vyznačeného útvaru.



Veta (Vlastnosti funkcií $\varphi(y)$ a $\Phi(y)$)

1. *Funkcia* $\varphi(y)$ *je párna.*
2. $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$ *pre každé* $y \in R$.
3. $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
4. $P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Veta

Ak $X \sim norm(\mu, \sigma)$, *tak pre ľubovoľné* $\varepsilon > 0$ *platí*

$$P(|X-\mu| < \varepsilon) = P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1, \tag{26}$$

špeciálne pre $\varepsilon = 3\sigma$ *je*

$$P(|X-\mu| < 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 2 \cdot \Phi(3) - 1 \approx 0{,}9973 \tag{27}$$

Pravidlo troch sigma: v intervale $\mu \pm 3\sigma$ ležia takmer všetky hodnoty (presnejšie $99,73\,\%$) náhodnej premennej $X \sim norm(\mu, \sigma)$.

Príklad

Fabrika má stroj, ktorý plní kukuričné vločky do krabíc, ktoré sa predávajú ako 200 g balenia. Ak hmotnosť balenia má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 200 gramov a smerodajnou odchýlkou 15 gramov. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná krabica má obsah s hmotnosťou

a) *menej ako 207 gramov,*

b) *viac ako 190 gramov,*

c) *medzi 180 a 210 gramov.*

Riešenie. Máme dané hodnoty $\mu = 200, \ \sigma = 15$. Hodnoty funkcie $\Phi(x)$ budeme hľadať v tabuľke s názvom **Distribučná funkcia normovaného náhodného rozdelenia**, ktorá je súčasťou súboru s názvom **NMPaMŠ-Štatistické tabuľky.**
a) $P(X < 207) = F(207) = \Phi(\frac{207-200}{15}) = \Phi(0,47) = 0,68082$ (hodnotu nájdeme v riadku prislúchajúcom hodnote 0,4 a stĺpci prislúchajúcom hodnote 7 (druhé desatinné miesto po správnom zaokrúhlení))
b) $P(X > 190) = 1 - P(X \leq 190) = 1 - F(190) = 1 - \Phi(\frac{190-200}{15}) =$
$1 - \Phi(-0,67) = 1 - (1 - \Phi(0,67)) = \Phi(0,67) = 0,74857$
c)$P(180 < X < 210) = F(210) - F(180) = \Phi(\frac{210-200}{15}) - \Phi(\frac{180-200}{15}) =$
$\Phi(0,67) - \Phi(-1,33) = \Phi(0,67) - (1 - \Phi(1,33)) = \Phi(0,67) - 1 + \Phi(1,33) =$
$0,74857 - 1 + 0,90824 = 0,65681$