

# NMPaMŠ – 12.cvičenie

**RNDr. Z. Gibová, PhD.**

# Základné pojmy testovania štatistických hypotéz

**Nulová hypotéza  $H_0$  (parameter  $Q_0$ )** – hypotéza, ktorej platnosť overujeme

**Alternatívna hypotéza  $H$  (parameter  $Q$ )** – hypotéza, ktorú prijímame, keď neplatí nulová hypotéza

Môže byť a) **pravostranná  $H: Q > Q_0$**

b) **ľavostranná  $H: Q < Q_0$**

c) **obojstranná  $H: Q \neq Q_0$**

**Testovacia charakteristika  $G$**  – funkcia, ktorá závisí od náhodného výberu

**Kritická oblasť  $K_\alpha$  (oblasť zamietnutia na hladine významnosti  $\alpha$ )** - interval, určený kvantilom testovacej charakteristiky  $G$ , keď hodnota  $G \in K_\alpha$  **zamietame hypotézu  $H_0$**

# Testy

## 1. Y – test zhody strednej hodnoty so známou $\mu_0$ ( $\sigma$ poznáme)

**Nulová hypotéza:**  $\mathcal{H}_0: \mu = \mu_0$ .

**Testovacia charakteristika:**  $Y = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$ .

**Kritická oblasť**  $K_\alpha$  pre alternatívnu hypotézu

a)  $\mathcal{H}_1: \mu > \mu_0$  je  $K_\alpha = (y_{1-\alpha}; \infty)$

b)  $\mathcal{H}_1: \mu < \mu_0$  je  $K_\alpha = (-\infty; -y_{1-\alpha})$

c)  $\mathcal{H}_1: \mu \neq \mu_0$  je  $K_\alpha = (-\infty; -y_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (y_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$

kde  $y_\beta$  je  $\beta$ - kvantil normovaného normálneho rozdelenia pravdepodobnosti.

## 2. t - test zhody strednej hodnoty so známou $\mu_0$ ( $\sigma$ nepoznáme)

**Nulová hypotéza:**  $\mathcal{H}_0: \mu = \mu_0$ .

**Testovacia charakteristika:**

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s^*} \cdot \sqrt{n}.$$

**Kritická oblasť**  $K_\alpha$  pre alternatívnu hypotézu

a)  $\mathcal{H}_1: \mu > \mu_0$  je  $K_\alpha = (t_{1-\alpha, n-1}; \infty)$

b)  $\mathcal{H}_1: \mu < \mu_0$  je  $K_\alpha = (-\infty; -t_{1-\alpha, n-1})$

c)  $\mathcal{H}_1: \mu \neq \mu_0$  je  $K_\alpha = (-\infty; -t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}) \cup (t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}; \infty)$

kde  $t_{\beta, n-1}$  je  $\beta$  kvantil Studentovho  $t$ -rozdelenia pravdepodobnosti s  $n - 1$  stupňami voľnosti.

### 3. $\chi^2$ - test zhody rozptylu $\sigma^2$ so známou $\sigma_0^2$

**Nulová hypotéza:**  $\mathcal{H}_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ .

**Testovacia charakteristika:**

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot s^{*2}.$$

**Kritická oblasť**  $K_\alpha$  pre alternatívnu hypotézu

a)  $\mathcal{H}_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$  je  $K_\alpha = (\chi_{1-\alpha, n-1}^2; \infty)$

b)  $\mathcal{H}_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$  je  $K_\alpha = (0; \chi_{\alpha, n-1}^2)$ ,

c)  $\mathcal{H}_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$  je  $K_\alpha = (0; \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2) \cup (\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2; \infty)$

kde  $\chi_{\beta, n-1}^2$  je  $\beta$  kvantil  $\chi^2$  rozdelenia pravdepodobnosti :

## Pr. 1:

(a) Kontrolór nameral nasledujúce hodnoty objemu fliaš Coca-Coly:

0,49; 0,5; 0,48; 0,47; 0,505; 0,485; 0,49; 0,495; 0,5; 0,48.

- Určte 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu a disperziu.
- Nájdite 99%-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.
- Na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu  $H_0 : \mu = 0,5$  oproti hypotéze  $H_1 : \mu < 0,5$ .

rozdeľenie podľa počtu

$x_i$	$n_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
0,47	1	$3,8025 \cdot 10^{-4}$	$3,8025 \cdot 10^{-4}$
0,48	2	$0,9025 \cdot 10^{-4}$	$1,805 \cdot 10^{-4}$
0,485	1	$0,2025 \cdot 10^{-4}$	$0,2025 \cdot 10^{-4}$
0,49	2	$0,0025 \cdot 10^{-4}$	$0,005 \cdot 10^{-4}$
0,495	1	$0,3025 \cdot 10^{-4}$	$0,3025 \cdot 10^{-4}$
0,5	2	$1,1025 \cdot 10^{-4}$	$2,205 \cdot 10^{-4}$
0,505	1	$2,4025 \cdot 10^{-4}$	$2,4025 \cdot 10^{-4}$

i

$$n = 10$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} x_i \cdot n_i = 0,4895$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 n_i$$
$$= 0,00011916$$

$$s = s^* = \sqrt{s^{*2}} = 0,0109161$$

## Pr. 2:

(b) Pri meraní hmotnosti žiakov 7. ročníka boli namerané hodnoty:

54.2; 38.8; 45.6; 51.2; 49.7; 51.6; 50.1; 41.7; 36.1; 45.0.

- Nájdite 95%- ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.
- Na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu  $H_0 : \mu = 47$  proti  $H_1 : \mu \neq 47$ .
- Nájdite 99% -ný obojstranný interval spoľahlivosti pre disperziu.

$x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$
36,1	
38,8	
41,7	
45	
45,6	
49,7	
50,1	
51,2	
51,6	
54,2	

### Pr. 3:

(c) Trasa na určitej linke MHD bola prejdená rýchlosťami (v km/hod):

8,5; 9,5; 7,8; 8,2; 9,0; 7,5; 8,2; 7,8; 9,0; 8,5.

- Otestujte na hladine významnosti 0,01 hypotézu  $H_0 : \sigma^2 = 0,35$  oproti hypotéze  $H_1 : \sigma^2 > 0,35$ .
- Určte 95%- ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

$x_i$	$n_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
8,5			
9,5			
7,8			
8,2			
9			
7,5			



## Pr. 4:

(k) Študenti písali zápočtovú s maximálnym ziskom 15 bodov. Náhodným výberom boli zistené nasledujúce výsledky (počty získaných bodov):

$x_i$	0	2	3	5	6	8	10	12	14	15
$n_i$	1	2	1	4	5	5	3	2	1	1

Predpokladáme normálne rozdelenie počtu bodov so známym  $\sigma^2 = 14$ . Určte:

- 95 %-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- 99 %-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- 95 %-ný pravostranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu;
- na hladine významnosti 0,1 otestujte hypotézu  $H_0 : \mu = 6,2$  oproti hypotéze  $H_1 : \mu > 6,2$ ;
- na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu  $H_0 : \mu = 7,8$  oproti hypotéze  $H_1 : \mu \neq 7,8$

(iv)  $\alpha = 0,1$        $H_0 : \mu_0 = 6,2$  ,     $H_1 : \mu > 6,2 = \mu_0$     pravostranná  
hypotéza  
 $\mu$  - 2 náme,  $\sigma^2$  - 2 náme  $\Rightarrow$  1. test

distancia  
okraj.

$$y = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{7,2 - 6,2}{\sqrt{14}} \cdot \sqrt{25} = 1,336306$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{25} x_i \cdot n_i = \frac{1}{25} \cdot 180 = 7,2$$

$$y_{0,9} = 1,28155$$

$$K_\alpha \in (y_{1-\alpha}, \infty) = (1,28155, \infty)$$

$$y \in K_\alpha \Rightarrow H_0 \text{ zamietame}$$

## Preskúšajte sa

Vyberte správne tvrdenia.

- 90 % - ný spoľahlivosti zapisujeme  
a)  $\alpha = 0,9$     b)  $1 - \alpha = 0,9$     c)  $\alpha = 0,1$     d)  $1 - \alpha = 0,1$
- $Y_{1-\alpha}$  je  $\beta$  - kvantil  
a) Studentovho rozdelenia,    b) Fisherovho rozdelenia,  
c) normálneho normovaného rozdelenia,    d)  $\chi^2$  rozdelenia.
- Je daný súbor hodnôt 3; 3,5; 3,2; 3; 3,1; 3,2; 3,4; 3; 3,2; 3,1. Pri spracovaní budú dáta triedené podľa  
a) veľkosti,    b) početnosti,    c) priemeru.
- Výberový priemer zo súboru dát z otázky 3 sa určí  
a)  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$  ,    b)  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i p_i$  ,    c)  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  .
- Je daný súbor hodnôt 1; 1,5; 0,5. Výberový priemer je  
a) 0,3    b) 1    c) 1/3.
- Modifikovaná výberová odchýlka pre dáta z otázky 5 je  
a) 0,25    b) 0,5    c) 0,85,    d) 1.

7. Ľavostranný interval pre známe hodnoty  $\mu$  a  $\sigma$  je

a)  $\mu \in \left\langle \bar{x} - y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$ ,    b)  $\mu \in \left\langle \bar{x} - y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right\rangle$ ,

c)  $\mu \in \left( -\infty, \bar{x} + y_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ .

8. Ak je dané  $s^{*2} = 10$ ,  $n = 20$   $\alpha = 0,02$ . Potom obojstranný interval pre neznáme  $\mu$  a známe  $\sigma^2$  je

a)  $\left\langle \frac{19.10}{\chi^2_{0,99,19}}, \frac{19.10}{\chi^2_{0,01,19}} \right\rangle$ ,

c)  $\left\langle \frac{19.10}{\chi^2_{0,99,19}}, \infty \right\rangle$ ,

b)  $\left\langle \frac{19.10}{\chi^2_{0,99,19}}, \frac{19.10}{\chi^2_{0,99,19}} \right\rangle$ ,

d)  $\left( 0, \frac{19.10}{\chi^2_{0,02,19}} \right)$ .

9. Hypotéza  $H_1$ :  $\mu > 5,8$  je

a) obojstranná,

b) ľavostranná,

c) pravostranná.

10.  $\beta$  - kvantil  $t_{0,975,12}$  má tabuľke pozíciu danú

a) číslom 0,975 v prvom riadku a číslom 12 v prvom stĺpci,

b) číslom 0,975 v prvom stĺpci a číslom 12 v prvom riadku,

c) číslom 0,975 v druhom riadku a číslom 12 v prvom riadku.

11. Kritická oblasť daná intervalom  $(y_{1-\alpha}, \infty)$  patrí k

- a) pravostrannej hypotéze t - testu,    b) ľavostrannej hypotéze Y - testu,
- c) pravostrannej hypotéze Y – testu,    d) ľavostrannej hypotéze  $\chi^2$  - testu.

12. Kritická oblasť je

- a) oblasť prijatia hypotézy,
- b) oblasť zamietnutia hypotézy,
- c) oblasť overenie hypotézy.

13. Ak testovacia charakteristika  $t = -2,5$  a  $K_\alpha = (-\infty; -1,8331)$  potom

- a) prijímame hypotézu  $H_0$ ,    b) zamietame hypotézu  $H_0$ ,    c) zamietame hypotézu  $H_1$ .

14. Testovacia charakteristika pre t – test je daná

a)  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ ,                      b)  $t = \frac{\bar{x} - \sigma}{\mu_0} \sqrt{n}$ ,                      c)  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n - 1}$ .

15. Je dané  $H_0: \sigma_0^2 = 0,2$ ;  $H_1: \sigma^2 > 0,2$ ,  $n = 10$  a  $s^{*2} = 0,4$ . Potom testovacia charakteristika je

a)  $\chi^2 = \frac{9}{0,4} 0,2$ ;                      b)  $\chi^2 = \frac{10}{0,2} 0,4$ ;                      c)  $\chi^2 = \frac{9}{0,2} 0,4$ .

16.  $\beta$  - kvantil pre hypotézu z otázky 15 je

a)  $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$  ,      b)  $\chi^2_{\alpha, n-1}$  ,      c)  $\chi^2_{1-\alpha, n-1}$  .

17. Je dané  $H_0: \mu_0 = 6$ ;  $H_1: \mu < 6$ ,  $\alpha = 0,02$ ,  $s^{*2} = 8,9$ ,  $n = 10$ ,  $\bar{x} = 5,9$ . Potom kritická oblasť je

a)  $(Y_{1-\alpha}, \infty)$  ,      b)  $(-\infty, Y_{1-\alpha})$  ,      c)  $(-\infty, -Y_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (Y_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty)$ .

18. Testovacia charakteristika z otázky 16 má hodnotu

a)  $-0,106$ ,      b)  $-0,036$ ,      c)  $2,09$ ,      d)  $-15,8$ .

19. Ak  $Y_{0,98} = 2,054$ , potom pre testovaciu charakteristiku z otázky 18 a kritickú oblasť z otázky 17 platí

a)  $t \in K_\alpha$ ,      b)  $t \notin K_\alpha$ ,      c)  $t \geq K_\alpha$  ,      d)  $t \leq K_\alpha$ .

20. Na základe výsledku z otázky 19 pre hypotézy platí

a) prijímame hypotézu  $H_0$ ,      b) zamietame hypotézu  $H_0$ ,      c) prijímame hypotézu  $H_1$ .

## **Správne odpovede:**

1b, 2c, 3b, 4b, 5b, 6b, 7b, 8a, 9c, 10b, 11c, 12b, 13b, 14a, 15c, 16c, 17b, 18a, 19b, 20a

## **Hodnotenie:**

**0 – 3 správne odpovede** – máš vedomosti z matematickej štatistiky

**5 - 9 nesprávne odpovede** – tvoje vedomosti sú celkom dobré

**10 a viac nesprávnych odpovedí** – tvoje vedomosti nie sú postačujúce, odporúčam sa na to ešte raz pozrieť