Umorovací počet

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

Pojem umorovania

Definícia

Umorovaním nazývame proces splácania úrokovej pôžičky, t. j. pôžičky, pri ktorej spláca dlžník veriteľovi okrem požičanej sumy aj úroky z tejto sumy.

Klasifikácia pôžičky podľa spôsobu umorovania

1. Pôžičky bez záväzného splácania tzv. úrokové dlžoby
   - dlžník spláca len dohodnuté úroky v určených termínoch a kedykoľvek môže pôžičku vykúpiť
2. Pôžičky s povinným jednorazovým splatením
   - dlžník pravidelne spláca úroky a pôžičku vráti naraz jednou splátkou v dohodnutom termíne
3. Pôžičky s postupným splácaním v niekoľkých termínoch
   - dlžník pravidelne spláca úroky z nesplateného základu pôžičky a časť dosiaľ nesplateného základu (úmor)

Atribúty pôžičky s povinným jednorazovým splatením

- pravidelné splácanie úrokov
- splatenie dlhu v určenom termíne naraz jednou splátkou
- založenie zabezpečovacieho fondu pre nasporenie sumy vo výške dlhu k termínu splatenia

Ilustrácia

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku na modernizáciu zariadenia dielne v hodnote 10 000 eur. Pôžička bola vydaná pri 5% ročnej úrokovej miere a musí byť vrátená jednorazovo o 4 roky. Podnikateľ chce na tento účel vytvoriť v banke zabezpečovací fond, pričom banka poskytuje 6% ročnú úrokovú mieru. Predpokladajme, že fond sa bude realizovať na konci každého roka konštantnými splátkami. Zostavme umorovací plán.

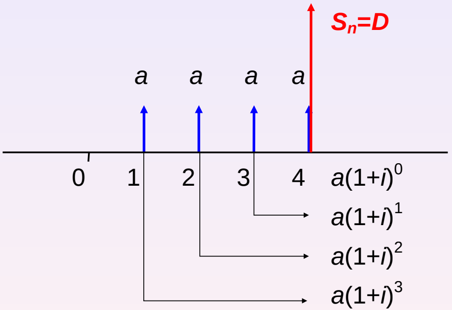
Terminológia a označenie

Použité skratky:

D	veľkosť pôžičky
n	počet rokov splatnosti pôžičky
g	nominálna úroková sadzba pôžičky
p	počet splátok za rok
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok
i	ročná úroková sadzba, ak $m = 1$
j	ročná úroková sadzba, ak $m > 1$
u_t	úrok na konci t-tej periódy
a	splátka do fondu
A_t	splátka (anuita) splatná na konci t-tej periódy
	$A_t = u_t + a$

$p = 1$ – Splátky do zabezpečovacieho fondu

Každá splátka narastie za príslušný počet periód o úroky na novú hodnotu. Súčet týchto nových hodnôt na konci doby splatnosti tvorí budúcu hodnotu polehotnej renty S_n a je rovný výške pôžičky.



Obr.: Splátky do zabezpečovacieho fondu

Pôžičky s povinným jednorazovým splatením – $p = 1$

$$D = S_n = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \Longrightarrow \quad a = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Pôžičky s povinným jednorazovým splatením – $p = 1$

Veta

Predpokladajme pôžičku vo výške D s povinným jednorazovým splatením. Predpokladajme, že dlh je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g, ročné splátky do zabezpečovacieho fondu sú konštantné a úročenie v banke je ročné s ročnou úrokovou sadzbou i. Pre výšku splátky do zabezpečovacieho fondu a, výšku úroku u a výšku celkovej anuity A platí

$$a = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}, \tag{1}$$

$$u = D \cdot g, \tag{2}$$

$$A = D \cdot g + D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}. \tag{3}$$

$p = 1$ - jednorazové splatenie - Príklad 1

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku na modernizáciu zariadenia dielne v hodnote 10 000 eur. Pôžička bola vydaná pri 5% ročnej úrokovej miere a musí byť vrátená jednorazovo o 4 roky. Podnikateľ chce na tento účel vytvoriť v banke zabezpečovací fond, pričom banka poskytuje 6% ročnú úrokovú mieru. Predpokladajme, že fond sa bude realizovať na konci každého roka konštantnými splátkami. Zostavme umorovací plán.

Zápis:

$$\begin{array}{lllllll} D & = & 10\,000 & \quad & i & = & 0{,}06 \\ g & = & 0{,}05 & & m & = & 1 \\ n & = & 4 & & p & = & 1 \\ \hline a & = & ? & & & & \end{array}$$

$p = 1$ - jednorazové splatenie - Príklad 1

Riešenie:

$$a = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{10\ 000 \cdot 0{,}06}{(1+0{,}06)^4 - 1} = 2\ 285{,}915$$

$$u = D \cdot g = 10\ 000 \cdot 0{,}05 = 500$$

$$A = u + a = 500 + 2\ 285{,}915 = 2\ 785{,}915$$

$p = 1$ - jednorazové splatenie - Príklad 1

výpočet zúročenej splátky do fondu:

$a_t = a \cdot (1+i)^{n-t}$

$$\begin{aligned}
a_1 &= a \cdot (1+i)^{4-1} = 2\ 285{,}915 \cdot 1{,}06^3 = 2\ 722{,}555 \\
a_2 &= a \cdot (1+i)^{4-2} = 2\ 285{,}915 \cdot 1{,}06^2 = 2\ 568{,}448 \\
a_3 &= a \cdot (1+i)^{4-3} = 2\ 285{,}915 \cdot 1{,}06^1 = 2\ 423{,}065 \\
a_4 &= a \cdot (1+i)^{4-4} = 2\ 285{,}915 \cdot 1{,}06^0 = 2\ 285{,}915
\end{aligned}$$

$p = 1$ - Umorovací plán pôžičky - Príklad 1

per. t	úroky za periódu u_t	splátka do fondu a	anuita $A_t = u_t + a$	zúročená splátka do fondu $a \cdot (1+i)^{n-t}$
1	500	2 285,915	2 785,915	2 722,555$=a(1+i)^3$
2	500	2 285,915	2 785,915	2 568,448$=a(1+i)^2$
3	500	2 285,915	2 785,915	2 423,065$=a(1+i)^1$
4	500	2 285,915	2 785,915	2 285,915$=a(1+i)^0$
$\sum$	2 000 +	9 143,66=	11 143,66	9 999,983$\doteq$ D

Ilustrácia

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku na modernizáciu zariadenia dielne v hodnote 10 000 eur. Pôžička bola vydaná pri 5% ročnej úrokovej miere a musí byť vrátená jednorazovo o 4 roky. Podnikateľ chce na tento účel vytvoriť v banke zabezpečovací fond, pričom banka poskytuje 6% nominálnu úrokovú mieru pri štvrťročnom úrokovaní. Predpokladajme, že fond sa bude realizovať polročnými splátkami. Zostavme umorovací plán.

Pôžičky s povinným jednorazovým splatením – p ľubovoľné

$$D = S_n = a \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \quad \Longrightarrow \quad a = D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}$$

Pôžičky s povinným jednorazovým splatením – p ľubovoľné

Veta

Predpokladajme pôžičku vo výške D s povinným jednorazovým splatením. Nech dlh je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g, splátky do zab. fondu sú konštantné a ich počet v roku je p, počet konverzií v banke je m s nominálnou úrokovou sadzbou j. Pre výšku splátky do zab. fondu a, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A_t platí

$$a = D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}, \tag{4}$$

$$u_t = \begin{cases} D \cdot g & \text{koncoročná splátka} \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \tag{5}$$

$$A_t = u_t + D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}. \tag{6}$$

p ľubovoľné - jednorazové splatenie - Príklad 2

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku na modernizáciu zariadenia dielne v hodnote 10 000 eur. Pôžička bola vydaná pri 5% ročnej úrokovej miere a musí byť vrátená jednorazovo o 4 roky. Podnikateľ chce na tento účel vytvoriť v banke zabezpečovací fond, pričom banka poskytuje 6% nominálnu úrokovú mieru pri štvrťročnom úrokovaní. Predpokladajme, že fond sa bude realizovať polročnými splátkami. Zostavme umorovací plán.

Zápis:

$$\begin{array}{lllllll} D & = & 10\,000 & \quad & j & = & 0{,}06 \\ g & = & 0{,}05 & & m & = & 4 \\ n & = & 4 & & p & = & 2 \\ \hline a & = & ? & & & & \end{array}$$

p ľubovoľné - jednorazové splatenie - Príklad 2

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
a &= D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n}-1} = 10\,000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1}{\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{4\cdot 4}-1} = \\
&= 1\ 123{,}666
\end{aligned}
$$

$$
u_t = \begin{cases} D \cdot g = 500 & \text{koncoročná splátka} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}
$$

$$
A_t = u_t + a = \begin{cases} 500 + 1\ 123{,}666 & \text{koncoročná splátka} \\ 0 + 1\ 123{,}666 & \text{inak} \end{cases}
$$

p ľubovoľné - jednorazové splatenie - Príklad 2

výpočet zúročenej splátky do fondu:

$$a_t = a \cdot (1 + \frac{j}{m})^{m(n - \frac{t}{p})}$$

$$\begin{aligned}
a_8 &= a \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4(4 - \frac{8}{2})} = 1\ 123{,}666 \\
a_7 &= a \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4(4 - \frac{7}{2})} = 1\ 123{,}666 \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4 \cdot \frac{1}{2}} = 1\ 157{,}629 \\
a_6 &= a \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4(4 - \frac{6}{2})} = 1\ 123{,}666 \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4 \cdot \frac{2}{2}} = 1\ 192{,}618 \\
&\vdots \\
a_1 &= a \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4(4 - \frac{1}{2})} = 1\ 123{,}666 \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4 \cdot \frac{7}{2}} = 1\ 384{,}082
\end{aligned}$$

p ľubovoľné – Umorovací plán pôžičky – Príklad 2

per. t	úroky za per. u_t	splátka do fondu a	anuita $A_t = u_t + a$	zúročená splátka do fondu $a \cdot (1 + \frac{j}{m})^{m(n-\frac{t}{p})}$
1	0	1 123,666	1 123,666	1 384,082$=a(1+\frac{0{,}06}{4})^{4(4-\frac{1}{2})}$
2	500	1 123,666	1 623,666	1 343,475$=a(1+\frac{0{,}06}{4})^{4(4-\frac{2}{2})}$
3	0	1 123,666	1 123,666	1 304,060$=a(1+\frac{0{,}06}{4})^{4(4-\frac{3}{2})}$
4	500	1 123,666	1 623,666	1 265,801$=a(1+\frac{0{,}06}{4})^{4(4-\frac{4}{2})}$
5	0	1 123,666	1 123,666	1 228,665$=a(1+\frac{0{,}06}{4})^{4(4-\frac{5}{2})}$
6	500	1 123,666	1 623,666	1 192,618$=a(1+\frac{0{,}06}{4})^{4(4-\frac{6}{2})}$
7	0	1 123,666	1 123,666	1 157,629$=a(1+\frac{0{,}06}{4})^{4(4-\frac{7}{2})}$
8	500	1 123,666	1 623,666	1 123,666$=a(1+\frac{0{,}06}{4})^{4(4-\frac{8}{2})}$
$\sum$	2 000	8 989,328	10 989,328	9 999,996

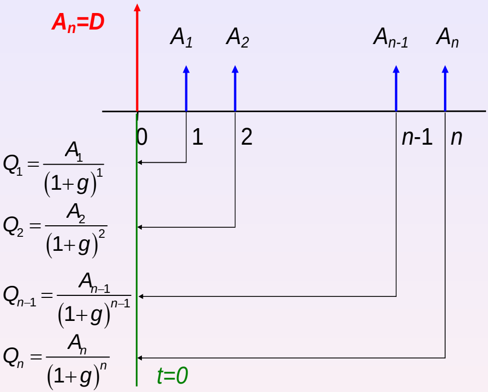
Atribúty pôžičky s postupným splácaním

- pravidelné splácanie úrokov
- postupné splácanie dlhu v pravidelných splátkach
- splátka pozostáva z
  - úmoru (časť dosiaľ nezaplateného dlhu)
  - úroku z dosiaľ nezaplateného dlhu

anuita = úmor + úrok

$$A_t = Q_t + u_t$$

Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním I



Obr.: Výška dlhu

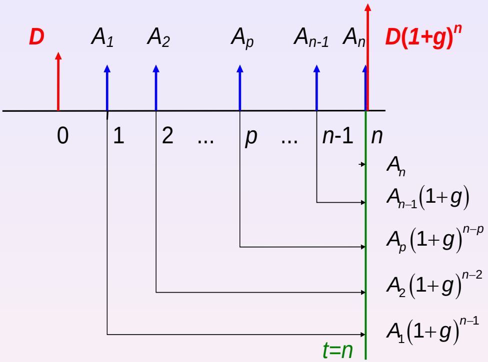
Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním I

Veta

Veľkosť dlhu pôžičky s postupným umorovaním je rovná súčtu súčasných hodnôt všetkých anuít.

$$D = \frac{A_1}{1+g} + \frac{A_2}{(1+g)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(1+g)^p} + \cdots + \frac{A_n}{(1+g)^n}$$

Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním II



Obr.: Výška budúcej hodnoty dlhu

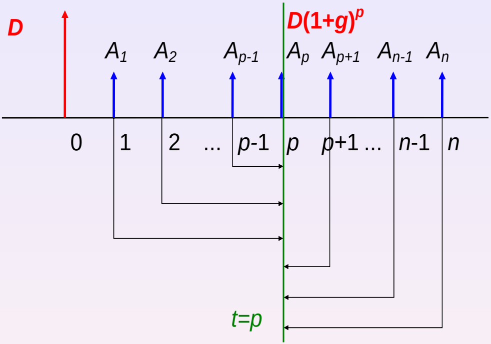
Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním II

Veta

Veľkosť budúcej hodnoty dlhu pôžičky s postupným umorovaním na konci n-tej periódy je rovná súčtu budúcich hodnôt všetkých anuít na konci n-tej periódy.

$$D\cdot(1+g)^n = A_1\cdot(1+g)^{n-1}+A_2\cdot(1+g)^{n-2}+\cdots+A_p\cdot(1+g)^{n-p}+\cdots+A_n$$

Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním III



Obr.: Výška hodnoty dlhu na konci p-tej periódy

Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním III

$$\begin{aligned} D(1+g)^p &= A_1(1+g)^{p-1} + A_2(1+g)^{p-2} + \cdots A_{p-1}(1+g) + A_p + \\ &\quad + A_{p+1}(1+g)^{-1} + A_{p+2}(1+g)^{-2} + \cdots + \\ &\quad + A_{n-1}(1+g)^{p-n+1} + A_n(1+g)^{p-n} \end{aligned}$$

Veta

Zostatok dlhu D_p pôžičky s postupným umorovaním po zaplatení p-tej anuity sa rovná súčtu súčasných hodnôt zostávajúcich $n-p$ anuít A_{p+1}, A_{p+2}, ..., A_n k času $t = p$.

$$D_p = A_{p+1} \cdot (1+g)^{-1} + A_{p+2} \cdot (1+g)^{-2} + \cdots + A_n \cdot (1+g)^{p-n}$$

Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním IV

$$D(1+g)^p = A_1(1+g)^{p-1} + A_2(1+g)^{p-2} + \cdots A_{p-1}(1+g) + A_p + \\ +D_p$$

Veta

Zostatok dlhu D_p pôžičky s postupným umorovaním po zaplatení p-tej anuity sa rovná rozdielu medzi budúcou hodnotou dlhu na konci p-tej periódy a súčtom budúcich hodnôt prvých p anuít A_1, A_2, ..., A_p k času $t = p$.

$$D_p = D(1+g)^p - \left[A_1(1+g)^{p-1} + A_2(1+g)^{p-2} + \cdots + A_{p-1}(1+g) + A_p\right]$$

Ilustrácia

Príklad 1:

Dlh v sume 100 000 eur je vydaný pri 10% ročnej úrokovej miere a má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných **konštantných umorovacích splátok**.

Príklad 2:

Podnikateľ si zobral pôžičku v hodnote 10 000 eur pri 5% ročnej úrokovej miere. Dlh má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných **konštantných anuít**.

Terminológia a označenie

Použité skratky:

n	počet rokov splatnosti pôžičky
g	nominálna úroková sadzba pôžičky
p	počet splátok za rok
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok
D_t	výška dlhu na konci t-tej periódy
Q_t	výška úmoru na konci t-tej periódy
u_t	úrok na konci t-tej periódy
A_t	splátka (anuita) splatná na konci t-tej periódy

Pôžičky s postupným splácaním

- výška splátky

$$A_t = Q_t + u_t$$

- výška úroku

$$u_t = D_{t-1} \cdot g, \quad \text{resp.} \quad u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{p}$$

- výška úmoru

$$Q_t = D_{t-1} - D_t$$

Klasifikácia pôžičiek s postupným splácaním

1. pôžičky s rovnomerným splácaním

$$A_t = Q + u_t$$

2. pôžičky s anuitným splácaním

$$A = Q_t + u_t$$

Pôžičky s rovnomerným splácaním

Definícia

Pôžičkou s rovnomerným splácaním nazývame takú pôžičku s postupným splácaním, pri ktorej je výška úmoru konštantná, t. j.

$$Q_t = Q \qquad t = 1, 2, \ldots n \cdot p$$

Pôžičky s rovnomerným splácaním – $p = 1$

Veta

Predpokladajme pôžičku s rovnomerným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že zostatok dlhu je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g a splátka je realizovaná raz do roka. Pre výšku úmoru Q, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A_t platí

$$Q = \frac{D}{n}, \tag{7}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot g, \tag{8}$$

$$A_t = u_t + Q. \tag{9}$$

$p = 1$ – Pôžičky s rovnomerným splácaním – Algoritmus

Algoritmus:

1. $Q = \frac{D}{n}$
2. $D_0 = D$
3. $u_1 = D_0 \cdot g$
4. $A_1 = Q + u_1$
5. $D_1 = D_0 - Q$
6. $u_2 = D_1 \cdot g$

$$\vdots$$

$p = 1$ - rovnomerné splácanie - Príklad

Príklad:

Dlh v sume 100 000 eur je vydaný pri 10% ročnej úrokovej miere a má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných konštantných umorovacích splátok.

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} D & = & 100\,000 \\ g & = & 0{,}1 \\ n & = & 4 \\ \hline Q & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - rovnomerné splácanie - Príklad

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{D}{n} = \frac{100\ 000}{4} = 25\ 000 \\
D_0 &= D = 100\ 000 \\
u_1 &= D_0 \cdot g = 100\ 000 \cdot 0{,}1 = 10\ 000 \\
A_1 &= Q + u_1 = 25\ 000 + 10\ 000 = 35\ 000 \\
D_1 &= D_0 - Q = 100\ 000 - 25\ 000 = 75\ 000 \\
u_2 &= D_1 \cdot g = 75\ 000 \cdot 0{,}1 = 7\ 500 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$p = 1$ – Umorovací plán pôžičky – Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q=D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot g$	úmor $Q = \frac{D}{n}$	anuita $A_t = Q + u_t$
1	100 000	10 000	25 000	35 000
2	75 000	7 500	25 000	32 500
3	50 000	5 000	25 000	30 000
4	25 000	2 500	25 000	27 500
$\sum$	—	25 000	100 000	125 000

Pôžičky s rovnomerným splácaním – postupnosť zostatkov dlhu

Veta (veta o postupnosti zostatkov dlhu)

Zostatky dlhov D_0, D_1, ..., D_{n-1} pri pôžičke s rovnomerným splácaním tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť.

Dôkaz:

$$\begin{aligned} D_t &= D_{t-1} - Q \\ D_t - D_{t-1} &= -Q \\ D_t - D_{t-1} &= -\frac{D}{n} \qquad (= d) \end{aligned}$$

Dôsledok

Zostatok dlhu D_t na konci t-tej periódy pri pôžičke s rovnomerným splácaním je

$$D_t = D_0 - t \cdot \frac{D}{n}$$

Pôžičky s rovnomerným splácaním – postupnosť úrokov

Veta (veta o postupnosti úrokov)

Splátky úrokov u_1, u_2, ..., u_n pri pôžičke s rovnomerným splácaním tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť.

Dôkaz:

$$\begin{aligned} u_t &= D_{t-1} \cdot g \\ u_{t+1} &= D_t \cdot g \\ u_{t+1} - u_t &= (D_t - D_{t-1}) \cdot g = -\frac{D}{n} \cdot g \qquad (= d) \end{aligned}$$

Dôsledok

Splátka úroku u_t na konci t-tej periódy pri pôžičke s rovnomerným splácaním je

$$u_t = u_1 + (t-1) \cdot \left(-\frac{D}{n}\right) \cdot g$$

Pôžičky s rovnomerným splácaním – postupnosť anuít

Veta (veta o postupnosti anuít)

Anuity A_1, A_2, ..., A_n pri pôžičke s rovnomerným splácaním tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť.

Dôkaz:

$$\begin{aligned} A_t &= u_t + Q \\ A_{t+1} &= u_{t+1} + Q \\ A_{t+1} - A_t &= u_{t+1} - u_t = -\frac{D}{n} \cdot g \qquad (= d) \end{aligned}$$

Dôsledok

Anuita A_t na konci t-tej periódy pri pôžičke s rovnomerným splácaním je

$$A_t = A_1 + (t-1) \cdot \left(-\frac{D}{n}\right) \cdot g$$

$p = 1$ – Umorovací plán pôžičky – Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q=D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot g$	úmor $Q = \frac{D}{n}$	anuita $A_t = Q + u_t$
1	100 000	10 000	25 000	35 000
2	75 000	7 500	25 000	32 500
3	50 000	5 000	25 000	30 000
4	25 000	2 500	25 000	27 500
$\sum$	—	25 000	100 000	125 000

Pôžičky s rovnomerným splácaním – p ľubovoľné

Veta

Predpokladajme pôžičku s rovnomerným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že splátka je realizovaná $p-$krát do roka a zostatok dlhu je úročený tiež $p-$krát do roka nominálnou úrokovou sadzbou g. Pre výšku úmoru Q, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A_t platí

$$Q = \frac{D}{n \cdot p}, \qquad (10)$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{p}, \qquad (11)$$

$$A_t = u_t + Q. \qquad (12)$$

p ľubovoľné - rovnomerné splácanie - Príklad

Príklad:

Dlh v sume 100 000 eur je vydaný pri 10% ročnej úrokovej miere s polročným úrokovaním a má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu polročných konštantných umorovacích splátok.

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} D & = & 100\ 000 \\ g & = & 0{,}1 \\ n & = & 4 \\ m & = & 2 \\ p & = & 2 \\ \hline Q & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - rovnomerné splácanie - Príklad

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{D}{n \cdot p} = \frac{100\ 000}{4 \cdot 2} = 12\ 500 \\
D_0 &= D = 100\ 000 \\
u_1 &= D_0 \cdot \frac{g}{p} = 100\ 000 \cdot \frac{0{,}1}{2} = 5\ 000 \\
A_1 &= Q + u_1 = 12\ 500 + 5\ 000 = 17\ 500 \\
D_1 &= D_0 - Q = 100\ 000 - 12\ 500 = 87\ 500 \\
u_2 &= D_1 \cdot \frac{g}{p} = 87\ 500 \cdot 0{,}1 = 4\ 375 \\
u_2 - u_1 &= 4\ 375 - 5\ 000 = -625
\end{aligned}
$$

p ľubovoľné – Umorovací plán pôžičky – Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q=D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{p}$	úmor $Q = \frac{D}{n \cdot p}$	anuita $A_t = Q + u_t$
1	100 000	5 000	12 500	17 500
2	87 500	4 375	12 500	16 875
3	75 000	3 750	12 500	16 250
4	62 500	3 125	12 500	15 625
5	50 000	2 500	12 500	15 000
6	37 500	1 875	12 500	14 375
7	25 000	1 250	12 500	13 750
8	12 500	625	12 500	13 125
$\sum$	—	22 500	100 000	122 500

Ilustrácia

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku v hodnote 10 000 eur pri 5% ročnej úrokovej miere. Dlh má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných konštantných anuít.

Pôžičky s anuitným splácaním

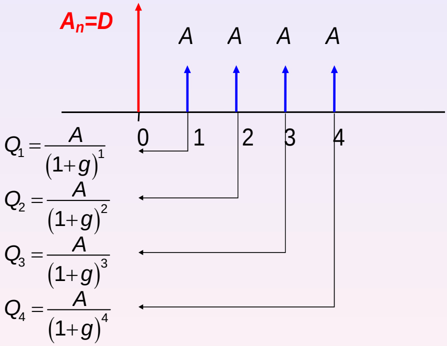
Definícia

Pôžičkou s anuitným splácaním nazývame takú pôžičku s postupným splácaním, pri ktorej je výška splátky (anuity) konštantná, t. j.

$$A_t = A \qquad t = 1, 2, \ldots n \cdot p$$

Anuitné splácanie – $p = 1$

Súčet odúročených splátok tvorí súčasnú hodnotu polehotnej konštantnej renty A_n a je rovný výške pôžičky.



Obr.: Výška anuity

Anuitné splácanie – $p = 1$

súčasná hodnota polehotnej renty

$$A_n = R \cdot \frac{1-(1+g)^{-n}}{g}$$

položme $D = A_n$ a $A = R$

$$D = A \cdot \frac{1-(1+g)^{-n}}{g} \quad \Longrightarrow \quad A = D \cdot \frac{g}{1-(1+g)^{-n}}$$

Anuitné splácanie – $p = 1$

Veta

Predpokladajme pôžičku s anuitným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že zostatok dlhu je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g a splátka je realizovaná raz do roka. Pre výšku úmoru Q_t, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A platí

$$A = D \cdot \frac{g}{1 - (1+g)^{-n}}, \tag{13}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot g, \tag{14}$$

$$Q_t = A - u_t. \tag{15}$$

Anuitné splácanie – Algoritmus

Algoritmus:

1. $A = D \cdot \dfrac{g}{1-(1+g)^{-n}}$
2. $D_0 = D$
3. $u_1 = D_0 \cdot g$
4. $Q_1 = A - u_1$
5. $D_1 = D_0 - Q_1$
6. $u_2 = D_1 \cdot g$

$\vdots$

$p = 1$ - anuitné splácanie - Príklad

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku v hodnote 10 000 eur pri 5% ročnej úrokovej miere. Dlh má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných konštantných anuít.

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} D & = & 10\,000 \\ g & = & 0{,}05 \\ n & = & 4 \\ \hline A & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - anuitné splácanie - Príklad

Riešenie:

$$\begin{aligned}
A &= D \cdot \frac{g}{1-(1+g)^{-n}} = 10\ 000 \cdot \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-4}} = 2\ 820{,}11833 \\
D_0 &= D = 10\ 000 \\
u_1 &= D_0 \cdot g = 10\ 000 \cdot 0{,}05 = 500 \\
Q_1 &= A - u_1 = 2\ 820{,}11833 - 500 = 2\ 320{,}11833 \\
D_1 &= D_0 - Q_1 = 10\ 000 - 2\ 320{,}11833 = 7\ 679{,}88167 \\
u_2 &= D_1 \cdot g = 7\ 679{,}88167 \cdot 0{,}05 = 383{,}99408 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Anuitné splácanie - Umorovací plán pôžičky - Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q_t = D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot g$	úmor $Q_t = A - u_t$	anuita A
1	10 000,00000	500,00000	2 320,11833	2 820,11833
2	7 679,88167	383,99408	2 436,12424	2 820,11833
3	5 243,75743	262,18787	2 557,93045	2 820,11833
4	2 685,82698	134,29135	2 685,82698	2 820,11833
$\sum$	—	1 280,47330	10 000,00000	11 280,47330

Anuitné splácanie – postupnosť umorovacích splátok

Veta (veta o postupnosti úmorov)

Umorovacie splátky Q_1, Q_2, ..., Q_n pri pôžičke s anuitným splácaním tvoria rastúcu geometrickú postupnosť.

Dôkaz:

$$
\begin{aligned}
A_t &= Q_t + u_t = Q_t + D_{t-1} \cdot g \\
A_{t+1} &= A_t \\
Q_{t+1} + D_t \cdot g &= Q_t + D_{t-1} \cdot g \\
Q_{t+1} &= Q_t + (D_{t-1} - D_t) \cdot g \\
Q_{t+1} &= Q_t + Q_t \cdot g \\
Q_{t+1} &= Q_t \cdot (1 + g)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{Q_{t+1}}{Q_t} = 1 + g
$$

Anuitné splácanie – prvá umorovacia splátka

Dôsledok

Výška prvej umorovacej splátky Q_1 pri pôžičke s anuitným splácaním spĺňa

$$D = Q_1 \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g}$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} D &= Q_1 + Q_2 + \cdots Q_n = \\ &= Q_1 + Q_1(1+g) + Q_1(1+g)^2 + \cdots + Q_1(1+g)^{n-1} \end{aligned}$$

$$D = Q_1 \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{1+g-1}$$

$$D = Q_1 \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g}$$

Anuitné splácanie – p ľubovoľné

súčasná hodnota polehotnej renty

$$A_n = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{g}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}$$

položme $D = A_n$ a $A = R$

$$D = A \cdot \frac{1-\left(1+\frac{g}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \quad \Longrightarrow \quad A = D \cdot \frac{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}{1-\left(1+\frac{g}{m}\right)^{-m \cdot n}}$$

Anuitné splácanie – p ľubovoľné

Veta

Predpokladajme pôžičku s anuitným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že splátka je realizovaná $p-$krát do roka a zostatok dlhu je úročený $m-$krát do roka nominálnou úrokovou sadzbou g. Pre výšku úmoru Q_t, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A platí

$$A = D \cdot \frac{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{1 - \left(1+\frac{g}{m}\right)^{-m \cdot n}}, \tag{16}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot \left[\left(1+\frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right], \tag{17}$$

$$Q_t = A - u_t. \tag{18}$$

$p = m$ ľubovoľné - anuitné splácanie - Príklad

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku v hodnote 10 000 eur pri 5% nominálnej úrokovej miere a polročnom úrokovaní, ktorá má byť splatená do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu polročných konštantných anuít.

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} D & = & 10\,000 \\ g & = & 0{,}05 \\ m & = & 2 \\ p & = & 2 \\ n & = & 4 \\ \hline A & = & ? \end{array}$$

$p = m$ ľubovoľné - anuitné splácanie - Príklad

Riešenie:

$$\begin{aligned}
A &= D \cdot \frac{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{1-\left(1+\frac{g}{m}\right)^{-m\cdot n}} = 10\ 000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}05}{2}\right)^{\frac{2}{2}} - 1}{1-\left(1+\frac{0{,}05}{2}\right)^{-2\cdot 4}} = 1\ 394{,}67346 \\
D_0 &= D = 10\ 000 \\
u_1 &= D_0 \cdot \frac{g}{m} = 10\ 000 \cdot \frac{0{,}05}{2} = 250 \\
Q_1 &= A - u_1 = 1\ 394{,}67346 - 250 = 1\ 144{,}67346 \\
D_1 &= D_0 - Q_1 = 10\ 000 - 1\ 144{,}67346 = 8\ 855{,}32654 \\
u_2 &= D_1 \cdot \frac{g}{m} = 8\ 855{,}32654 \cdot \frac{0{,}05}{2} = 221{,}38316 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Anuitné splácanie - Umorovací plán pôžičky - Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q_t=D_t)$	úroky za periódu $u_t=D_{t-1}\cdot\frac{g}{m}$	úmor $Q_t=A-u_t$	anuita A
1	10 000,00000	250,00000	1 144,67346	1 394,67346
2	8 855,32654	221,38316	1 173,29029	1 394,67346
3	7 682,03624	192,05091	1 202,62255	1 394,67346
4	6 479,41369	161,98534	1 232,68812	1 394,67346
5	5 246,72557	131,16814	1 263,50532	1 394,67346
6	3 983,22025	99,58051	1 295,09295	1 394,67346
7	2 688,12730	67,20318	1 327,47028	1 394,67346
8	1 360,65702	34,01644	1 360,65703	1 394,67346
$\sum$	—	1 157,38768	10 000,00000	11 157,38768

Špeciálne umorovanie - Príklad

Príklad:

Pôžička vo výške 40 000 eur má byť splácaná ročnými splátkami. Prvá splátka vo výške 10 000 eur je splatná po 2. roku. Ďalšie splátky sa majú postupne zvyšovať o 4 000 eur. Po koľkých rokoch bude dlh splatený pri ročnej úrokovej miere 18 %? Aká bude výška poslednej splátky? Zostavme umorovací plán.

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} D & = & 40\ 000 \\ g & = & 0{,}18 \\ A_1 & = & 0 \\ A_t & = & 10\ 000 + (t-2) \cdot 4\ 000 \qquad \text{pre } t \geq 2 \\ \hline n & = & ? \\ A_n & = & ? \end{array}$$

Špeciálne umorovanie - Umorovací plán pôžičky - Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q_t = D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot g$	úmor $Q_t = A_t - u_t$	anuita $A_t = u_t + Q_t$
1	40 000,00000	7 200,00000	-7 200,00000	0,00000
2	47 200,00000	8 496,00000	1 504,00000	10 000,00000
3	45 696,00000	8 225,28000	5 774,72000	14 000,00000
4	39 921,28000	7 185,83040	10 814,16960	18 000,00000
5	29 107,11040	5 239,27987	16 760,72013	22 000,00000
6	12 346,39027			

Špeciálne umorovanie - Umorovací plán pôžičky - Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q_t=D_t)$	úroky za periódu $u_t=D_{t-1}\cdot g$	úmor $Q_t=A_t-u_t$	anuita $A_t=u_t+Q_t$
1	40 000,00000	7 200,00000	-7 200,00000	0,00000
2	47 200,00000	8 496,00000	1 504,00000	10 000,00000
3	45 696,00000	8 225,28000	5 774,72000	14 000,00000
4	39 921,28000	7 185,83040	10 814,16960	18 000,00000
5	29 107,11040	5 239,27987	16 760,72013	22 000,00000
6	12 346,39027	2 222,35025+	12 346,39027=	14 568,74052
$\sum$	—	38 568,74052	40 000,00000	78 568,74052

Ďakujem za pozornosť.