

Finančný tok

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

- 1 Finančný tok
 - Pojem finančného toku
 - Diskrétne a spojité finančné toky
 - Hodnotenie investičných projektov

Ilustrácia

Príklad:

Rozbehnutie malej výrobnjej prevádzky predpokladá začiatočnú investíciu vo výške 150 000 eur a ďalšie investície vo výške 75 000 eur na konci prvého a 10 000 eur na konci druhého, tretieho a štvrtého roka. Prevádzka sa spustí na konci prvého roka a počnúc druhým rokom bude prinášať koncoročne zisk 30 000 eur. Majiteľ ju na konci piateho roka predá za 300 000 eur.

Klasifikácia finančného toku podľa spôsobu platieb

① Diskrétny finančný tok

- platby sa uskutočňujú v časových intervaloch

② Spojitý finančný tok

- platby sa uskutočňujú nepretržite (spojite) s určitou hustotou splátok v priebehu určitého časového intervalu

③ Zmiešaný finančný tok

- platby sa uskutočňujú v niektorých intervaloch spojite a v niektorých diskkrétne

Diskrétny čistý finančný tok

Zápis diskrétného čistého finančného toku v tvare postupnosti

$$\begin{aligned} \text{výdavky } a_t &= (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \\ &= (150\ 000, 75\ 000, 10\ 000, 10\ 000, 10\ 000, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{príjmy } b_t &= (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \\ &= (0, 0, 30\ 000, 30\ 000, 30\ 000, 330\ 000) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{čistý} \quad X_t &= (X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) \\ \text{fin. tok} &= (-150\ 000, -75\ 000, 20\ 000, 20\ 000, 20\ 000, 330\ 000) \end{aligned}$$

Čistá súčasná hodnota pre rôzne úrokovania

Čistá súčasná hodnota pre

- **diskrétne úrokovanie** s ročnou úrokovou sadzbou i

$$NPV = \sum_{t=0}^n X_t \cdot (1 + i)^{-t}$$

- **spojité úrokovanie** s intenzitou δ

$$NPV = \sum_{t=0}^n X_t \cdot e^{-\delta t}$$

Kritérium NPV

Posudzovanie investičných projektov podľa NPV

- ① $NPV > 0$, tak je projekt **akceptovateľný**
- ② $NPV = 0$, tak je projekt **indiferentný** (krajne akceptovateľný)
- ③ $NPV < 0$, tak je projekt **neakceptovateľný**

Kritérium NPV – Príklad

Príklad:

Rozbehnutie malej výrobnjej prevádzky predpokladá začiatočnú investíciu vo výške 150 000 eur a ďalšie investície vo výške 75 000 eur na konci prvého a 10 000 eur na konci druhého, tretieho a štvrtého roka. Prevádzka sa spustí na konci prvého roka a počnúc druhým rokom bude prinášať koncoročne zisk 30 000 eur. Majiteľ ju na konci piateho roka predá za 300 000 eur. Vypočítajme čistú súčasnú hodnotu projektu pri 6% ročnej úrokovej miere a na jej základe rozhodnime, či sa investícia oplatí.

Kritérium NPV – Príklad

Zápis:

$$\begin{aligned}a_t &= (150\,000, 75\,000, 10\,000, 10\,000, 10\,000, 0) \\b_t &= (0, 0, 30\,000, 30\,000, 30\,000, 330\,000) \\ \hline NPV(0,06) &= ?\end{aligned}$$

Riešenie:

$$X_t = (-150\,000, -75\,000, 20\,000, 20\,000, 20\,000, 330\,000)$$

$$NPV(i) = X_0 + \frac{X_1}{1+i} + \frac{X_2}{(1+i)^2} + \frac{X_3}{(1+i)^3} + \frac{X_4}{(1+i)^4} + \frac{X_5}{(1+i)^5}$$

$$\begin{aligned}NPV(0,06) &= -150\,000 - \frac{75\,000}{1+0,06} + \frac{20\,000}{(1+0,06)^2} + \frac{20\,000}{(1+0,06)^3} + \\ &\quad + \frac{20\,000}{(1+0,06)^4} + \frac{330\,000}{(1+0,06)^5}\end{aligned}$$

$$NPV(0,06) = 76\,274,66779 > 0 \text{ akceptovateľný}$$

Porovnanie investičných projektov – Kritérium NPV

Definícia

Hodnotou čistého finančného toku v čase t nazývame súčet všetkých platieb čistého finančného toku vyjadrených k referenčnému dátumu t .

Definícia

Dva finančné toky sú ekvivalentné práve vtedy, ak majú rovnakú hodnotu k ľubovoľnému referenčnému dátumu.

Špeciálne, ak ide o referenčný dátum $t = 0$, porovnáваме NPV oboch projektov:

$$\sum_{t=0}^n X_t \cdot v(t) = \sum_{t=0}^n X_t^* \cdot v(t)$$

Porovnateľné finančné toky

Majme dva projekty A a B :

| | | | | | |
|------|-------|---------|---------|---------|--------|
| $A:$ | t | 0 | 1 | 3 | 4 |
| | X_t | -50 000 | -20 000 | -50 000 | 20 000 |

| | | | | | |
|------|---------|----------|---------|---------|---------|
| $B:$ | t | 1 | 2 | 4 | 5 |
| | X_t^* | -100 000 | -40 000 | -20 000 | 300 000 |

po úprave:

| | | | | | | | |
|--|---------|---------|----------|---------|---------|---------|---------|
| | t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | X_t | -50 000 | -20 000 | 0 | -50 000 | 200 000 | 0 |
| | X_t^* | 0 | -100 000 | -40 000 | 0 | -20 000 | 300 000 |

Ekvivalentné finančné toky

Za predpokladu rovnakej ročnej úrokovej miery i pre oba projekty sú finančné toky A a B ekvivalentné, ak

$$\sum_{t=0}^n X_t \cdot (1+i)^{-t} = \sum_{t=0}^n X_t^* \cdot (1+i)^{-t}$$

Ekvivalentné finančné toky – Príklad

Príklad:

Zistíme, či sú ekvivalentné finančné toky:

$$A = (-50\,000, -20\,000, 0, -50\,000, 200\,000, 0)$$

$$B = (0, -100\,000, -40\,000, 0, -20\,000, 300\,000),$$

ak ročná úroková sadzba je 5 %.

Kritérium NPV – Príklad

Riešenie:

$$NPV_A(i) = -50\,000 - \frac{20\,000}{1+i} - \frac{50\,000}{(1+i)^3} + \frac{200\,000}{(1+i)^4}$$

$$NPV_A(0,05) = 52\,300$$

$$NPV_B(i) = -\frac{100\,000}{1+i} - \frac{40\,000}{(1+i)^2} - \frac{20\,000}{(1+i)^4} + \frac{300\,000}{(1+i)^5}$$

$$NPV_B(0,05) = 87\,084,526$$

$$NPV_B(0,05) \neq NPV_A(0,05)$$

projekty nie sú ekvivalentné

Porovnanie investičných projektov – Kritérium NPV – Príklad

Príklad:

Podnikateľ sa má rozhodnúť medzi dvomi investičnými projektmi A a B , ktorých finančné toky sú nasledovné:

$$\begin{aligned}
 A : \quad X_0 &= -500 \\
 X_1 &= 200 \\
 X_2 &= 300 \\
 X_3 = X_4 &= 200
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B : \quad X_0^* &= -700 \\
 X_1^* = X_2^* &= 200 \\
 X_3^* = X_4^* &= 300 \\
 X_5^* &= 200
 \end{aligned}$$

Pre ktorý projekt sa rozhodne, ak

- $i = 0,08$,
- $i = 0,09$?

Porovnanie investičných projektov – Kritérium NPV – Príklad

Riešenie:

$$NPV_A(i) = -500 + \frac{200}{1+i} + \frac{300}{(1+i)^2} + \frac{200}{(1+i)^3} + \frac{200}{(1+i)^4}$$

$$NPV_B(i) = -700 + \frac{200}{1+i} + \frac{200}{(1+i)^2} + \frac{300}{(1+i)^3} + \frac{300}{(1+i)^4} + \frac{200}{(1+i)^5}$$

$$NPV_A(0,08) = 248,15939$$

a) $NPV_B(0,08) = 251,42825$

$$NPV_B(0,08) > NPV_A(0,08)$$

$$NPV_A(0,09) = 232,11202$$

b) $NPV_B(0,09) = 225,99152$

$$NPV_A(0,09) > NPV_B(0,09)$$

Čistá súčasná hodnota špeciálnych finančných tokov

Pri konštantnej perióde medzi platbami platí:

- ① $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$
- **diskrétne úrokovanie** s ročnou úrokovou sadzbou i
polehohná renta s konštantnou splátkou X

$$NPV = A_n = X \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

- **spojité úrokovanie** s intenzitou δ

$$NPV = A = X \cdot \frac{1 - e^{-\delta t}}{e^\delta - 1}$$

- ② $X_1 = X, X_2 = X \cdot (1 + \alpha), \dots, X_n = X \cdot (1 + \alpha)^{n-1}$
polehohná renta s rovnomerne rastúcou splátkou

$$NPV = X \cdot \left[1 - \left(\frac{1 + \alpha}{1 + i} \right)^n \right] \cdot \frac{1}{i - \alpha}$$

Čistá súčasná hodnota špeciálnych finančných tokov – Príklad 1

Príklad:

Začiatočná investícia do projektu je vo výške 7 000 eur. Životnosť projektu je 4 roky. Predpokladané koncoročné výnosy sú 2 000 eur. Vypočítajme čistú súčasnú hodnotu a na jej základe rozhodnime, či je projekt akceptovateľný, ak je cena kapitálu 4 %.

Zápis:

$$\begin{array}{rcl}
 I & = & 7\,000 \\
 n & = & 4 \\
 X & = & X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 2\,000 \\
 i & = & 0,04 \\
 \hline
 NPV(0,04) & = & ?
 \end{array}$$

Čistá súčasná hodnota špeciálnych finančných tokov – Príklad 1

Riešenie:

$$NPV(i) = -I + X \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$NPV(0,04) = -7\,000 + 2\,000 \cdot \frac{1 - (1 + 0,04)^{-4}}{0,04}$$

$$NPV(0,04) = 259,79$$

projekt je akceptovateľný

Čistá súčasná hodnota špeciálnych finančných tokov – Príklad 2

Príklad:

Začiatočná investícia do projektu je vo výške 35 000 eur. Životnosť projektu je 10 rokov. Predpokladané koncoročné výnosy sa budú rovnomerne zvyšovať o 6 %, pričom výnos na konci prvého roka je 3 000 eur. Vypočítajme čistú súčasnú hodnotu a na jej základe rozhodnime, či je projekt akceptovateľný, ak je cena kapitálu 4 %.

Zápis:

$$I = 35\,000$$

$$n = 10$$

$$X = 3\,000$$

$$\alpha = 0,06$$

$$i = 0,04$$

$$NPV(0,04) = ?$$

Čistá súčasná hodnota špeciálnych finančných tokov – Príklad 2

Riešenie:

$$NPV(i) = -I + X \cdot \left[1 - \left(\frac{1 + \alpha}{1 + i} \right)^n \right] \cdot \frac{1}{i - \alpha}$$

$$NPV(0,04) = -35\,000 + 3\,000 \cdot \left[1 - \left(\frac{1 + 0,06}{1 + 0,04} \right)^{10} \right] \cdot \frac{1}{0,04 - 0,06}$$

$$NPV(0,04) = -3\,525,12$$

projekt je neakceptovateľný

Čistá súčasná hodnota špeciálnych finančných tokov – Obligácie

Definícia

Obligácia je dlhodobý úverový cenný papier s pevne stanovenou dobou splatnosti a podmienkami splatnosti záväznými pre eminenta.

Obligácia:

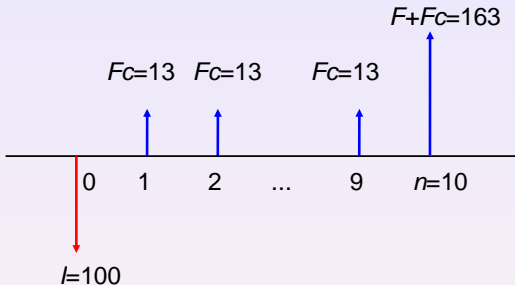
- nákupná cena I
- nominálna cena F
- výška kupónovej platby F_c
- úroková sadzba obligácie (výnosnosť obligácie) i
- doba splatnosti n

Čistá súčasná hodnota špeciálnych finančných tokov – Príklad 3

Príklad:

Kupónovú obligáciu v nominálnej hodnote 150 eur je možné teraz zakúpiť v cene 100 eur. Ročné kupóny v hodnote 13 eur budú vyplácané po dobu splatnosti 10 rokov. Predpokladáme 10% ročnú úrokovú mieru. Je výhodné kúpiť túto obligáciu?

Čistá súčasná hodnota špeciálnych finančných tokov – Obligácie



Obr.: Čistý finančný tok obligácie

$$NPV(i) = -I + F_C \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} + \frac{F}{(1+i)^n}$$

Čistá súčasná hodnota špeciálnych finančných tokov – Príklad 3

Príklad:

Kupónovú obligáciu v nominálnej hodnote 150 eur je možné teraz zakúpiť v cene 100 eur. Ročné kupóny v hodnote 13 eur budú vyplácané po dobu splatnosti 10 rokov. Predpokladáme 10% ročnú úrokovú mieru. Je výhodné kúpiť túto obligáciu?

Zápis:

$$\begin{array}{rcl}
 I & = & 100 \\
 n & = & 10 \\
 F & = & 150 \\
 F_c & = & 13 \\
 i & = & 0,1 \\
 \hline
 NPV(0,1) & = & ?
 \end{array}$$

Čistá súčasná hodnota špeciálnych finančných tokov – Príklad 3

Riešenie:

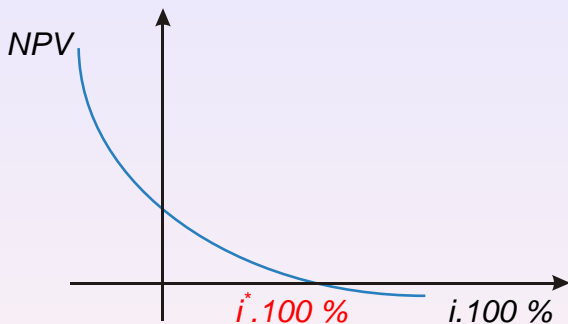
$$NPV(i) = -I + Fc \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} + \frac{F}{(1 + i)^n}$$

$$NPV(0,1) = -100 + 13 \cdot \frac{1 - (1 + 0,1)^{-10}}{0,1} + \frac{150}{(1 + 0,1)^{10}}$$

$$NPV(0,1) = 37,71$$

áno, je výhodné obligáciu kúpiť

Vnútoraná miera výnosnosti



Obr.: Vnútoraná miera výnosnosti

Vnútoraná miera výnosnosti

Definícia

Vnútoranou mierou výnosnosti (Internal Rate of Return – IRR) diskrétného finančného toku nazývame úrokovú mieru, pri ktorej je čistá súčasná hodnota finančného toku rovná nule.

Zápis:

$$IRR : \quad NPV(i^*) = 0$$

$$IRR = i^* \cdot 100 \%$$

Kritérium IRR – Príklad

Príklad:

Majme projekt: $A = (-10\ 000, 15\ 000, 5\ 000)$ eur. Vypočítajme vnútornú mieru výnosnosti investície.

Kritérium IRR – Príklad

$$IRR : NPV_A(i) = -10\,000 + \frac{15\,000}{1+i} + \frac{5\,000}{(1+i)^2} = 0$$

substitúcia $1+i = x$

$$-10\,000 + \frac{15\,000}{x} + \frac{5\,000}{x^2} = 0$$

$$-10\,000x^2 + 15\,000x + 5\,000 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$i \in (0, 1) \Rightarrow x \in (1, 2) \quad x = 1,7808$$

$$i^* = 0,7808$$

$$i^* \cdot 100\% = 78,08\%$$

Kritérium IRR – Príklad

Príklad:

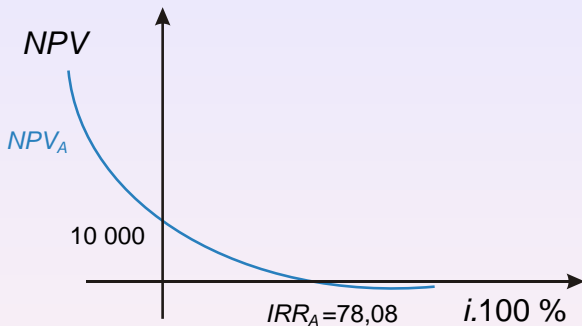
Majme projekt: $A = (-10\ 000, 15\ 000, 5\ 000)$ eur. Vypočítajme, kedy je výhodné do projektu investovať.

Kritérium IRR – Príklad

$$\begin{aligned}
 IRR : \quad NPV_A(i) &= -10\,000 + \frac{15\,000}{1+i} + \frac{5\,000}{(1+i)^2} = 0 \\
 i^* &= 0,7808 \\
 i^* \cdot 100\% &= 78,08\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 NPV_A(0) &= -10\,000 + \frac{15\,000}{1+0} + \frac{5\,000}{(1+0)^2} = \\
 &= -10\,000 + 15\,000 + 5\,000 = \\
 &= 10\,000
 \end{aligned}$$

Vnútoraná miera výnosnosti – Príklad



Obr.: Vnútoraná miera výnosnosti

Kritérium IRR – Príklad

Analýza

- pre $i \in (0\%; 78,08\%)$ je $NPV(i) > 0$, teda je výhodné investovať do projektu
- pre $i \in (78,08\%; 100\%)$ je $NPV(i) < 0$, teda nie je výhodné investovať do projektu

Kritérium IRR – Príklad 1

Príklad:

Majme dva projekty: $A = (-1\ 000, 1\ 000, 500)$ a

$B = (-2\ 000, 1\ 700, 1\ 000)$ v tisícoch eur.

- Vypočítajme vnútorné miery výnosnosti investícií.
- Urobme analýzu, kedy je výhodné investovať do ktorého projektu.

Kritérium IRR – Príklad 1

$$IRR : \quad NPV_A(i) = -1\,000 + \frac{1\,000}{1+i} + \frac{500}{(1+i)^2} = 0$$

$$\text{substitúcia} \quad 1+i = x$$

$$-1\,000 + \frac{1\,000}{x} + \frac{500}{x^2} = 0$$

$$-1\,000x^2 + 1\,000x + 500 = 0$$

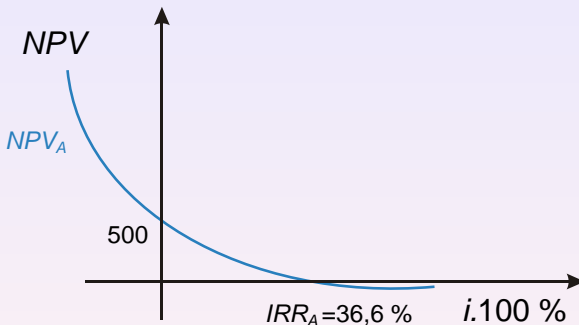
$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$i \in (0, 1) \Rightarrow x \in (1, 2) \quad x = 1,366$$

$$i^* = 0,366$$

$$i^* \cdot 100\% = 36,6 \%$$

Kritérium IRR – Príklad 1



Obr.: Vnútorná miera výnosnosti – projekt A

Kritérium IRR – Príklad 1

$$IRR : NPV_B(i) = -2\,000 + \frac{1\,700}{1+i} + \frac{1\,000}{(1+i)^2} = 0$$

$$\text{substitúcia } 1+i = x$$

$$-2\,000 + \frac{1\,700}{x} + \frac{1\,000}{x^2} = 0$$

$$-2\,000x^2 + 1\,700x + 1\,000 = 0$$

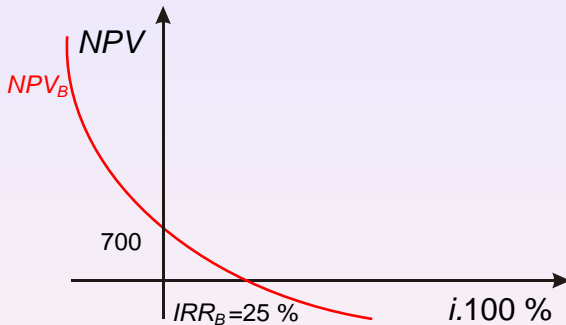
$$20x^2 - 17x - 10 = 0$$

$$i \in (0, 1) \Rightarrow x \in (1, 2) \quad x = 1,25$$

$$i^* = 0,25$$

$$i^* \cdot 100\% = 25\%$$

Kritérium IRR – Príklad 1



Obr.: Vnútorňa miera výnosnosti – projekt B

Kritérium IRR – Príklad 1

$$IRR : \quad NPV_{A-B}(i) = 1\,000 - \frac{700}{1+i} - \frac{500}{(1+i)^2} = 0$$

substitúcia $1+i = x$

$$1\,000 - \frac{700}{x} - \frac{500}{x^2} = 0$$

$$1\,000x^2 - 700x - 500 = 0$$

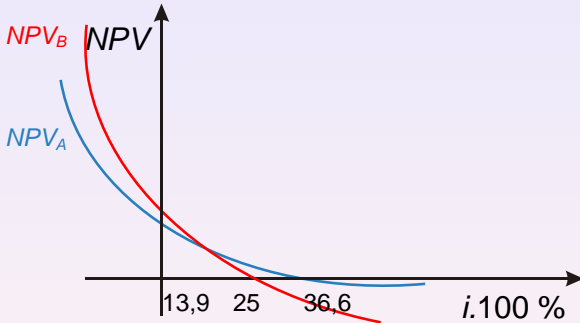
$$10x^2 - 7x - 5 = 0$$

$$i \in (0, 1) \Rightarrow x \in (1, 2) \quad x = 1,13899$$

$$i^* = 0,139$$

$$i^* \cdot 100\% = 13,9 \%$$

Kritérium IRR – Príklad 1



Obr.: Vnútorná miera výnosnosti – Príklad

Kritérium IRR – Príklad 1

Analýza

- pre $i \in (0\%; 13,9\%)$ je $NPV_B(i) > NPV_A(i)$, je výhodnejšie investovať do projektu B
- pre $i \in (13,9\%; 36,6\%)$ je $NPV_A(i) > NPV_B(i)$ je výhodnejšie investovať do projektu A
- pre $i \in (25\%; 36,6\%)$ je výhodné investovať len do projektu A

Kritérium IRR – Príklad 2

Príklad:

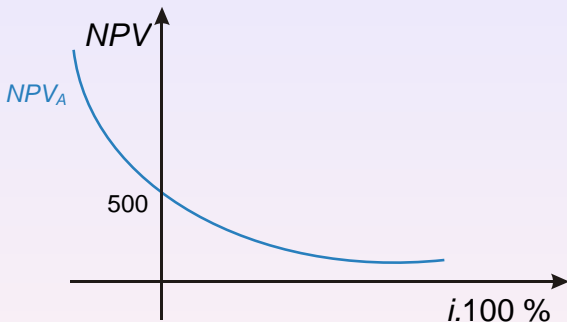
Majme dva projekty: $A = (300, -400, 600)$ a
 $B = (-700, 1\,300, -100)$ v tisícoch eur.

- Vypočítajme vnútorné miery výnosnosti investícií.
- Urobme analýzu, kedy je výhodné investovať do ktorého projektu.

Kritérium IRR – Príklad 2

$$\begin{aligned}NPV_A(i) &= 300 - \frac{400}{1+i} + \frac{600}{(1+i)^2} = 0 \\300x^2 - 400x + 600 &= 0 \\3x^2 - 4x + 6 &= 0 \\D &< 0\end{aligned}$$

Kritérium IRR – Príklad 2



Obr.: Vnútorhá miera výnosnosti – projekt A

Kritérium IRR – Príklad 2

$$NPV_B(i) = -700 + \frac{1\ 300}{1+i} - \frac{100}{(1+i)^2} = 0$$

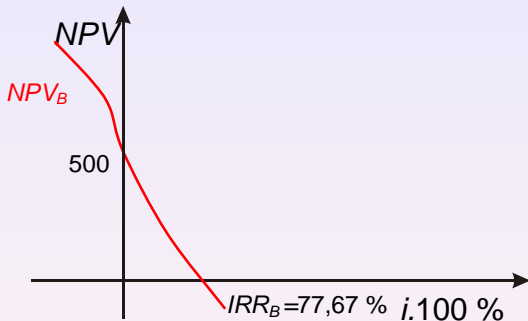
$$7x^2 - 13x + 1 = 0$$

$$x = 1,7767$$

$$i^* = 0,7767$$

$$i^* \cdot 100\% = 77,67 \%$$

Kritérium IRR – Príklad 2

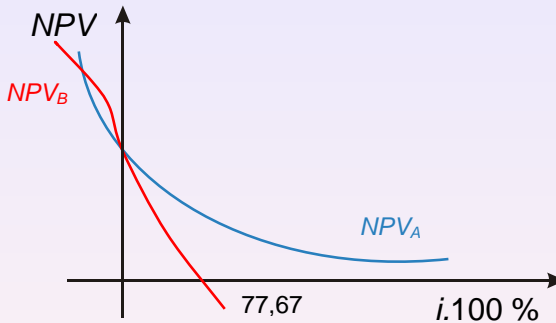


Obr.: Vnútrotná miera výnosnosti – projekt B

Kritérium IRR – Príklad 2

$$\begin{aligned}NPV_{A-B}(i) &= 1\,000 - \frac{1\,700}{1+i} + \frac{700}{(1+i)^2} = 0 \\10x^2 - 17x + 7 &= 0 \\x &= 1,00 \\i^* &= 0\end{aligned}$$

Kritérium IRR – Príklad 2



Obr.: Vnútorná miera výnosnosti – Príklad

Kritérium IRR – Príklad 2

Analýza

pre $i \in (0\%; 100\%)$ je $NPV_A(i) > NPV_B(i)$, navyše $NPV_A(i) > 0$,
vždy je výhodnejšie investovať do projektu A

Ďakujem za pozornosť.