

## Príklady na precvičenie č. 3

1. Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej  $X$  so strednou hodnotou 3,8 je dané pravdepodobnostnou tabuľkou

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & 1 & 2 & 3 & x_4 & 7 \\ \hline p_i & 0,05 & 0,1 & 0,3 & 0,4 & p_5 \end{array}.$$

Určte:

- (a) neznáme hodnoty  $x_4$  a  $p_5$ ;
- (b) disperziu a modus náhodnej premennej  $X$ ;
- (c)  $P(2 \leq X < 4)$  a  $P(X \leq E(X))$ ;
- (d) distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

- p5 = 0,15
- [i]  $p_5 = ?$ ;  $x_4 = 4$ ; ii)  $D(X) = 2,46$ ;  $Mo(X) = 4$ ;  
iii)  $P(2 \leq X < 4) = 0,4$ ;  $P(X \leq E(X)) = 0,45$

2. Náhodná premenná  $X$  je daná pravdepodobnostnou tabuľkou

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & x_1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & 0,1 & 0,2 & p_3 & 0,4 \end{array},$$

pričom platí, že  $D(X) = 1$  a  $x_1 \leq 4$ . Určte:

- i. neznáme hodnoty  $x_1$  a  $p_3$ ;
- ii. strednú hodnotu a modus náhodnej premennej  $X$ ;
- iii.  $P(0 \leq X < 2)$  a  $P(|X - 1,5| \leq 1)$ ;
- iv. distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

(Návod: Použite vzťah  $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ ,  $E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$ .)

- p3 = 0,3
- [i]  $p_3 = ?$ ;  $x_1 = 0$ ; ii)  $E(X) = 2$ ;  $Mo(X) = 3$ ;  
iii)  $P(0 \leq X < 2) = 0,3$ ;  $P(|X - 1,5| \leq 1) = 0,5$

3. Predpokladajme, že hádzame súčasne dvoma kockami. Vykonáme 3 hody. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme súčet 9.

- i. Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú  $X$  (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov).
- ii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .
- iii. Vypočítajte  $P(0 < X \leq 2)$ ,  $P(X > E(X))$ .
- iv. Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

i)  $\begin{array}{c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & \frac{512}{729} & \frac{192}{729} & \frac{24}{729} & \frac{1}{729} \end{array}$ ; ii)  $E(X) = \frac{1}{3}$ ,  $D(X) = \frac{8}{27}$ ; iii)  $P(0 < X \leq 2) = \frac{216}{729}$ ,  
 $P(X > E(X)) = \frac{217}{729}$

4. V krabici je 9 guľôčok, z ktorých jedna tretina sú biele guľôčky. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu bielych guľôčok medzi štyrmi náhodne vybranými guľôčkami (bez vrátenia).

- i. Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej  $X$  (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov);
- ii. Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ .
- iii. Vypočítajte  $P(0 < X \leq 2)$ ,  $P(X > E(X))$ .
- iv. Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

i)  $\begin{array}{c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & \frac{15}{126} & \frac{60}{126} & \frac{45}{126} & \frac{6}{126} \end{array}$ ; ii)  $E(X) = \frac{4}{3}$ ; iii)  $P(0 < X \leq 2) = \frac{105}{126}$ ,  $P(X > E(X)) = \frac{51}{126}$

5. V krabici je 9 guľôčok, z ktorých jedna tretina sú biele guľôčky. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu bielych guľôčok medzi štyrmi náhodne vybranými guľôčkami, ak guľôčky po vytiahnutí vraciame späť do krabice.

- i. Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej  $X$  (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov);
- ii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .
- iii. Vypočítajte  $P(X \geq 3)$ ,  $P(X < E(X))$ .

iv. Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

i)  $\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \frac{16}{81} & \frac{32}{81} & \frac{24}{81} & \frac{8}{81} & \frac{1}{81} \end{array}$ ; ii)  $E(X) = \frac{4}{3}$ ,  $D(X) = \frac{8}{9}$ ; iii)  $P(X \geq 3) = \frac{1}{9}$ ,  $P(X < E(X)) = \frac{48}{81}$

6. Pravdepodobnosť zhotovenia štandardnej súčiastky je 0,8. Z vyrobenej série súčiastok kontrolór vyberá postupne súčiastky a kontroluje ich kvalitu. Ak je súčiastka kvalitná, kontrolór vyberie ďalšiu, ale vyberie najviac 4 súčiastky. Ak kontrolovaná súčiastka nezodpovedá štandardu, kontrola sa zastaví a séria sa vyradí. Náhodná premenná  $X$  nadobúda hodnoty počtu kontrolovaných súčiastok. Určte:

i. pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej  $X$ ;

ii. pravdepodobnosť toho, že budú kontrolované aspoň tri súčiastky;

iii. strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ ;

iv. distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

i)  $\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0,2 & 0,16 & 0,128 & 0,512 \end{array}$ ; ii)  $E(X) = 2,952$ ; iii)  $P(X \geq 3) = 0,64$ .

7. Predpokladajme, že hádzeme súčasne tromi mincami. Vykonáme tri hody. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme dve hlavy a jeden znak.

i. Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej  $X$  (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov);

ii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .

iii. Vypočítajte  $P(X > 1)$ ,  $P(X \leq E(X))$ .

iv. Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

i)  $\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \frac{125}{512} & \frac{225}{512} & \frac{135}{512} & \frac{27}{512} \end{array}$ ; ii)  $E(X) = \frac{9}{8}$ ,  $D(X) = \frac{45}{64}$ ; iii)  $P(X > 1) = \frac{162}{512}$ ,  
 $P(X \leq E(X)) = \frac{350}{512}$

8. Predpokladajme, že hádzeme súčasne dvoma kockami. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá reprezentuje minimum hodených hodnôt.

i. Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú  $X$  (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov).

ii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .

iii. Vypočítajte  $P(X > 4)$ ,  $X \leq E(X)$ .

iv. Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

i)  $\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{5}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36} \end{array}$ ; ii)  $E(X) = \frac{91}{36}$ ,  $D(X) = \frac{2555}{1296}$ ; iii)  $P(X > 4) = \frac{1}{9}$ ,  $P(X \leq E(X)) = \frac{5}{9}$

9. Predpokladajme, že hádzeme súčasne dvoma kockami. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá reprezentuje súčet hodených hodnôt.

i. Zostrojte pravdepodobnostnú tabuľku pre náhodnú premennú  $X$  (hodnoty zapíšte v tvare zlomkov).

ii. Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .

iii. Vypočítajte pravdepodobnosť, že súčet hodnôt je menší ako 9.

iv. Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

i)  $\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{array}$

ii)  $E(X) = 7$ ,  $D(X) = \frac{35}{6}$ ; iii)  $P(X < 9) = \frac{13}{18}$

10. Terč tvorí kruh  $K$  a dve medzikružia  $M_1$  a  $M_2$ . Zásah do kruhu  $K$  znamená 10 bodov, zásah do medzikružia  $M_1$  znamená 5 bodov a do  $M_2$  znamená 0 bodov. Pravdepodobnosť zásahu kruhu  $K$  je 0,5, pravdepodobnosť zásahu medzikružia  $M_1$  je 0,3 a pravdepodobnosť zásahu medzikružia  $M_2$  je 0,2. Nech náhodná premenná  $X$  je rovná počtu získaných bodov pri 2 nezávislých výstreloch. Určte:

i. zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej  $X$  (pravdepodobnostnú tabuľku);

ii. strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ ;

iii. pravdepodobnosti  $P(X \leq 10)$ ,  $P(5 < X \leq 15)$ ;

iv. Napíšte distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .

$\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ \hline 0,04 & 0,12 & 0,29 & 0,3 & 0,25 \end{array}$ ; ii)  $E(X) = 13$ ; iii)  $P(X \leq 10) = 0,45$ ;  $P(5 < X \leq 15) = 0,59$ .

11. V triede je 15 študentov, z ktorých jedna tretina študuje s vyznamenaním. Nech  $X$  je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnoty počtu vyznamenaných študentov medzi tromi náhodne vybranými študentmi. Určte:
- zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej  $X$  (pravdepodobnostnú tabuľku);
  - pravdepodobnosť, že medzi tromi náhodne vybranými študentmi bol aspoň jeden vyznamenaný študent.
  - strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ .
  - distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .
- i)  $\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \frac{120}{455} & \frac{225}{455} & \frac{100}{455} & \frac{10}{455} \end{array}$ ; ii)  $P(X \geq 1) = \frac{335}{455}$ ; iii)  $E(X) = 1$ .
12. Pravdepodobnosť správnej odpovede na konkurze je 0,7. Predseda komisie kladie otázky. Ak respondent odpovie nesprávne, ďalšiu otázku nedostane a je vyradený. Ak odpovie správne, dostane ďalšiu otázku, ale spolu dostane najviac 4 otázky. Určte:
- pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej  $X$ , ktorá nadobúda hodnoty počtu položených otázok;
  - strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ ;
  - pravdepodobnosť toho, že budú položené aspoň tri otázky;
  - distribučnú funkciu náhodnej premennej  $X$ .
- i)  $\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0,3 & 0,21 & 0,147 & 0,1029 \end{array}$ ; ii)  $E(X) = 2,533$ ; iii)  $P(X \geq 3) = 0,49$ .
13. V dvoch krabiciach sú očíslované guľky. V 1. krabici majú dve guľky číslo 1, dve guľky číslo 2 a jedna guľka má číslo 5. V 2. krabici majú tri guľky číslo 1 a dve guľky číslo 2. Z oboch krabíc náhodne vyberieme po jednej guľke a vypočítame súčin čísel. Získané číslo je náhodná premenná  $X$ . Určte:
- pravdepodobnostnú tabuľku náhodnej premennej  $X$ ;
  - strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ ;
  - disperziu náhodnej premennej  $X$ ;
  - modus náhodnej premennej  $X$ .
- i)  $\frac{x_i}{p_i} \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 4 & 5 & 10 \\ \hline \frac{6}{25} & \frac{10}{25} & \frac{4}{25} & \frac{3}{25} & \frac{2}{25} \end{array}$ ; ii)  $E(X) = \frac{77}{25}$ ; iii)  $D(X) = \frac{3696}{625}$ ; iv)  $Mo(X) = 2$ .
14. Do predajne príde priemerne 90 zákazníkov za hodinu. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- v priebehu 5 minút nepríde do predajne žiaden zákazník,
  - v priebehu 3 minút prídu do predajne aspoň traja zákazníci,
  - v priebehu 4 minút prídu do predajne najviac traja zákazníci. [i)  $5,53 \cdot 10^{-4}$ ; ii) 0,82641; iii) 0,1512]
15. Rádioaktívna látka vyžaruje priemerne 80 častíc za minútu. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- v priebehu 5 sekúnd vyžiari najviac 2 častice;
  - v priebehu 3 sekúnd vyžiari aspoň 4 častice.
  - v priebehu 6 sekúnd vyžiari 8 častíc. [i) 0,03804; ii) 0,56653; iii) 0,1396]
16. V krajčírskych dielni prijímajú priemerne 12 nových zakázok za 5 pracovných dní. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- počas 3 pracovných dní prijmú 8 zakázok,
  - počas jedného pracovného dňa prijmú aspoň 2 zakázky,
  - počas dvoch pracovných dní prijmú najviac 3 zakázky. [i) 0,13372; ii) 0,69156; iii) 0,2942]
17. Telefónna ústredňa zapojí počas jednej hodiny priemerne 30 hovorov. Aká je pravdepodobnosť, že ústredňa v priebehu
- 3 minút zapojí práve 5 hovorov;
  - 10 minút zapojí viac ako 4 hovory;
  - 5 minút zapojí najviac 2 hovory. [i) 0,0141; ii) 0,5595; iii) 0,5438]
18. Medzi 11<sup>00</sup> a 11<sup>40</sup> prichádza na obed do jedálne priemerne 200 stravníkov. Aká je pravdepodobnosť, že
- v priebehu 2 minút nepríde žiaden stravník,
  - že v priebehu jednej minúty prídu najviac traja stravníci,

iii. v čase medzi 11<sup>20</sup> a 11<sup>23</sup> prídu aspoň štyria stravníci.

[i)  $4,54 \cdot 10^{-4}$ ; ii) 0,265; iii) 0,99979]

19. Pracovníci prichádzajú k terminálu nezávisle na sebe v priemere traja za hodinu. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

i. počas trojhodinového intervalu príde k terminálu aspoň 4 pracovníci,

ii. počas dvojhodinového intervalu príde k terminálu viac ako 5, ale maximálne 8 pracovníkov.

iii. počas hodinového intervalu príde k terminálu najviac 4 pracovníci.

[i) 0,97877; ii) 0,40156, iii) 0,8152]